



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



AKA
0427
.b

Library of the Museum
OF
COMPARATIVE ZOÖLOGY,
AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

The gift of the *K. Akademie der
Wissenschaften*

No. 132
January 8 - October 28, 1895



SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTDRITTER BAND.



WIEN, 1894.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE
DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE
DER KAISERLICHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CIII. BAND. ABTHEILUNG II. a.
JAHRGANG 1894. — HEFT I BIS X.
✓
(MIT 8 TAFELN UND 72 TEXTFIGUREN.)



Sm WIEN, 1894.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.
IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

	Seite
I. Sitzung vom 4. Jänner 1894: Übersicht	3
II. Sitzung vom 11. Jänner 1894: Übersicht	41
III. Sitzung vom 18. Jänner 1894: Übersicht	105
IV. Sitzung vom 1. Februar 1894: Übersicht	129
V. Sitzung vom 8. Februar 1894: Übersicht	131
VI. Sitzung vom 15. Februar 1894: Übersicht	133
VII. Sitzung vom 1. März 1894: Übersicht	203
VIII. Sitzung vom 8. März 1894: Übersicht	223
IX. Sitzung vom 5. April 1894: Übersicht	227
X. Sitzung vom 12. April 1894: Übersicht	277
XI. Sitzung vom 19. April 1894: Übersicht	278
XII. Sitzung vom 4. Mai 1894: Übersicht	281
XIII. Sitzung vom 10. Mai 1894: Übersicht	283
XIV. Sitzung vom 25. Mai 1894: Übersicht	337
XV. Sitzung vom 7. Juni 1894: Übersicht	341
XVI. Sitzung vom 14. Juni 1894: Übersicht	611
XVII. Sitzung vom 21. Juni 1894: Übersicht	612
XVIII. Sitzung vom 5. Juli 1894: Übersicht	617
XIX. Sitzung vom 12. Juli 1894: Übersicht	773
XX. Sitzung vom 11. October 1894: Übersicht	779
XXI. Sitzung vom 18. October 1894: Übersicht	981
XXII. Sitzung vom 2. November 1894: Übersicht	985
XXIII. Sitzung vom 8. November 1894: Übersicht	986
XXIV. Sitzung vom 16. November 1894: Übersicht	1066
XXV. Sitzung vom 29. November 1894: Übersicht	1067
XXVI. Sitzung vom 6. December 1894: Übersicht	1103
XXVII. Sitzung vom 13. December 1894: Übersicht	1105

Bobek K., Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung.

[Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 887

Bryan G. H. und *Boltzmann L.*, Über die mechanische Analogie
des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper.

(Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1125

	Seite
✓ <i>Czermak P.</i> , Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird. (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	1107
<i>Czuber E.</i> , Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [Preis 25 kr. = 50 Pfg.]	295
<i>Exner F.</i> , Elektrochemische Untersuchungen. (IV. Mittheilung.) (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	845
<i>Finger J.</i> , Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	163
— Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. (II. Theil.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	231
— Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	1061
— Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aelotropen und isotropen Substanzen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	1073
<i>Garvanoff J. G.</i> , Über die innere Reibung in Ölen und deren Änderung mit der Temperatur. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	873
<i>Gegenbauer L.</i> , Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	115
— Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	285
<i>Haerdil E. Frh. v.</i> , Zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten Mercur. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	713
<i>Hann J.</i> , Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.]	51
— Die tägliche Periode der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel und auf Berggipfeln überhaupt. [Preis: 60 kr. = 1 Mk. 20 Pfg.]	619
<i>Herz N.</i> , Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene astronomische Inschrift. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	1135
<i>Jäger G.</i> , Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	145

	Seite
<i>Jäger G.</i> , Über die innere Reibung der Lösungen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	251
<i>Jaumann G.</i> , Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	317
<i>Jüllig M.</i> , Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes. (Mit 4 Tafeln und 9 Textfiguren.) [Preis: 50 kr. = 1 Mk.]	691
<i>Klemenčič I.</i> , Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	205
— Über die circulare Magnetisirung von Eisendrähten. (Mit 6 Textfiguren.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	891
<i>Lecher E.</i> , Eine Studie über unipolare Induction. (Mit 17 Text- figuren.) [Preis: 50 kr. = 1 Mk.]	949
✓ <i>Liznar J.</i> , Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs (V. und letzter vorläufiger Bericht) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . . .	43
✓ — Ein Beitrag zur Kenntniss der 26 tägigen Periode des Erd- magnetismus. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . . .	726
<i>Mahler E.</i> , Die Apisperiode der alten Ägypter. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	832
<i>Mertens F.</i> , Über die Fundamentalgleichung eines Gattungs- bereiches algebraischer Zahlen [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] .	5
— Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	995
— Über den quadratischen Reciprocitätssatz und die Summen von Gauss. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	1005
<i>Obermayer A. v. und Schindler A.</i> , Die trigonometrische Höhen- bestimmung des Hohen Sonnblicks in der Goldberggruppe der Hohen Tauern [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	107
<i>Piesch B.</i> , Änderungen des elektrischen Widerstandes wässriger Lösungen und der galvanischen Polarisation mit dem Drucke. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . .	784
<i>Puschl C.</i> , Folgerungen aus Amagat's Versuchen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	343
— Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	809
— Bemerkungen über Wärmeleitung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	989
<i>Sahulka J.</i> , Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	925
<i>Smoluchowski M. v.</i> , Akustische Untersuchungen über die Elastici- tät weicher Körper. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	739
<i>Streintz F.</i> , Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . .	98

VIII

	Seite
<i>Streintz F.</i> , Über die thermochemischen Vorgänge im Secundär- Elemente. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	327
<i>Suchanek E.</i> , Dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommen- den Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen. [Preis: 1 fl. 30 kr. = 2 Mk. 60 Pfg.]	443
<i>Trabert W.</i> , Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre. (Mit 2 Textfiguren.) Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	1023
<i>Tumlirz O.</i> , Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten. (II. Mit- theilung.) (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . .	266
<i>Voigt W.</i> , Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Finger's Abhand- lung »Das Potential der inneren Kräfte etc.« [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.]	1069
<i>Weyr E.</i> , Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Ge- schlechte Eins und seine Anwendung. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 70 kr. = 1 Mk. 40 Pfg.]	365
<i>Zsigmondy K.</i> , Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n^{ten} Grades von x , welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	135
✓ <i>Zuchristian J.</i> , Experimentelle Darstellung von Magnetfeldern. (Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	943



SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

I. SITZUNG VOM 4. JÄNNER 1894.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 1. Jänner l. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Professor Dr. Heinrich Hertz in Bonn.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt die aus dem erschienenen 60. Band (Jahrgang 1893) veranstaltete Collectiv-Ausgabe der Berichte der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres (Zweite Reihe), ferner das Heft X (December 1893) der Monatshefte für Chemie vor.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein im Gesandtschaftswege für die Bibliothek der kaiserl. Akademie eingelangtes Druckwerk: »Études des Gîtes Minéraux de la France«, publicirt im Auftrage des französischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten.

Das Präsidium der mathematischen Gesellschaft an der kaiserl. Universität in Moskau ladet die kaiserl. Akademie zur Theilnahme an der aus Anlass des 25jährigen Bestandes dieser Gesellschaft am 21. Jänner l. J. daselbst stattfindenden feierlichen Sitzung ein.

Das ungarische Central-Bureau für ornithologische Beobachtungen in Budapest zeigt an, dass diese neugegründete Anstalt mit 1. Jänner 1894 ihre Thätigkeit in der Organisirung des Beobachtungsnetzes begonnen hat.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. F. Streintz: »Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen.«

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens in Graz übersendet eine Abhandlung: »Über die Fundamentalgleichung eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen.«

Herr Prof. Dr. C. Nicoladoni in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Skoliose des Lendensegmentes.« (Fortsetzung.)

Das w. M. Herr Hofrath C. Claus überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: »Zoologische Ergebnisse der Tiefsee-Expedition im östlichen Mittelmeere auf S. M. Schiff »Pola«. III. Die Holocypriden und ihre Entwicklungsstadien. Gesammelt 1890, 1891, 1892, 1893.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung von Dr. R. Daublebsky v. Sterneck: »Abzählung der Primzahlen von der Form $100n+1$ «.

Der Secretär Herr Hofrath J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten.«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Loewy, M., Recherches sur la détermination des constantes des clichés photographiques du ciel. Paris, 1893; 4^o.

Ministère des Travaux publics, Études des Gîtes Minéraux de la France. Publiées sous les auspices de M. le Ministre de Travaux publics par le Service des Topographies souterraines. Bassin houiller et permin d'Autun et d'Épinac. Fascicule IV. Flore Fossile. II^{me} Partie par B. Renault. (Atlas). Paris, 1893; 4^o.

Mayor, A., Louis Agassiz, sa vie et sa correspondance. Traduit de l'Anglais. (Orné d'un portrait d'Agassiz.) Neuchâtel, 1887; 8^o.

Vincenti Giuseppe. La Fonografia universale Michela e la Fono-Telegrafia universale Vincenti. Torino 1893; Folio.

Über die Fundamentalgleichung eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen

von

F. Mertens,

c. M. k. Akad.

1.

Ist

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n = 0 \quad (1)$$

eine gegebene irreductibele Gleichung n ten Grades mit rationalen Coëfficienten und ξ eine Wurzel derselben, so wird die Gesammtheit aller ganzen rationalzahligen Functionen von ξ nach Kronecker¹ ein Gattungsbereich genannt, welcher hier mit \mathfrak{G} bezeichnet werden soll.

Jede solche Function

$$\eta = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots$$

welche immer unter den Grad n in ξ gebracht werden kann, genügt einer rationalzahligen Gleichung n ten Grades

$$y^n + c'_1 y^{n-1} + c'_2 y^{n-2} + \dots + c'_n = 0,$$

deren linke Seite die Norm von

$$y - b_0 - b_1 \xi - b_2 \xi^2 - \dots$$

oder die Resultante von

$$y - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - \dots$$

¹ Festschrift »Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen«, Crelle's Journal, Bd. 92.

und

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n$$

ist. Sind insbesondere in dieser Gleichung die Coëfficienten

$$c'_1, c'_2, \dots, c'_n$$

ganze Zahlen, so wird η eine ganze algebraische Zahl des Gattungsbereiches \mathfrak{G} genannt.

Es gibt unendlich viele Systeme von n ganzen algebraischen Zahlen

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

des Gattungsbereiches \mathfrak{G} , welche die Eigenschaft haben, dass jede ganze algebraische Zahl dieses Bereiches als Vielfachsumme¹ von $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ darstellbar ist. Ein solches System wird ein Fundamentalsystem von \mathfrak{G} genannt.

Sind

$$\begin{array}{cccc} \omega'_1, & \omega'_2, & \dots & \omega'_n \\ \omega''_1, & \omega''_2, & \dots & \omega''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{(n-1)}_1, & \omega^{(n-1)}_2, & \dots & \omega^{(n-1)}_n \end{array}$$

die conjugirten Werthe der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, welche aus letzteren hervorgehen, wenn ξ nach und nach durch alle anderen Wurzeln der Gleichung (1) ersetzt wird, so heisst das Quadrat der Determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \dots & \omega_n \\ \omega'_1, & \omega'_2, & \dots & \omega'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{(n-1)}_1, & \omega^{(n-1)}_2, & \dots & \omega^{(n-1)}_n \end{vmatrix},$$

welches für alle Fundamentalsysteme denselben Werth hat, die Discriminante des Gattungsbereiches \mathfrak{G} .

Sind ferner u_1, u_2, \dots, u_n Unbestimmte und setzt man

$$\begin{array}{rcl} \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 & + \dots + & \omega_n u_n = u \\ \omega'_1 u_1 + \omega'_2 u_2 & + \dots + & \omega'_n u_n = u' \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega^{(n-1)}_1 u_1 + \omega^{(n-1)}_2 u_2 & + \dots + & \omega^{(n-1)}_n u_n = u^{(n-1)}, \end{array}$$

¹ Ich erlaube mir hier eine ganze ganzzahlige linear-homogene Function mehrerer Grössen kurz als Vielfachsumme dieser Grössen zu bezeichnen.

so ist das Product

$$(t-u)(t-u') \dots (t-u^{(n-1)})$$

in den Wurzeln der Gleichung (1) symmetrisch und daher als ganze Function von t von der Form

$$F(t) = t^n - C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} - \dots \pm C_n$$

darstellbar, in welcher

$$C_1, C_2, \dots C_n,$$

beziehungsweise ganze ganzzahlige homogene Functionen der Unbestimmten $u_1, u_2, \dots u_n$ vom Grade 1, 2, $\dots n$ sind. Die Gleichung

$$F(t) = 0,$$

welche die Wurzeln

$$u, u', \dots u^{(n-1)}$$

hat und irreductibel ist, wird die Fundamentalgleichung des Gattungsbereiches \mathfrak{G} genannt.

Es soll hier das Verhalten der Function $F(t)$ in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul untersucht werden.¹ Zu diesem Zwecke sollen jedoch behufs grösserer Klarheit einige Sätze und Bemerkungen vorausgeschickt werden.

2.

I. Unter einer Function einer oder mehrerer Veränderlichen oder Unbestimmten werde hier in diesem Abschnitte immer eine ganze ganzzahlige Function dieser Veränderlichen und unter p eine gegebene Primzahl verstanden. Das Zeichen Γ soll immer eine ganze ganzzahlige Function vorstellen.

Jede Function G ist in Bezug auf den Modul p einer Function G_0 congruent, deren Coëfficienten nicht negativ und $< p$ sind. Denn man braucht nur, um G_0 zu erhalten, jeden Coëfficienten von G durch seinen kleinsten nicht negativen Rest in Bezug auf den Modul p zu ersetzen. Unter der Gradzahl der Function G in Bezug auf eine der in derselben vorkommenden Veränderlichen wird die betreffende Gradzahl von G_0 , unter der

¹ V. Kronecker's Festschrift, §. 25.

Gradzahl in Bezug auf mehrere Veränderliche die Summe der auf die einzelnen Veränderlichen sich beziehenden Gradzahlen verstanden. Wenn G_0 identisch $\equiv 0$ ist oder alle Coëfficienten von G durch p theilbar sind, so hat G keine Gradzahlen in Bezug auf den Modul p .

II. Man sagt, dass eine Function A durch eine Function M , welche jedoch nicht durch p theilbar sein darf, in Bezug auf den Modul p theilbar ist oder dass M in A aufgeht oder ein Theiler von A ist, wenn

$$A \equiv \Gamma M \pmod{p}$$

ist.

Wenn A nicht durch p theilbar ist und M in Bezug auf p in A aufgeht, so hat M keine höheren Gradzahlen als A .

Wenn jede der Functionen M, N durch die andere in Bezug auf den Modul p theilbar ist, so ist

$$N \equiv aM \pmod{p},$$

wo a eine nicht durch p theilbare Zahl bezeichnet. Denn man hat

$$N \equiv QM \pmod{p}$$

$$M \equiv Q_1 N \pmod{p},$$

wo Q, Q_1 ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Aus diesen Congruenzen folgt

$$M(1 - QQ_1) \equiv 0 \pmod{p},$$

also auch

$$1 - QQ_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wenn aber

$$QQ_1 \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, so müssen alle Gradzahlen von Q und $Q_1 = 0$ sein und Q ist eine nicht durch p theilbare Zahl a .

III. Wenn die Producte einer Function G der Veränderlichen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

in n Functionen

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

derselben Veränderlichen, welche jedoch beziehungsweise in x_1, x_2, \dots, x_n in Bezug auf p vom Grade 0 sind, durch die Function M in Bezug auf den Modul p theilbar sind, so ist G selbst in Bezug auf p durch M theilbar.

Gesetzt, man kenne eine Function ω der Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n , welche k verschwindende Gradzahlen besitzt, aber x_m in höherem als dem 0^{ten} Grade enthält und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist. Man hat dann

$$\omega G \equiv AM \pmod{p}$$

$$f_m G \equiv BM \pmod{p},$$

also auch

$$M(Af_m - \omega B) \equiv 0 \pmod{p},$$

wo A, B ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Hieraus folgt

$$Af_m - \omega B \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

$$\omega B = Af_m + p\Gamma.$$

Ist nun ψx_m^r der die höchste Potenz von x_m enthaltende Bestandtheil von ω , P_{h-1} ein Product von irgend $h-1$ Coëfficienten, welche in ω bei den einzelnen Potenzen von x_m stehen, und b, C jeder Coëfficient einer Potenz von x_m in B und $Af_m + p\Gamma$, so gibt es einen Exponenten h von der Art,¹ dass sich jedes Product $\psi^h b$ als Vielfachsumme aller Producte $P_{h-1} C$ darstellen lässt. Da aber jeder Coëfficient C durch f_m in Bezug auf den Modul p theilbar ist, so wird

$$\psi^h b \equiv \Gamma f_m \pmod{p}$$

und demzufolge auch

$$\psi^h B \equiv \Gamma f_m \pmod{p}.$$

Hieraus folgt

$$\psi^h BM \equiv \psi^h f_m G \equiv \Gamma f_m M \pmod{p}$$

oder

$$f_m(\psi^h G - \Gamma M) \equiv 0 \pmod{p}$$

¹ Vergl. Mertens: »Über einen algebraischen Satz«, diese Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a.

und also auch

$$\psi^h G - \Gamma M \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Function ψ^h hat daher wieder dieselbe Eigenschaft wie ω , dass ihr Product in G nach dem Modul p durch M theilbar ist, besitzt aber eine verschwindende Gradzahl mehr als ω . Da man nun eine Function kennt, welche eine verschwindende Gradzahl besitzt und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist, z. B. f_1 , so können durch das vorstehende Verfahren nach und nach Functionen hergestellt werden, welche immer mehr verschwindende Gradzahlen aufweisen und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist. Man gelangt daher auch zu einer Function mit lauter verschwindenden Gradzahlen oder zu einer nicht durch p theilbaren Zahl a , für welche

$$aG \equiv \Gamma M \pmod{p}$$

ist. Bestimmt man dann a' aus der Congruenz

$$aa' \equiv 1 \pmod{p},$$

so wird

$$aa'G \equiv G \equiv a'\Gamma M \pmod{p}.$$

IV. Wenn A, B gegebene Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n sind, deren keine durch p theilbar ist, so kann man eine nicht durch p theilbare Function M derselben Veränderlichen bestimmen, welche den Congruenzen

$$f_i A \equiv \mathfrak{A} M \pmod{p}$$

$$g_i B \equiv \mathfrak{B} M \pmod{p}$$

$$M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$$

genügt, wo $f_i, g_i, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, A_0, B_0$ Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnen, von welchen insbesondere f_i, g_i in Bezug auf x_i verschwindende Gradzahlen haben.

Man kann ähnlich wie bei dem Verfahren Euclid's eine Reihe von Functionen

$$A, B, C, \dots, M, 0 \tag{2}$$

der Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n aufstellen, welche folgende Eigenschaften hat. Sie fängt mit den gegebenen Functionen

A, B an und besteht mit Ausnahme der letzten Function, welche $\equiv 0$ ist, aus lauter durch p nicht theilbaren Functionen. Sind P, Q, R drei Glieder der Reihe, von welchen Q auf P und R auf Q folgt, so erreicht R in x_i den Grad von Q nicht, und es besteht eine Congruenz von der Form

$$\varphi_i P \equiv \Gamma Q + R \pmod{p},$$

wo die Function φ_i in x_i vom Grade 0 ist.

Sind zwei benachbarte Glieder P, Q der Reihe gegeben, welche nicht durch p theilbar sind, so findet man das auf Q folgende Glied R folgendermassen. Es sei

$$P \equiv a_0 x_i^\mu + a_1 x_i^{\mu-1} + \dots + a_\mu \pmod{p}$$

$$Q \equiv b_0 x_i^\nu + b_1 x_i^{\nu-1} + \dots + b_\nu \pmod{p},$$

wo a_0, b_0 nicht durch p theilbar sind. Man darf annehmen, dass $\mu \geq \nu$ ist, da diese Bedingung bei den ersten zwei Gliedern der Reihe eventuell durch Vertauschung von A und B herbeigeführt werden kann und bei den späteren Gliedern von selbst erfüllt ist. Man hat dann durch algebraische Division

$$b_0^{\mu-\nu+1} (a_0 x_i^\mu + a_1 x_i^{\mu-1} + \dots + a_\mu) = \Gamma (b_0 x_i^\nu + b_1 x_i^{\nu-1} + \dots + b_\nu) + \Re,$$

wo \Re ganzzahlig ist und in x_i den Grad ν nicht erreicht. Geht der Ausdruck \Re nach Ersetzung aller seiner Coëfficienten durch ihre kleinsten nicht negativen Reste in Bezug auf den Modul p in R über, so wird

$$b_0^{\mu-\nu+1} P \equiv \Gamma Q + R \pmod{p}.$$

Bestimmt man in der dargelegten Weise zuerst aus den beiden ersten Gliedern A, B der Reihe das dritte Glied C , hierauf, wofern C noch nicht $\equiv 0$ ist, aus B und C das vierte Glied D u. s. f., so gelangt man nach einigen Schritten zu der Function 0, da die Gradzahlen der Functionen B, C, \dots in Bezug auf x_i eine fallende Reihe bilden, und die gesuchte Reihe ist gebildet.

Gibt es nun für zwei benachbarte Functionen Q, R der Reihe (2) zwei nicht durch p theilbare und x_i nicht enthaltende Functionen χ_i, ω_i von der Art, dass die Producte $\chi_i Q, \omega_i R$ in Bezug auf den Modul p durch die vorletzte Function M der

Reihe theilbar sind, so findet dasselbe für die Functionen P und Q statt, wenn P der Function Q in der Reihe (2) unmittelbar vorangeht. Denn man hat

$$\varphi_i P \equiv \Gamma Q + R \pmod{p}$$

und daher auch

$$\begin{aligned} \omega_i \chi_i \varphi_i P &\equiv \Gamma \omega_i \chi_i Q + \chi_i \omega_i R \pmod{p} \\ &\equiv \Gamma M \pmod{p}. \end{aligned}$$

Da aber die beiden letzten Glieder der Reihe durch M theilbar sind, so gibt es auch zwei nicht durch p theilbare und x_i nicht enthaltende Functionen f_i, g_i von der Art, dass die Producte $f_i A, g_i B$ in Bezug auf den Modul p durch M theilbar sind.

Ist anderseits M durch die zwei benachbarten Functionen Q, R in der Gestalt

$$M = UQ + VR + p\Gamma$$

darstellbar, so findet dasselbe auch für die Functionen P und Q statt, da

$$\begin{aligned} M &\equiv UQ + V(\varphi_i P - \Gamma Q) \pmod{p} \\ &\equiv \varphi_i VP + (U - \Gamma V)Q \pmod{p} \end{aligned}$$

wird. M ist also auch durch die beiden Functionen A und B in derselben Weise darstellbar.

Die vorletzte Function M der Reihe (2) erfüllt mithin alle gewünschten Bedingungen.

V. Zwei Reihen von Functionen

$$A, B, \dots E$$

und

$$A', B', \dots E'$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ sollen kurz gleichstimmig in Bezug auf den Modul p genannt werden, wenn sich für jede Veränderliche x_i und jede Function Φ der ersten Reihe und jede Function Φ' der zweiten Reihe Functionen f_i, f'_i von der Art angeben lassen, dass die auf x_i sich beziehenden Gradzahlen derselben $\equiv 0$ sind und die Producte $f_i \Phi, f'_i \Phi'$ sich beziehungsweise in der Gestalt

$$f_i \Phi \equiv A'_0 A' + B'_0 B' + \dots + E'_0 E' \pmod{p}$$

$$f'_i \Phi' \equiv A_0 A + B_0 B + \dots + E_0 E \pmod{p}$$

darstellen lassen, wo $A_0, B_0, \dots, A'_0, B'_0, \dots$ ganze ganzzahlige Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnen.

Zwei Functionenreihen sind gleichstimmig, wenn sie mit einer und derselben dritten Functionenreihe gleichstimmig sind.

VI. Es gibt immer eine Function T , welche mit einer Reihe gegebener Functionen

$$A, B, \dots, E,$$

die nicht alle durch p theilbar sind, in Bezug auf den Modul p gleichstimmig ist. Die Function T ist bis auf einen Zahlenfactor bestimmt, da jede mit A, B, \dots, E gleichstimmige Function T' auch mit einer bestimmten Function T dieser Art gleichstimmig sein, also in der Beziehung

$$T' \equiv aT \pmod{p}$$

stehen muss. Die Function T geht nach III in allen Functionen A, B, \dots, E in Bezug auf den Modul p auf und ist durch jeden gemeinschaftlichen Theiler dieser Functionen nach p theilbar. Sie wird der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen A, B, \dots, E in Bezug auf den Modul p genannt.

Ist T der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen A, B, \dots, E in Bezug auf den Modul p und

$$A \equiv A_1 T, B \equiv B_1 T, \dots, E \equiv E_1 T \pmod{p},$$

so ist 1 der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen A_1, B_1, \dots, E_1 . Denn aus der Congruenz

$$f_i T \equiv A_0 A + B_0 B + \dots + E_0 E \pmod{p}$$

folgt

$$f_i T \equiv (A_0 A_1 + B_0 B_1 + \dots + E_0 E_1) T \pmod{p}$$

und demzufolge

$$f_i \equiv A_0 A_1 + B_0 B_1 + \dots + E_0 E_1 \pmod{p}.$$

Sind φ, ψ ganze Functionen der Veränderlichen v, \dots , deren Coëfficienten Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n sind und haben die Coëfficienten von φ , von welchen vorausgesetzt wird, dass sie

nicht alle durch p theilbar sind, den grössten gemeinschaftlichen Theiler T in Bezug auf p , so sind die Coëfficienten von $T\psi$ mit denen von $\varphi\psi$ gleichstimmig in Bezug auf den Modul p .

Es seien, um dies darzuthun,

$$A_1, A_2, \dots$$

$$B_1, B_2, \dots$$

$$C_1, C_2, \dots$$

beziehungsweise die Coëfficienten der verschiedenen Potenzproducte der Unbestimmten v, \dots in den Functionen φ, ψ und $\varphi\psi$, P_μ irgend ein Product von μ Coëfficienten von φ und m die Anzahl der Coëfficienten von φ . Es gibt einen Exponenten h von der Art,¹ dass jedes Product $A_\alpha^h B_\beta$ sich als Vielfachsumme aller Producte $P_{h-1} C_\gamma$ darstellen lässt. Ist nun

$$f_i T \equiv \mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \dots + \mathfrak{A}_m A_m \pmod{p},$$

wo f_i die Veränderliche x_i nicht enthält und nicht durch p theilbar ist, so wird

$$f_i^{hm} T^{hm} \equiv (\mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \dots + \mathfrak{A}_m A_m)^{hm} \pmod{p}.$$

Da aber die Potenz

$$(\mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \dots)^{hm}$$

eine Vielfachsumme von Ausdrücken $\mathfrak{B} P_{hm}$ ist, in welchen \mathfrak{B} ein Product von Ausdrücken $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m$ bezeichnet, und da jedes Product P_{hm} die Gestalt $P_{hm-h} A_r^h$ hat, so ist $f_i^{hm} T^{hm} B_\beta$ als Vielfachsumme von Ausdrücken $\mathfrak{B} P_{hm-1} C_\gamma$ und daher auch in der Gestalt

$$T^{hm-1} (\mathfrak{C}_1 C_1 + \mathfrak{C}_2 C_2 + \dots) + p\Gamma$$

darstellbar, wo $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots$ ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Man hat also auch für jedes i

$$f_i^{mh} T B_\beta \equiv \mathfrak{C}_1 C_1 + \mathfrak{C}_2 C_2 + \dots \pmod{p}.$$

¹ L. c.

Andererseits ist C_1 eine Vielfachsumme von Producten $A_\alpha B_\beta$ und somit in der Form

$$T(\mathfrak{B}_1 B_1 + \mathfrak{B}_2 B_2 + \dots) + p\mathfrak{l}'$$

darstellbar, wo $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ ganzzahlige Functionen bezeichnen.

Der Beweis für die Existenz des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf den Modul p lässt sich zunächst für Functionen einer Veränderlichen unmittelbar und dann für Functionen mehrerer Veränderlichen durch den Schluss von n auf $n+1$ führen. Hiebei können die etwa durch p theilbaren Functionen der gegebenen Functionenreihe weggelassen werden.

Es seien also

$$A, B, \dots E$$

gegebene Functionen einer Veränderlichen x .

Besteht die Reihe aus nur einem Gliede A , so ist $T = A$.

Besteht die Reihe aus zwei Functionen A, B , so gibt es nach IV eine Function M , welche den Bedingungen

$$aA \equiv HM \pmod{p}$$

$$bB \equiv KM \pmod{p}$$

$$M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$$

genügt, wo a, b nicht durch p theilbare Zahlen und H, K, A_0, B_0 ganze ganzzahlige Functionen von x bezeichnen. Ist

$$aa' \equiv 1 \quad bb' \equiv 1 \pmod{p},$$

so wird

$$aa'A \equiv A \quad bb'B \equiv B \pmod{p}$$

und daher

$$A \equiv a'HM \pmod{p}$$

$$B \equiv b'KM \pmod{p}.$$

Man kann also $T = M$ setzen.

Bei drei Functionen A, B, C suche man zunächst den grössten gemeinschaftlichen Theiler M zweier Functionen A und B in Bezug auf p und hierauf den von M und C . U. s. f.¹

¹ V. Gauss' Werke, Bd. II, Analysis residuorum, Dedekind, Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen r . Primzahlmodulus, Crêlle, Bd. 54.

Es werde nun angenommen, dass die Existenz des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf p für Functionen von n Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n bereits feststeht. Es ist zu zeigen, wie man den grössten gemeinschaftlichen Theiler T einer gegebenen Reihe A, B, \dots, E von Functionen von $n+1$ Veränderlichen x, x_1, x_2, \dots, x_n in Bezug auf den Modul p finden kann.

Für eine Function A ist $T = A$.

Für zwei Functionen A, B gibt es nach IV eine Function M , welche den Congruenzen

$$\varphi A \equiv \mathfrak{A}M \pmod{p}$$

$$\phi B \equiv \mathfrak{B}M \pmod{p}$$

$$M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$$

genügt, wo φ, ϕ nicht durch p theilbare Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n sind, welche x nicht enthalten. Ist g der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in M in Bezug auf p und $M \equiv gM_1 \pmod{p}$, so sind die Coëfficienten der Potenzen von x in $g\mathfrak{A}$ und $M\mathfrak{A}$ oder φA gleichstimmig, und es ist daher $g\mathfrak{A}$ durch φ in Bezug auf p theilbar. Man kann also

$$g\mathfrak{A} \equiv \varphi \mathfrak{A}_1 \pmod{p}$$

und aus ähnlichen Gründen

$$g\mathfrak{B} \equiv \phi \mathfrak{B}_1 \pmod{p}$$

setzen und hat

$$A \equiv \mathfrak{A}_1 M_1 \pmod{p}$$

$$B \equiv \mathfrak{B}_1 M_1 \pmod{p}.$$

Ist noch f der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der Potenzen von x in \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{B}_1 zusammengekommen und setzt man

$$\mathfrak{A}_1 \equiv fP \quad \mathfrak{B}_1 \equiv fQ \pmod{p}$$

$$fM_1 = T,$$

so wird

$$A \equiv PT \pmod{p}$$

$$B \equiv QT \pmod{p}$$

$$gT \equiv fA_0 A + fB_0 B \pmod{p},$$

(3)

wo alle Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in P und Q zusammengenommen in Bezug auf p den grössten gemeinschaftlichen Theiler 1 haben.

T ist nun der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler von A und B in Bezug auf p . Verfährt man nämlich mit P und Q in Bezug auf x , so wie vorher mit A und B in Bezug auf x , so findet man eine Function U , welche den Congruenzen

$$\begin{aligned} P &\equiv P_0 U \pmod{p} \\ Q &\equiv Q_0 U \pmod{p} \\ g_i U &\equiv P_1 P + Q_1 Q \pmod{p} \end{aligned}$$

genügt, wo g_i nicht durch p theilbar ist und die Veränderliche x nicht enthält. Aus (3) folgt dann

$$\begin{aligned} gT &\equiv fA_0 P_0 TU + fB_0 Q_0 TU \pmod{p} \\ &\equiv \Gamma TU \pmod{p}, \end{aligned}$$

und es ist also

$$g \equiv \Gamma U \pmod{p}.$$

Diese Congruenz zeigt, dass U die Veränderliche x nicht enthält. Dann muss aber U in allen Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in P und Q aufgehen und somit $\equiv 1$ sein. Es ist also

$$g_i \equiv P_1 P + Q_1 Q \pmod{p}$$

und demzufolge auch

$$\begin{aligned} g_i T &\equiv P_1 P T + Q_1 Q T \\ &\equiv P_1 A + Q_1 B \pmod{p}. \end{aligned}$$

Bei drei Functionen A, B, C suche man zunächst den grössten gemeinschaftlichen Theiler M zweier Functionen A, B in Bezug auf p und hierauf den von M und C . U. s. f.

VII. Eine Function wird reductibel oder irreductibel in Bezug auf den Modul p genannt, je nachdem sie in Bezug auf diesen Modul als Product zweier Functionen, welche beide von höherem als dem 0 ten Grade sind, darstellbar ist oder nicht. Die Irreductibilität, beziehungsweise Reductibilität einer gegebenen Function lässt sich immer durch eine endliche Anzahl von Ver-

suchen feststellen, da die Gradzahlen und Coëfficienten jedes etwaigen Theilers einer solchen Function nur eine endliche Anzahl von Werthen haben können.

3.

Unter einer ganzen algebraischen Form des Gattungsbereiches \mathfrak{G} versteht man eine ganze Function von Unbestimmten, in welcher die bei den einzelnen verschiedenen Potenzproducten der Unbestimmten stehenden Coëfficienten ganze algebraische Zahlen von \mathfrak{G} sind.

Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der Norm $N\varphi$ einer ganzen algebraischen Form φ von \mathfrak{G} soll die numerische Norm von φ genannt werden. Eine ganze algebraische Form heisst primitiv, wenn ihre numerische Norm $= 1$ ist.

Von einer ganzen algebraischen Form ψ von \mathfrak{G} soll gesagt werden, dass sie durch eine andere ebensolche Form φ theilbar ist, wenn es eine ganze ganzzahlige primitive Form E von der Art gibt, dass der Quotient $\frac{E\psi}{\varphi}$ eine ganze algebraische Form von \mathfrak{G} ist. Wenn die Form ψ durch φ theilbar ist, so ist jeder einzelne Coëfficient von ψ durch φ theilbar.¹ Zwei Formen heissen absolut äquivalent, wenn jede durch die andere theilbar ist.

Eine ganze algebraische Form φ von \mathfrak{G} heisst irreductibel oder unzerfällbar, wenn es keine ganze algebraische Form von \mathfrak{G} gibt, welche in φ aufgeht und deren numerische Norm kleiner als die von φ und grösser als 1 ist.

Eine ganze algebraische Form φ von \mathfrak{G} wird nach Kronecker² eine Grundform genannt, wenn alle Coëfficienten der Formen

$$\omega_1\varphi, \omega_2\varphi, \dots, \omega_n\varphi$$

als Vielfachsummen der Coëfficienten der Form φ darstellbar sind. Eine nicht identisch verschwindende Grundform kann nicht weniger als n Coëfficienten besitzen.

¹ Festschrift §. 14.

² Ebendasselbst §. 24.

Eine ganze algebraische Form kann nur dann durch eine Grundform theilbar sein, wenn ihre Coëfficienten als Vielfachsummen der Coëfficienten der Grundform darstellbar sind.

Sind

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= c_{11} \omega_1 + c_{21} \omega_2 + \dots + c_{n1} \omega_n \\ \gamma_2 &= c_{12} \omega_1 + c_{22} \omega_2 + \dots + c_{n2} \omega_n \\ . &. \\ \gamma_m &= c_{1m} \omega_1 + c_{2m} \omega_2 + \dots + c_{nm} \omega_n\end{aligned}$$

die Coëfficienten einer Grundform φ und setzt man für jede Combination n^{ter} Classe $\alpha\beta\dots\epsilon$ der Zahlen $1, 2, \dots, m$

$$\begin{vmatrix} c_{1\alpha} c_{1\beta} \dots c_{1\varepsilon} \\ c_{2\alpha} c_{2\beta} \dots c_{2\varepsilon} \\ \dots \dots \dots \dots \\ c_{n\alpha} c_{n\beta} \dots c_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = C_{\alpha\beta\dots\varepsilon},$$

so ist die numerische Norm von φ der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Determinanten $C_{a\beta\dots\varepsilon}$, welche den einzelnen Combinationen $a\beta\dots\varepsilon$ entsprechen.

Es sei h die numerische Norm von φ und man setze

$$N\varphi = hE,$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive Form bezeichnet. Die Quotienten

$$\frac{E\gamma_1}{\varphi}, \frac{E\gamma_2}{\varphi}, \dots, \frac{E\gamma_m}{\varphi}$$

sind dann ganze algebraische Formen von \mathfrak{G} , und es sei

$$\begin{aligned} E\gamma_i &= B_i\varphi \\ &= (b_{1i}\omega_1 + b_{2i}\omega_2 + \dots + b_{ni}\omega_n)\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Da ferner $\omega_i \gamma_x$ sich als Vielfachsumme von $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ darstellen lässt, so ist

$$\omega_i \varphi = \varphi_{i1} \gamma_1 + \varphi_{i2} \gamma_2 + \dots + \varphi_{im} \gamma_m, \quad (4)$$

WO $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{im}$ ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen.

Sind nun

$$\varphi', \varphi'', \dots$$

$$\omega'_i, \omega''_i, \dots$$

$$\gamma'_i, \gamma''_i, \dots$$

$$B'_i, B''_i, \dots$$

die conjugirten Werthe von φ , ω_i , γ_i , B_i , und setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1\alpha} \varphi_{1\beta} \dots \varphi_{1\varepsilon} \\ \varphi_{2\alpha} \varphi_{2\beta} \dots \varphi_{2\varepsilon} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_{n\alpha} \varphi_{n\beta} \dots \varphi_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = \Phi_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_\alpha \gamma_\beta \dots \gamma_\varepsilon \\ \gamma'_\alpha \gamma'_\beta \dots \gamma'_\varepsilon \\ \gamma''_\alpha \gamma''_\beta \dots \gamma''_\varepsilon \\ \dots \dots \dots \dots \end{vmatrix} = \Gamma_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} b_{1\alpha} b_{1\beta} \dots b_{1\varepsilon} \\ b_{2\alpha} b_{2\beta} \dots b_{2\varepsilon} \\ \dots \dots \dots \dots \\ b_{n\alpha} b_{n\beta} \dots b_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta\dots\varepsilon},$$

so wird nach (4)

$$\Omega N\varphi = \Omega \varphi \varphi' \varphi'' \dots$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \omega_1 \varphi, & \omega_2 \varphi, & \dots & \omega_n \varphi \\ \omega'_1 \varphi', & \omega'_2 \varphi', & \dots & \omega'_n \varphi' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega''_1 \varphi'', & \omega''_2 \varphi'', & \dots & \omega''_n \varphi'' \end{vmatrix} \\ &= \Sigma \Phi_{\alpha\beta\dots\varepsilon} \Gamma_{\alpha\beta\dots\varepsilon} \end{aligned}$$

und der Gleichung

$$\Gamma_{\alpha\beta\dots\varepsilon} = \Omega C_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$$

zufolge

$$N\varphi = \Sigma \Phi_{\alpha\beta\dots\varepsilon} C_{\alpha\beta\dots\varepsilon}, \quad (5)$$

wo die Summen über alle Combinationen n^{ter} Classe $\alpha\beta\dots\varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \dots, m$ zu erstrecken sind.

Anderseits ist nach (3)

$$\begin{aligned}
 E^n \Gamma_{\alpha\beta\dots\varepsilon} &= \begin{vmatrix} E\gamma_\alpha, E\gamma_\beta, \dots E\gamma_\varepsilon \\ E\gamma'_\alpha, E\gamma'_\beta, \dots E\gamma'_\varepsilon \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \varphi B_\alpha, \varphi B_\beta, \dots \varphi B_\varepsilon \\ \varphi' B'_\alpha, \varphi' B'_\beta, \dots \varphi' B'_\varepsilon \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} B_\alpha, B_\beta, \dots B_\varepsilon \\ B'_\alpha, B'_\beta, \dots B'_\varepsilon \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} \varphi \varphi' \varphi'' \dots \\
 &= B_{\alpha\beta\dots\varepsilon} \Omega N \varphi
 \end{aligned}$$

und man hat

$$E^n C_{\alpha\beta\dots\varepsilon} = B_{\alpha\beta\dots\varepsilon} N \varphi. \quad (6)$$

Nach (5), (6) sind sowohl die Coëfficienten von $N\varphi$ Vielfachsummen der Determinanten $C_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$ als auch umgekehrt diese Vielfachsummen jener. Die grössten gemeinschaftlichen Theiler der Coëfficienten von $N\varphi$ und der Determinanten $C_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$ fallen daher zusammen.

Jede ganze algebraische Form φ von \mathfrak{G} ist einer linearen Grundform absolut äquivalent. Sind nämlich α, β, \dots die Coëfficienten der Form φ , so braucht man nur eine lineare Form zu bilden, deren Coëfficienten sämtliche Producte

$$\begin{aligned}
 &\omega_1 \alpha, \omega_2 \alpha, \dots \omega_n \alpha \\
 &\omega_1 \beta, \omega_2 \beta, \dots \omega_n \beta \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

sind. Die so gebildete Form ist eine Grundform und hat dieselben Coëfficienten wie die Form

$$(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \dots + s_n \omega_n) \varphi,$$

wenn die Unbestimmten s_1, s_2, \dots, s_n in φ nicht vorkommen, ist also mit dieser Form und daher auch mit φ absolut äquivalent, weil die Form $s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \dots + s_n \omega_n$ primitiv ist.

4.

Ist

$$F(t) = 0$$

die Fundamentalgleichung des Gattungsbereiches \mathfrak{G} , so hat jeder Theiler f von $F(t)$ in Bezug auf den Primzahlmodul p die Gestalt

$$f = a_0 t^v + a_1 t^{v-1} + a_2 t^{v-2} + \dots + a_v,$$

wo a_0 eine nicht durch p theilbare Zahl und a_i in den Unbestimmten u_1, u_2, \dots, u_n ganz, ganzzahlig, homogen und vom Grade i ist. Ist a_0 nicht $\equiv 1$ und $a_0 a' \equiv 1 \pmod{p}$, so ist

$$a' f \equiv t^v + a' a_1 t^{v-1} + \dots + a' a_v$$

und die Function

$$t^v + a' a_1 t^{v-1} + \dots + a' a_v$$

ebenfalls ein Theiler von $F(t)$, durch welchen sich f mittelst der Congruenz

$$f \equiv a_0 (t^v + a' a_1 t^{v-1} + \dots + a' a_v) \pmod{p}$$

ausdrücken lässt. Man erhält daher alle möglichen Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p , wenn man die Theiler von der Form

$$t^v + a_1 t^{v-1} + a_2 t^{v-2} + \dots + a_v$$

aufsucht und jeden derselben mit den Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ multiplicirt.

5.

Es sei $P(t)$ irgend ein irreductibeler Theiler der Function $F(t)$ in Bezug auf den Primzahlmodul p von der Form

$$P(t) = t^v + a_1 t^{v-1} + a_2 t^{v-2} + \dots + a_v \quad (7)$$

und man setze

$$P(t) + p = \varphi(t) \\ u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \dots + u_n \omega_n = u.$$

Es gelten dann folgende Sätze:

I. Die numerische Norm h von $\varphi(u)$ ist eine Potenz von p , deren Exponent $\geq v$ ist.

Man hat

$$F(t) \equiv \Gamma P(t) \pmod{p}$$

und es besteht daher eine Identität von der Form

$$F(t) = \Gamma \varphi(t) + pG(t),$$

wo Γ, G ganze ganzzahlige Functionen von t, u_1, u_2, \dots, u_n bezeichnen. Die Norm von $\varphi(u)$ oder die Resultante von $\varphi(t)$ und $F(t)$ fällt hienach mit der Resultante von $\varphi(t)$ und $pG(t)$ zusammen und hat also die Gestalt $p^v H$, wo H die Resultante von $\varphi(t)$ und $G(t)$ ist. Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten von $\varphi(u)$ ist demnach durch p^v theilbar. Anderseits geht derselbe in dem die Unbestimmten u_1, u_2, \dots, u_n nicht enthaltenden Gliede p^v von $N\varphi(u)$ auf.

II. Es sei $g(t)$ eine ganze ganzzahlige Function von t, u_1, u_2, \dots, u_n und eventuell noch anderen Unbestimmten und $f(t)$ der Rest, welcher bei der Division von $g(t)$ durch P in Bezug auf t bleibt und den Grad v in t nicht erreicht. Ist $f(t)$ nicht durch p theilbar, so ist weder die — in Bezug auf t zu bildende — Resultante S von $g(t)$ und $P(t)$ durch p , noch $g(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar.

Der grösste gemeinschaftliche Theiler von $P(t)$ und $f(t)$ in Bezug auf den Modul p kann nur $= 1$ sein. Denn man kann denselben in der Gestalt

$$t^p + b_1 t^{p-1} + \dots + b_p$$

annehmen, und es muss $p > v$ sein, da $f(t)$ den Grad v in t nicht erreicht. Wäre nun $p > 0$, so wäre P gegen die Annahme reducibel.

Man hat also eine Identität von der Form

$$U = AP(t) + Bf(t) + p\Gamma$$

und daher auch eine solche von der Form

$$U = AP(t) + Bg(t) + pG(t), \quad (8)$$

wo A, B, Γ, G, U ganze ganzzahlige Functionen von t, u_1, u_2, \dots, u_n bezeichnen, deren letzte insbesondere t nicht enthält und nicht durch p theilbar ist.

Aus dieser Identität folgt zunächst, dass die Resultante U^v von U und $P(t)$ in Bezug auf t mit der von $Bg(t) + pG(t)$ und $P(t)$ zusammenfällt und daher der Resultante von Bg und P in Bezug auf den Modul p congruent ist. Bezeichnet also L die Resultante von B und P , so hat man

$$U^v \equiv LS \pmod{p}$$

und es erhellt, dass S nicht durch p theilbar sein kann, weil p nicht in U^v aufgeht.

Aus der Identität (8) folgt ferner, wenn $t = u$ gesetzt wird,

$$U \equiv A(u)P(u) + B(u)g(u) \pmod{p}.$$

Da $\varphi(u)$ in p und $P(u)$ aufgeht, so müsste, wenn $g(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar wäre, auch U durch $\varphi(u)$ theilbar sein und man hätte eine Identität von der Form

$$EU = v \cdot \varphi(u),$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive und v eine ganze algebraische Form bezeichnen. Die Norm $E^n U^n$ von $v\varphi(u)$ müsste dann durch die Norm von $\varphi(u)$ und also auch durch p theilbar sein, was nicht der Fall ist.

Durch Umkehrung schliesst man, dass $f(t)$ durch p theilbar sein muss, wenn entweder die Resultante S durch p oder die Function $g(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar ist, und dass S durch p theilbar sein muss, wenn $\varphi(u)$ in $g(u)$ aufgeht, weil die Resultante einer Function von der Form $\Gamma P(t) + f(t)$ und der Function $P(t)$ durch p theilbar ist, wenn p in $f(t)$ aufgeht.

III. Die Function $P'(t) = \frac{\partial P}{\partial t}$ ist nicht durch p theilbar.

Es sei

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = P_i(t).$$

Da $\varphi(u)$ in den bei den einzelnen Potenzproducten der Unbestimmten u_1, u_2, \dots, u_n in $P(u)$ stehenden Coëfficienten aufgeht, so ist auch die Ableitung

$$\frac{\partial P(u)}{\partial u_i} = \omega_i P'(u) + P_i(u)$$

durch $\varphi(u)$ theilbar und man hat für alle Werthe $1, 2, \dots, n$ von i

$$P'(u)\omega_i + P_i(u) \equiv 0 \pmod{\varphi(u)}. \quad (9)$$

Wäre nun $P'(t)$ durch p theilbar, so wäre $P'(u)$ durch p und also auch durch φu theilbar, und $\varphi(u)$ müsste der vorstehenden Identität zufolge in $P_i(u)$ aufgehen. Nach II müsste dann die Function $P_i(t)$, da sie in t den Grad ν nicht erreicht, durch p theilbar sein. Wenn aber alle Ableitungen

$$P', P_1, P_2, \dots, P_n$$

von P durch p theilbar sind, so ist P einer ganzen ganzzahligen Function

$$\psi(t^p, u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p)$$

in Bezug auf den Modul p congruent, und man hätte die mit der Irreductibilität von P in Widerspruch stehende Congruenz

$$P \equiv \psi(t, u_1, u_2, \dots, u_n)^p \pmod{p}.$$

Nach II ist also auch die Resultante von $P'(t)$ und $P(t)$ nicht durch p theilbar. Bezeichnet R diese Resultante, so besteht eine Identität von der Form

$$R = Q(t)P'(t) + Q_1(t)P(t),$$

wo Q, Q_1 ganze ganzzahlige Functionen von t, u_1, u_2, \dots, u_n sind, und man hat für $t = u$

$$\begin{aligned} R &= Q(u)P'(u) + Q_1(u)P(u) \\ &\equiv Q(u)P'(u) \pmod{\varphi(u)}. \end{aligned}$$

Nach (9) folgt hieraus

$$R\omega_i \equiv -Q(u)P_i(u) \pmod{\varphi(u)}.$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} -Q(t)P_i(t) &= g_i(t) + \Gamma P(t) \\ g_i(t) &= g_{1i} + g_{2i}t + \dots + g_{\nu i}t^{\nu-1}, \end{aligned}$$

wo $g_i(t)$ den bei der Division von $-QP_i$ durch P in Bezug auf t sich ergebenden und den Grad ν in t nicht erreichenden Rest bezeichnet, so wird

$$R\omega_i \equiv g_i(u) \pmod{\varphi u}. \quad (10)$$

IV. Die numerische Norm h von $\varphi(u)$ ist p^ν .

Es sei, wie in III, R die Resultante von P' und P und

$$u^{m-1} = \psi_{m1}\omega_1 + \psi_{m2}\omega_2 + \dots + \psi_{mn}\omega_n,$$

wo $\psi_{m1}, \psi_{m2}, \dots$ ganze ganzzahlige Functionen der Unbestimmten u_1, u_2, \dots bezeichnen. Nach (10) wird

$$Ru^{m-1} - \psi_{m1}g_1(u) - \psi_{m2}g_2(u) - \dots - \psi_{mn}g_n(u) \equiv 0 \pmod{\varphi u},$$

und es folgt hieraus nach II, wenn $m \leq \nu$ ist,

$$Rt^{m-1} - \psi_{m1}g_1(t) - \psi_{m2}g_2(t) - \dots - \psi_{mn}g_n(t) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Setzt man daher

$$e_{\mu m} = \psi_{m1}g_{\mu 1} + \psi_{m2}g_{\mu 2} + \dots + \psi_{mn}g_{\mu n}$$

und versteht unter dem Symbol m_μ die Einheit oder Null, je nachdem m und μ gleich oder ungleich sind, so ist

$$e_{\mu m} \equiv m_\mu R \pmod{p}$$

und demzufolge

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1\nu} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\nu 1} & e_{\nu 2} & \dots & e_{\nu\nu} \end{vmatrix} \equiv R^\nu \pmod{p}.$$

Setzt man aber anderseits für jede Combination ν ter Classe $\alpha\beta \dots \epsilon$ der Zahlen $1, 2, \dots n$

$$\begin{vmatrix} g_{1\alpha} & g_{1\beta} & \dots & g_{1\epsilon} \\ g_{2\alpha} & g_{2\beta} & \dots & g_{2\epsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\nu\alpha} & g_{\nu\beta} & \dots & g_{\nu\epsilon} \end{vmatrix} = G_{\alpha\beta \dots \epsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_{1\alpha} & \psi_{1\beta} & \dots & \psi_{1\epsilon} \\ \psi_{2\alpha} & \psi_{2\beta} & \dots & \psi_{2\epsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{\nu\alpha} & \psi_{\nu\beta} & \dots & \psi_{\nu\epsilon} \end{vmatrix} = \Psi_{\alpha\beta \dots \epsilon},$$

so wird, über alle Combinationen $\alpha\beta\dots\epsilon$ erstreckt,

$$\begin{vmatrix} e_{11}e_{12}\dots e_{1v} \\ e_{21}e_{22}\dots e_{2v} \\ \dots\dots\dots \\ e_{v1}e_{v2}\dots e_{vv} \end{vmatrix} = \Sigma G_{\alpha\beta\dots\epsilon} \Psi_{\alpha\beta\dots\epsilon}$$

und man hat

$$\Sigma G_{\alpha\beta\dots\epsilon} \Psi_{\alpha\beta\dots\epsilon} \equiv R^v \pmod{p}.$$

Diese Congruenz lehrt, dass wenigstens eine der Determinanten $G_{\alpha\beta\dots\epsilon}$ nicht durch p theilbar ist.

Es sei also $\rho\sigma\dots\tau$ eine bestimmte Combination, für welche $G_{\rho\sigma\dots\tau}$ nicht durch p theilbar ist, und man setze zur Abkürzung

$$RG_{\rho\sigma\dots\tau} = H;$$

es seien ferner $\kappa, \lambda, \dots, \mu$ die Stellenzeiger, welche die Zahlen $\rho, \sigma, \dots, \tau$ zu $1, 2, \dots, n$ ergänzen, und

$$\begin{aligned} \pi_1 &= c_{11} \omega_1 + c_{21} \omega_2 + \dots + c_{n1} \omega_n \\ \pi_2 &= c_{12} \omega_1 + c_{22} \omega_2 + \dots + c_{n2} \omega_n \\ &\dots\dots\dots \\ \pi_m &= c_{1m} \omega_1 + c_{2m} \omega_2 + \dots + c_{nm} \omega_n \end{aligned}$$

die Coëfficienten einer mit φu absolut äquivalenten Grundform. Man hat für jeden Stellenzeiger r nach (10)

$$\begin{aligned} R\omega_r - g_{1r} - g_{2r}u - \dots - g_{vr}u^{v-1} &\equiv 0 \\ R\omega_\rho - g_{1\rho} - g_{2\rho}u - \dots - g_{v\rho}u^{v-1} &\equiv 0 \\ \dots\dots\dots \\ R\omega_\tau - g_{1\tau} - g_{2\tau}u - \dots - g_{v\tau}u^{v-1} &\equiv 0 \pmod{\varphi u} \end{aligned}$$

und erhält nach Fortschaffung von $1, u, u^2, \dots, u^{v-1}$

$$\begin{vmatrix} R\omega_r g_{1r} g_{2r} \dots g_{vr} \\ R\omega_\rho g_{1\rho} g_{2\rho} \dots g_{v\rho} \\ \dots\dots\dots \\ R\omega_\tau g_{1\tau} g_{2\tau} \dots g_{v\tau} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\varphi u},$$

oder

$$H\omega_r - RG_{r1\dots\tau} \omega_\rho + \dots \equiv 0 \pmod{\varphi u}.$$

Aus dieser Congruenz folgt, dass der Ausdruck

$$H\omega_r - RG_{rs\dots r}\omega_r + \dots$$

als linear-homogene Function f_r von $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ mit in u_1, u_2, \dots ganzen und ganzzahligen Coëfficienten darstellbar ist.

Es lassen sich also auch, wenn $r = \kappa, \lambda, \dots, \mu$ gesetzt wird, die $n - \nu$ Producte

$$H\omega_\kappa, H\omega_\lambda, \dots, H\omega_\mu$$

und die ν Zahlen

$$\omega_\rho, \omega_\sigma, \dots, \omega_\tau$$

als linear-homogene Functionen von

$$\omega_\rho, \omega_\sigma, \dots, \omega_\tau, f_\kappa, f_\lambda, \dots, f_\mu$$

mit in u_1, u_2, \dots, u_n ganzen und ganzzahligen Coëfficienten darstellen, und es wird demzufolge, wenn die conjugirten Werthe von ω_i, π_i, f_i mit $\omega'_i, \omega''_i, \dots, \pi'_i, \pi''_i, \dots, f'_i, f''_i, \dots$ bezeichnet werden,

$$H^{n-\nu}\Omega = \Gamma \begin{vmatrix} \omega_\rho, \omega_\sigma, \dots, \omega_\tau, f_\kappa, f_\lambda, \dots, f_\mu \\ \omega'_\rho, \omega'_\sigma, \dots, \omega'_\tau, f'_\kappa, f'_\lambda, \dots, f'_\mu \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{vmatrix},$$

wo Γ in u_1, u_2, \dots, u_n ganz und ganzzahlig ist. Nach Multiplication mit p^ν folgt hieraus

$$p^\nu H^{n-\nu}\Omega = \Gamma \begin{vmatrix} p\omega_\rho, p\omega_\sigma, \dots, p\omega_\tau, pf_\kappa, pf_\lambda, \dots, pf_\mu \\ p\omega'_\rho, p\omega'_\sigma, \dots, p\omega'_\tau, pf'_\kappa, pf'_\lambda, \dots, pf'_\mu \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{vmatrix}.$$

Da $\varphi(u)$ in den Zahlen $p\omega_\rho, p\omega_\sigma, \dots, p\omega_\tau$ aufgeht, so sind dieselben Vielfachsummen oder ganzzahlige linear-homogene Functionen $f_\rho, f_\sigma, \dots, f_\tau$ von $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, und man hat, wenn die conjugirten Werthe von f_ρ, f_σ, \dots mit $f'_\rho, f'_\sigma, \dots, f''_\rho, f''_\sigma, \dots$ bezeichnet werden,

$$p^\nu H^{n-\nu}\Omega = \pm \Gamma \begin{vmatrix} f_1, f_2, \dots, f_n \\ f'_1, f'_2, \dots, f'_n \\ \dots \dots \dots \dots \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun

$$f_i = b_{i1}\pi_1 + b_{i2}\pi_2 + \dots + b_{im}\pi_m$$

und für jede Combination n^{ter} Classe $\alpha\beta\dots e$ der Zahlen $1, 2, \dots m$

$$\begin{vmatrix} b_{1\alpha} b_{1\beta} \dots b_{1e} \\ b_{2\alpha} b_{2\beta} \dots b_{2e} \\ \dots \dots \dots \\ b_{n\alpha} b_{n\beta} \dots b_{ne} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta\dots e}$$

$$\begin{vmatrix} c_{1\alpha} c_{1\beta} \dots c_{1e} \\ c_{2\alpha} c_{2\beta} \dots c_{2e} \\ \dots \dots \dots \\ c_{n\alpha} c_{n\beta} \dots c_{ne} \end{vmatrix} = C_{\alpha\beta\dots e}$$

$$\begin{vmatrix} \pi_{\alpha} \pi_{\beta} \dots \pi_e \\ \pi'_{\alpha} \pi'_{\beta} \dots \pi'_e \\ \pi''_{\alpha} \pi''_{\beta} \dots \pi''_e \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} = \Pi_{\alpha\beta\dots e},$$

so wird, über alle Combinationen $\alpha\beta\dots e$ erstreckt,

$$\begin{vmatrix} f_1, f_2, \dots f_n \\ f'_1, f'_2, \dots f'_n \\ f''_1, f''_2, \dots f''_n \end{vmatrix} = \Sigma B_{\alpha\beta\dots e} \Pi_{\alpha\beta\dots e} \\ = \Omega \Sigma B_{\alpha\beta\dots e} C_{\alpha\beta\dots e}$$

und man hat

$$p^{\nu} H^{n-\nu} = \pm \Gamma \Sigma B_{\alpha\beta\dots e} C_{\alpha\beta\dots e}.$$

Da H nicht durch p theilbar ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler h aller Determinanten $C_{\alpha\beta\dots e}$, welcher nach I eine Potenz von p ist, in p^{ν} aufgehen muss. Da aber auch anderseits p^{ν} in h aufgeht, so ist $h = p^{\nu}$.

V. Die Form $\varphi(u)$ ist unzerfällbar.

Es seien ψ, χ irgend zwei ganze algebraische Formen von \mathfrak{G} , deren Product mit $\varphi(u)$ absolut äquivalent ist. Setzt man

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 \omega_1 + \psi_2 \omega_2 + \dots + \psi_n \omega_n \\ \chi &= \chi_1 \omega_1 + \chi_2 \omega_2 + \dots + \chi_n \omega_n \\ \psi_1 g_1(t) + \psi_2 g_2(t) + \dots + \psi_n g_n(t) &= f(t) \\ \chi_1 g_1(t) + \chi_2 g_2(t) + \dots + \chi_n g_n(t) &= f_1(t), \end{aligned}$$

so sind f, f_1 ganze ganzzahlige Functionen, und es wird nach (10)

$$R\psi \equiv f(u) \pmod{\varphi u}$$

$$R\chi \equiv f_1(u) \pmod{\varphi u}$$

und demzufolge

$$R^2\psi\chi \equiv f(u)f_1(u) \pmod{\varphi u}.$$

Da $\psi\chi$ durch $\varphi(u)$ theilbar ist, so folgt hieraus

$$f(u)f_1(u) \equiv 0 \pmod{\varphi u}.$$

Bezeichnet M die Resultante von $f(t)$ und $P(t)$, M_1 die von $f_1(t)$ und $P(t)$, so muss also nach II die Resultante MM_1 von $f(t)$, $f_1(t)$ und $P(t)$ durch p theilbar sein. Dann muss aber p in einer der Functionen M , M_1 und daher auch in $f(t)$ oder $f_1(t)$ aufgehen. Ist etwa

$$f(t) \equiv 0 \pmod{p}$$

so ist $f(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar. Dasselbe gilt dann auch, wenn s eine Unbestimmte bezeichnet, von $(R+ps)\psi$, und es ist also ψ durch $\varphi(u)$ theilbar, weil $R+ps$ eine primitive Form ist. Dann sind aber ψ und $\varphi(u)$ absolut äquivalent, und χ muss die numerische Norm 1 haben.

6.

Man denke sich $F(t)$ in Bezug auf den Primzahlmodul p als Potenzproduct von irreductibelen Functionen

$$P_1, P_2, \dots, P_m$$

von der Form (7) dargestellt, und es sei

$$F(t) \equiv P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m} \pmod{p}. \quad (11)$$

Es ist dann auch identisch

$$F(t) = (P_1 + p)^{\mu_1} (P_2 + p)^{\mu_2} \dots (P_m + p)^{\mu_m} - p\Theta(t),$$

wo $\Theta(t)$ eine ganze ganzzahlige Function von t, u_1, u_2, \dots, u_n bezeichnet. Da $F(t)$ für $t = u$ verschwindet, so folgt hieraus

$$p\Theta(u) = (P_1(u) + p)^{\mu_1} (P_2(u) + p)^{\mu_2} \dots (P_m(u) + p)^{\mu_m}. \quad (12)$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Normen, so wird

$$p^n N\Theta(u) = N(P_1(u)+p)^{\mu_1} \cdot N(P_2(u)+p)^{\mu_2} \dots N(P_m(u)+p)^{\mu_m};$$

es ist aber nach 5, IV

$$\begin{aligned} N(P_1(u)+p) &= p^{\nu_1} E_1 \\ N(P_2(u)+p) &= p^{\nu_2} E_2 \\ &\dots \dots \dots \\ N(P_m(u)+p) &= p^{\nu_m} E_m, \end{aligned}$$

wo ν_i den Grad von P_i in t und E_1, E_2, \dots, E_m ganze ganzzahlige primitive Formen von u_1, u_2, \dots, u_n bezeichnen, und nach (11)

$$\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \dots + \mu_m \nu_m = n.$$

Man hat also

$$N\Theta(u) = E_1^{\mu_1} E_2^{\mu_2} \dots E_m^{\mu_m}.$$

Die Form $\Theta(u)$ ist demnach primitiv und die Gleichung (12) liefert eine Zerlegung der Primzahl p in unzerfällbare Formen.

Eine ganze ganzzahlige Function $f(t)$ von t, u_1, u_2, \dots, u_n , welche in t den Grad n nicht erreicht, ist durch p theilbar, wenn $f(u)$ durch p theilbar ist.

Es sei

$$\begin{aligned} P_1(t)+p &= \varphi_1(t) \\ P_2(t)+p &= \varphi_2(t) \\ &\dots \dots \dots \\ P_m(t)+p &= \varphi_m(t) \end{aligned}$$

und

$$\psi(t) = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_m^{\alpha_m}$$

jedes Potenzproduct der irreductibelen Theiler $P_1, P_2 \dots$ von $F(t)$, in welchem die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ beziehungsweise die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ nicht übersteigen. Nennt man den Rest, welcher sich bei der Division einer ganzen Function von t durch $\psi(t)$ in Bezug auf t ergibt und den Grad von $\psi(t)$ in t nicht erreicht, kurz den echten Rest dieser Function in Bezug auf den Theiler $\psi(t)$, so ist der echte Rest von $f(t)$ in Bezug auf alle Functionen $\psi(t)$ durch p theilbar.

Ist nämlich zunächst

$$\psi(t) = P_1,$$

so wird der Congruenz

$$f(u) \equiv 0 \pmod{p}$$

zufolge

$$f(u) \equiv 0 \pmod{\varphi_1(u)}$$

und die Behauptung folgt aus 5, II. Steht ferner die Behauptung bereits für eine bestimmte Function $\psi(t)$ fest, in welcher nicht alle Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ die Grenzen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ erreichen und etwa $\alpha_x < \mu_x$ ist, so gilt sie auch für die Function $\psi(t)P_x$. Es seien $Q(t), R(t)$ der Quotient und echte Rest, welche sich bei der Division von $f(t)$ durch $\psi(t)$ in Bezug auf t ergeben, so dass identisch

$$f(t) = Q(t)\psi(t) + R(t)$$

ist. Man hat dann, da R nach der Annahme durch p theilbar ist,

$$f(t) \equiv Q(t)\varphi_1(t)^{\alpha_1}\varphi_2(t)^{\alpha_2}\dots\varphi_m(t)^{\alpha_m} \pmod{p}$$

und erhält für $t = u$

$$Q(u)\varphi_1(u)^{\alpha_1}\varphi_2(u)^{\alpha_2}\dots\varphi_m(u)^{\alpha_m} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da aber p nach (12) durch

$$\varphi_x(u) \cdot \varphi_1(u)^{\alpha_1}\varphi_2(u)^{\alpha_2}\dots\varphi_m(u)^{\alpha_m}$$

theilbar ist, so muss $\varphi_x(u)$ in $Q(u)$ aufgehen. Bezeichnet also $R_1(t)$ den echten Rest von $Q(t)$ in Bezug auf den Theiler P_x , so geht p nach 5, II in $R_1(t)$ und also auch in dem echten Rest

$$R_1(t)\psi(t) + R(t)$$

von $f(t)$ in Bezug auf den Theiler ψP_x auf.

Es muss daher auch der echte Rest von $f(t)$ in Bezug auf den Theiler

$$P_1^{\mu_1}P_2^{\mu_2}\dots P_m^{\mu_m}$$

durch p theilbar sein. Dieser Rest ist aber $f(t)$ selbst.

7.

Es sei Δ die Discriminante von $F(t)$ und

$$\Delta = Q(t)F'(t) + Q_1(t)F(t) \tag{13}$$

die Identität, welcher sie genügt und in welcher Q, Q_1 ganze ganzzahlige Functionen von $t, u_1, u_2, \dots u_n$ sind. Differentiirt man die in $u_1, u_2, \dots u_n$ identische Gleichung

$$F(u) = 0$$

nach u_i und bezeichnet zu diesem Ende die Ableitung $\frac{\partial F(t)}{\partial u_i}$ mit $F_i(t)$, so ergibt sich

$$F'(u)\omega_i + F_i(u) = 0. \quad (14)$$

Setzt man daher

$$-Q(t)F_i(t) = f_i(t) + \Gamma F(t),$$

wo f_i in t den Grad n nicht erreicht, so hat man für $t = u$

$$\begin{aligned} \Delta &= Q(u)F'(u) \\ -Q(u)F_i(u) &= f_i(u) \end{aligned}$$

und daher nach (14)

$$\Delta\omega_i = f_i(u).$$

Ist nun h der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coefficienten von Δ und

$$\Delta = hE,$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive Form von $u_1, u_2, \dots u_n$ bezeichnet, so wird

$$E\omega_i = \frac{1}{h}f_i(u).$$

Da hienach $\frac{1}{h}f_i(u)$ eine ganze algebraische Form von \mathfrak{G} ist, so ist $f_i(u)$ durch alle Primfactoren von h theilbar. Dasselbe muss also nach 6 auch mit $f_i(t)$ der Fall sein und man kann

$$f_i(t) = h\psi_i(t)$$

setzen, wo $\psi_i(t)$ ganz und ganzzahlig in $t, u_1, u_2, \dots u_n$ ist. Es wird dann

$$E\omega_i = \psi_i(u). \quad (15)$$

8.

Es sei, wie in 5, IV,

$$u^{n-1} = \psi_{m1}\omega_1 + \psi_{m2}\omega_2 + \dots + \psi_{mn}\omega_n$$

und

$$\Sigma \pm \psi_{11}\psi_{22} \dots \psi_{nn} = \Psi;$$

es bezeichne ferner Δ die Discriminante von $F(t)$, D die des Gattungsbereiches \mathfrak{G} und Π das Differenzen- oder alternirende Product der conjugirten Functionen

$$u, u', u'', \dots u^{(n-1)}.$$

Man hat

$$\Pi = \Psi \Omega$$

$$D = \Omega^2$$

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Pi^2$$

und demzufolge

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D \Psi^2. \quad (16)$$

Anderseits ergibt sich aus (15), wenn

$$\psi_i(t) = a_{i1} + a_{i2}t + a_{i3}t^2 + \dots + a_{in}t^{n-1}$$

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = A$$

gesetzt wird,

$$E^n \Omega = \begin{vmatrix} \psi_1(u), & \psi_2(u), & \dots & \psi_n(u) \\ \psi_1(u'), & \psi_2(u'), & \dots & \psi_n(u') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= A \Pi,$$

und es wird

$$E^{2n} D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Delta A^2. \quad (17)$$

Aus (16) und (17) folgt

$$E^{2n} = A^2 \Psi^2,$$

und es muss also Ψ eine primitive Form sein.

Nach Kronecker's Festschrift blieb es unentschieden, ob Ψ Theiler zulässt, welche in der Reihe $2, 3, \dots n-2$ enthalten sind und in D aufgehen.¹

9.

Sind $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$ die Exponenten, welche in der Zerlegung von $F(t)$ in irreductibele Factoren

$$F(t) \equiv P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m} \pmod{p}$$

in Bezug auf den Primzahlmodul p auftreten, so stimmen dieselben genau mit den Exponenten überein, welche bei der Zerlegung (12) von p in unzerfällbare Formen des Gattungsbereiches \mathfrak{G} oder nach H. Dedekind's Auffassung bei der Zerlegung von p in Primideale vorkommen.

Es ist leicht zu zeigen, dass unter den genannten Exponenten dann und nur dann solche vorkommen, welche > 1 sind, wenn p in der Discriminante D des Gattungsbereiches aufgeht.

Man hat nach (13), (16)

$$\Delta = \pm D\Psi^2 = Q(t)F'(t) + Q_1(t)F(t).$$

Ist nun

$$F(t) \equiv H(t)P^2(t) \pmod{p},$$

wo P einen irreductibelen Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p bezeichnet, so hat man

$$F'(t) \equiv (2HP' + HP)P \pmod{p}$$

und daher

$$\pm D\Psi^2 \equiv (QHP + 2QHP' + Q_1HP)P \pmod{p}.$$

Weil aber $D\Psi^2$ die Veränderliche t nicht enthält, so folgt hieraus

$$D\Psi^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

und infolge der Primitivität von Ψ

$$D \equiv 0 \pmod{p}.$$

¹ Vergl. Dedekind, Über die Discriminanten endlicher Körper. Abh. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, Bd. XXIX.

Ist umgekehrt D durch p theilbar, P ein irreductibeler Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p und

$$F(t) \equiv \Gamma P \pmod{p},$$

so kann Γ nicht $\equiv 1$ sein. Denn es wäre dann $F' \equiv P' \pmod{p}$ und daher Δ der Resultante von P' und P in Bezug auf p congruent. Diese Resultante müsste daher durch p theilbar sein, was nicht der Fall ist. Zerlegt man also F in irreductibele Factoren $P_1, P_2, P_3 \dots$ in Bezug auf den Modul p , so ist die Anzahl derselben wenigstens $= 2$ und aus den Congruenzen

$$F \equiv P_1 P_2 \dots \pmod{p}$$

$$F' \equiv P'_1 P_2 P_3 \dots + P'_2 P_1 P_3 \dots + \dots \pmod{p}$$

folgt, dass $\pm \Delta$ nach dem Modul p dem Producte der Resultanten von P_1 und P'_1 , von P_2 und P'_2 u. s. w. in die Quadrate der Resultanten von P_1 und P_2 , P_1 und P_3 u. s. w. congruent ist. Da aber p in Δ aufgeht, in den Resultanten von P_1 und P'_1 , P_2 und P'_2 u. s. w. aber nicht, so muss eine der Resultanten von P_1 und P_2 , P_1 und P_3 u. s. w. durch p theilbar sein. Es sei etwa die von P_1 und P_2 durch p theilbar. Die Function P_2 muss dann nach 5, II durch P_1 nach dem Modul p theilbar sein und demzufolge mit P_1 zusammenfallen, da sie irreductibel ist. $F(t)$ lässt also den Theiler P_1 mindestens zweimal zu.

10.

Ich will hier noch den Fermat'schen Satz für eine unzerfällbare Form des Gattungsbereiches \mathfrak{G} beweisen. Jede solche Form ist einer Form $P(u) + p$ absolut äquivalent, wo p eine Primzahl und $P(t)$ einen irreductibelen Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p bezeichnen. Man setze, wie in (5)

$$P(t) + p = \varphi(t)$$

und bezeichne den Grad von $P(t)$ in t mit ν .

Es sei

$$u_1 \omega_1^{p^\nu} + u_2 \omega_2^{p^\nu} + \dots + u_n \omega_n^{p^\nu} = \varphi_\nu$$

und man bezeichne die Functionen, welche aus $\varphi_x, P(t)$ hervorgehen, wenn man $u_1, u_2, \dots u_n$ der Reihe nach durch $u_1^m, u_2^m, \dots u_n^m$ ersetzt, mit $\varphi_x^{(m)}, P^{(m)}(t)$. Setzt man

$$P(\varphi_x) = \gamma \mathfrak{P} + \gamma_1 \mathfrak{P}_1 + \dots,$$

wo $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \dots$ verschiedene Potenzproducte der Unbestimmten u_1, u_2, \dots und γ, γ_1, \dots ganze algebraische Zahlen von \mathfrak{G} sind, so ergibt sich einerseits

$$P^{(x)}(\varphi_x^{(x)}) = \gamma \mathfrak{P}^{p^x} + \gamma_1 \mathfrak{P}_1^{p^x} + \dots$$

und anderseits

$$P^{p^x}(u) \equiv P^{(x)}(u^{p^x}) \equiv P^{(x)}(\varphi_x^{(x)}) \pmod{p}.$$

Es ist also $P^{(x)}(\varphi_x^{(x)})$ durch $\varphi(u)$ theilbar. Dasselbe muss dann auch wegen der Verschiedenheit der Potenzproducte $\mathfrak{P}^{p^x}, \mathfrak{P}_1^{p^x}, \dots$ von den Coëfficienten γ, γ_1, \dots und also auch von $P(\varphi_x)$ gelten. Hienach hat die Congruenz

$$P(t) \equiv 0 \pmod{\varphi(u)}$$

die Wurzeln

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

Eine solche Congruenz kann aber nicht mehr als ν in Bezug auf $\varphi(u)$ incongruente Wurzeln haben. Sind nämlich

$$x_1, x_2, \dots x_{\nu+1}, v_0, v_1, \dots v_\nu$$

Unbestimmte und setzt man

$$\begin{aligned} (t-x_1)(t-x_2) \dots (t-x_{\nu+1}) &= (t-x_i) \pi_i(t) \\ v_0 + v_1 t + \dots + v_\nu t^\nu &= f(t) \\ (x_1-x_2)(x_1-x_3) \dots (x_1-x_{\nu+1}) \\ (x_2-x_3) \dots (x_2-x_{\nu+1}) \\ &\dots (x_\nu-x_{\nu+1}) = \Theta \\ &= \pi_i(x_i) \Theta_i, \end{aligned}$$

so ist nach der Lagrange'schen Interpolationsformel

$$\Theta f(t) = \Theta_1 f(x_1) \pi_1(t) + \Theta_2 f(x_2) \pi_2(t) + \dots + \Theta_{\nu+1} f(x_{\nu+1}) \pi_{\nu+1}(t).$$

Setzt man in dieser Identität

$$x_1 = \varphi_0, x_2 = \varphi_1, \dots x_{v+1} = \varphi_v \\ f(t) = P(t),$$

so ergibt sich, dass das Product

$$(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2) \dots (\varphi_v - \varphi_{v+1}) P(t)$$

und daher auch der Coëfficient

$$(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2) \dots (\varphi_v - \varphi_{v+1})$$

von t' in demselben durch $\varphi(u)$ theilbar sein muss. Dann muss aber wegen der Unzerfällbarkeit von $\varphi(u)$ eine der Differenzen

$$\varphi_0 - \varphi_1, \varphi_0 - \varphi_2, \dots \varphi_v - \varphi_{v+1}$$

durch $\varphi(u)$ theilbar sein.

Ist φ_r die erste Function der Reihe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, welche einer vorhergehenden Function φ_i nach dem Modul $\varphi(u)$ congruent ist, so hat man

$$\begin{aligned} (\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2) \dots (\varphi_0 - \varphi_r)]^{p^i} &\equiv (\varphi_0^{p^i} - \varphi_1^{p^i})(\varphi_0^{p^i} - \varphi_2^{p^i}) \dots (\varphi_0^{p^i} - \varphi_r^{p^i}) \\ &\equiv (\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)})(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+2}^{(i)}) \dots \\ &\dots (\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+r}^{(i)}) \pmod{p}. \end{aligned} \quad (18)$$

Aus der Congruenz

$$\varphi_r \equiv \varphi_i \pmod{\varphi(u)}$$

folgt aber

$$\varphi_r^{(i)} \equiv \varphi_i^{(i)} \pmod{\varphi(u)}$$

und also auch

$$(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)})(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+2}^{(i)}) \dots (\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+r}^{(i)}) \equiv 0 \pmod{\varphi(u)}.$$

Nach (18) wird dann

$$[(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2) \dots (\varphi_0 - \varphi_r)]^{p^i} \equiv 0 \pmod{\varphi(u)},$$

und es muss demzufolge

$$\varphi_0 - \varphi_r \equiv 0 \pmod{\varphi(u)}$$

oder $i = 0$ sein.

Setzt man

$$(t - \varphi_0)(t - \varphi_1) \dots (t - \varphi_{r-1}) = L(t)$$

und entwickelt $L(t)$ nach Potenzproducten $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \dots$ der Veränderlichen t, u_1, u_2, \dots, u_n , so ergibt sich

$$L(t) = \gamma \mathfrak{P} + \gamma_1 \mathfrak{P}_1 + \dots,$$

wo γ, γ_1, \dots ganze algebraische Zahlen von \mathfrak{G} bezeichnen. Nun ist einerseits

$$\begin{aligned} L(t)^p &\equiv (t^p - \varphi_0^p)(t^p - \varphi_1^p) \dots (t^p - \varphi_{r-1}^p) \pmod{p} \\ &\equiv (t^p - \varphi_1^{(1)})(t^p - \varphi_2^{(1)}) \dots (t^p - \varphi_r^{(1)}) \pmod{p} \\ &\equiv (t^p - \varphi_0^{(1)})(t^p - \varphi_1^{(1)}) \dots (t^p - \varphi_{r-1}^{(1)}) \pmod{\varphi u} \\ &\equiv \gamma \mathfrak{P}^p + \gamma_1 \mathfrak{P}_1^p + \dots \pmod{\varphi u} \end{aligned}$$

und anderseits

$$L(t)^p \equiv \gamma^p \mathfrak{P}^p + \gamma_1^p \mathfrak{P}_1^p + \dots \pmod{p}.$$

Hieraus folgt

$$0 \equiv (\gamma^p - \gamma) \mathfrak{P}^p + (\gamma_1^p - \gamma_1) \mathfrak{P}_1^p + \dots \pmod{\varphi u},$$

und man hat wegen der Verschiedenheit der Potenzproducte $\mathfrak{P}^p, \mathfrak{P}_1^p, \dots$

$$\gamma^p - \gamma \equiv 0, \gamma_1^p - \gamma_1 \equiv 0, \dots \pmod{\varphi u}.$$

Da aber

$$\gamma^p - \gamma \equiv \gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2) \dots (\gamma - p + 1) \pmod{p}$$

ist, so wird

$$\gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2) \dots (\gamma - p + 1) \equiv 0 \pmod{\varphi u},$$

und es muss γ einer gewöhnlichen Zahl nach dem Modul $\varphi(u)$ congruent sein. Dasselbe gilt von γ_1 und allen Coëfficienten von $L(t)$. Das Product $L(t)$ ist daher einer ganzen ganzzahligen Function $g(t)$ von t, u_1, u_2, \dots, u_n von der Form

$$t^r + b_1 t^{r-1} + \dots + b_r$$

in Bezug auf $\varphi(u)$ congruent.

Da die Differenz $P(t) - t^{\nu-r}g(t)$ in t den Grad ν nicht erreicht und für $t = u$ durch $\varphi(u)$ theilbar wird, so ist sie nach 5, II durch p theilbar und man hat

$$P(t) \equiv t^{\nu-r}g(t) \pmod{p}.$$

Die Irreductibilität von P erfordert dann, dass $r = \nu$ ist, und es wird

$$g(t) \equiv P(t) \pmod{p}.$$

Hienach ist für jeden Stellenzeiger i

$$\omega_i^{p''} \equiv \omega_i \pmod{\varphi u}$$

und daher auch für jede ganze algebraische Zahl

$$\gamma = g_1\omega_1 + g_2\omega_2 + \dots + g_n\omega_n$$

des Gattungsbereiches \mathfrak{G}

$$\begin{aligned} \gamma^{p''} &\equiv g_1^{p''}\omega_1^{p''} + g_2^{p''}\omega_2^{p''} + \dots + g_n^{p''}\omega_n^{p''} \pmod{p} \\ &\equiv g_1\omega_1^{p''} + g_2\omega_2^{p''} + \dots + g_n\omega_n^{p''} \pmod{p} \\ &\equiv g_1\omega_1 + g_2\omega_2 + \dots + g_n\omega_n \pmod{\varphi u} \\ &\equiv \gamma \pmod{\varphi u}. \end{aligned}$$

II. SITZUNG VOM 11. JÄNNER 1894.

Das k. k. Finanzministerium übermittelt ein Exemplar der von demselben verfassten Tabellen zur Währungs-Statistik.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Pflanzenphysiologische Mittheilungen aus Buitenzorg.« I. II.

Herr Professor Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Herr Prof. Dr. J. Finger in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind«.

Die Herren Professoren Dr. J. Mauthner und Dr. W. Suida in Wien übersenden eine gemeinsam ausgeführte Arbeit unter dem Titel: »Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins« (I. Abhandlung).

Herr Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz übersendet als Anhang zu seiner Abhandlung: »Tetrationelliden der Adria« eine Mittheilung über die Lithistiden.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts-Laboratorium in Wien von den

Herren Dr. J. Herzig und Th. v. Smoluchowski ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss des Aurins«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen«.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht den fünften und zugleich letzten vorläufigen Bericht über die im verflossenen Sommer von ihm ausgeführten erdmagnetischen Messungen.

Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs

(V. und letzter vorläufiger Bericht)

von

J. Liznar.

Mit dieser Mittheilung schliesst die Reihe der vorläufigen Berichte, welche ich über die von mir in Cisleithanien ausgeführten erdmagnetischen Messungen seit 1889 veröffentlicht habe. Sie enthält die Werthe der erdmagnetischen Elemente, welche aus den Messungen des verflossenen Sommers resultiren. Während des Zeitraumes vom 15. Juni bis 14. September 1893 habe ich 21 Stationen besucht und an jeder derselben, genau so wie in den früheren Jahren, 5 Declinations-, 10 Intensitäts- und 10 Inclinations-Messungen ausgeführt. Von diesen 21 Stationen liegen 2 in Nieder-Österreich, 10 in Steiermark, 3 in Kärnten, 3 in Krain und 3 in Istrien. Die Station Triest, wo bereits Laschober und Kesslitz beobachtet haben, wurde von mir nur deshalb gewählt, um mit ihnen nebst Pola noch einen zweiten Punkt gemeinsam zu haben.

Die Beobachtungen geschahen mit denselben Instrumenten und nach denselben Methoden wie in den Vorjahren. Eine besondere Sorgfalt habe ich auch diesmal auf die Vergleichung der Reiseinstrumente verwendet, da eine strenge Vergleichbarkeit der erhaltenen Resultate nur dann erzielt wird, wenn eine etwaige Änderung in den Angaben der Reiseinstrumente in Rechnung gebracht werden kann. Um die Beobachtungsergebnisse, welche von dem leider bereits verstorbenen Fregatten-Capitän Laschober und den Herren Linienschiffsleutnant Kesslitz

und Linienschiffsfähnrich von Schluet an den Küsten der Adria und in Bosnien und der Herzegowina erhalten worden sind, mit den meinigen verbinden zu können, habe ich mich nicht damit begnügt, dass ihre Reiseinstrumente mit den von mir bei den Reisebeobachtungen verwendeten in Wien verglichen worden sind, sondern ich habe auch am k. und k. hydrographischen Amte in Pola die Vergleichen wiederholt. Bei dieser Arbeit haben mich die Herren Schiffslieutenant Kesslitz und Schiffsfähnrich von Schluet in liebenswürdigster Weise unterstützt, wofür ich ihnen meinen verbindlichsten Dank sage. Zum besonderen Danke hat mich der Director des k. und k. hydrographischen Amtes Herr R. Müller verpflichtet, da er in freundlichster Weise die Benützung der Beobachtungsräume und der Instrumente gestattet hat. Auf die Resultate der vielen Vergleichsbeobachtungen, welche ich während der fünf Beobachtungsjahre ausgeführt habe, werde ich in der später erscheinenden ausführlichen Publication meiner Messungen zurückkommen. Das Eine kann ich aber jetzt schon sagen, dass eine nennenswerthe Änderung in den Angaben der Instrumente nicht stattgefunden hat, was der guten Verpackung und dem sorgfältigen Transporte derselben zugeschrieben werden muss.

Die am Schlusse folgenden Tabellen enthalten nebst den geographischen Coordinaten die Werthe der erdmagnetischen Elemente, und zwar stehen in Tabelle II unter D (1890) die von mir beobachteten und auf das »Augustmittel 1890« reducirten Werthe der Declination; die entsprechenden Werthe der Horizontalintensität findet man in Tabelle III unter H (1890). Die Inclination unter J (1890) in Tabelle IV ist zwar nicht auf die angegebene Epoche reducirt, doch beträgt der Unterschied der daselbst angeführten Werthe gegen die reducirten kaum drei Minuten. Unter D_1 (1850), H_1 (1850) und J_1 (1850) sind die von Kreil nach seinen Beobachtungen auf die Epoche 1850·0 reducirten Daten beigesetzt. Die dritte Zahlencolumne enthält die Differenz meiner und Kreil's Werthe.

Die Unregelmässigkeit der Differenzen ist, wie auch an den früheren Stationen, bei der Declination am grössten, weil Kreil's Werthe nicht hinreichend genau sind. Wenn man z. B.

die Declination von Laibach und Rudolfswert vergleicht, so ergeben meine Messungen eine Differenz von $17'2''$, während aus jenen Kreil's ein Unterschied von $1^\circ 4'2''$ folgt. Betrachtet man eine Isogonenkarte, so sieht man sogleich, dass nach der Lage der beiden Orte die Differenz unmöglich so gross sein könne, wie sie die Messungen Kreil's ergaben, wenn nicht ein bedeutender localer Einfluss vorhanden ist. Auch die Daten des Stationspaares Admont-Eisenerz zeigen, dass Kreil's Werthe mit bedeutenden Unsicherheiten behaftet sind. Während nach seinen Beobachtungen die Declination in Eisenerz um mehr als $\frac{1}{4}^\circ$ grösser ist als in Admont, zeigen meine Werthe gerade umgekehrt die Declination in Eisenerz um $11'$ kleiner als in Admont, was auch der Lage der Stationen gegeneinander entspricht, da Admont westlicher liegt als Eisenerz. Einige Gründe für die Unsicherheit der Declinationswerthe Kreil's habe ich in meinen letzten zwei Berichten angeführt, hier möchte ich nur noch erwähnen, dass an mancher Station der Aufstellungsort local beeinflusst gewesen sein dürfte.

Relativ viel genauer sind die Messungen der Horizontalintensität und der Inclination, obwohl gerade das letzte Element viel schwieriger zu bestimmen ist als die Declination. Bei den letzt erwähnten Elementen kann man daher auch aus den Differenzen der Werthe für 1850 und 1890 eine gesetzmässige Abhängigkeit der secularen Änderung von der geographischen Lage erkennen, während dies bei der Declination nicht möglich ist. Da ich bei der Bearbeitung des neuen Beobachtungsmaterials die Verhältnisse ausführlicher zu besprechen gedenke, so mögen hier die wenigen Andeutungen genügen.

Meine nächste Aufgabe wird es nun sein, eine detaillirte Darstellung der von mir an 108 Orten ausgeführten Messungen zu geben. Eine endgiltige Verarbeitung aller Daten kann ich aber erst dann vornehmen, wenn mir auch die Beobachtungsergebnisse von Ungarn, wo seit 1892 der Vicedirector der königl. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Budapest Herr Ignaz Kurländer Messungen vornimmt, zur Verfügung stehen werden.

Nach den neuen Daten werden wir im Grossen und Ganzen ein richtiges Bild über die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft

in Österreich-Ungarn erhalten. Die Anzahl der Stationen ist jedoch viel zu klein, um auch eine Darstellung der Störungsgebiete geben zu können; dies muss einer späteren Zeit vorbehalten werden, wo es möglich sein wird, wenigstens über die Störungsgebiete ein dichtes Stationsnetz zu ziehen. Frankreich ist in dieser Beziehung mit gutem Beispiel vorangegangen; es wäre zu wünschen, dass andere Staaten demselben folgen möchten.

Jetzt nachdem ich der übernommenen Verpflichtung mit grösster Gewissenhaftigkeit nachgekommen bin, kann ich mit grosser Befriedigung auf die erhaltenen Resultate blicken, und selbst die Erinnerung an die vielen Strapazen und Widerwärtigkeiten der Reisezeit ist nicht im Stande, dies erhebende Gefühl herabzudrücken. Berücksichtigt man, dass ich jeden nothwendigen Schritt selbst thun und jede Zahl selbst beobachten oder berechnen musste, so wird man mir das Zeugniß nicht versagen können, dass ich mit Aufgebot meiner ganzen physischen und moralischen Kräfte an der Lösung der Aufgabe gearbeitet habe. Man wird mir aber auch nicht verübeln, wenn ich dem Wunsche Ausdruck gebe, dass solche Arbeiten in Fachkreisen eine bessere Anerkennung finden möchten als dies bisher der Fall war. Sie gebührt ihnen in um so höheren Masse, da sie Daten von bleibendem Werthe liefern, welche wichtige Bausteine für eine aufzubauende Theorie des Erdmagnetismus bilden.

Zum Schlusse kann ich es nicht unterlassen, der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, welche nicht nur die Ausführung der neuen magnetischen Aufnahme in Cisleithanien ermöglicht, sondern auch ihre Ausdehnung auf Ungarn befürwortet hat, den ehrerbietigsten Dank auszusprechen für das Vertrauen, welches sie in meine Leistungsfähigkeit gesetzt hat. Meinem hochverehrten Vorstande, Herrn Hofrath Prof. Dr. Hann, bin ich aber zu tiefstem Danke verpflichtet, dass er mich mit der Ausführung der Messungen betraut hat und mir dadurch Gelegenheit bot, einen kleinen Beitrag zur Erforschung der physikalischen Verhältnisse des Vaterlandes liefern zu können. Mein wärmster Dank gebührt endlich allen k. k. Behörden und jenen Herren, welche zur Förderung meiner Arbeit beigetragen haben.

I. Geographische Coordinaten der magnetischen Stationen (der Beobachtungspunkte).

Nr.	Station	φ	λ E v. Gr.
1	Wr. Neustadt	47° 48' 4	16° 15' 7
2	Schottwien	47 39' 4	15 52' 5
3	Bruck a./M.	47 24' 8	15 16' 3
4	Aflenz	47 32' 7	15 14' 7
5	Liezen	47 34' 2	14 14' 8
6	Admont	47 35' 1	14 27' 8
7	Eisenerz	47 32' 7	14 53' 9
8	Graz ..	47 4' 8	15 27' 2
9	Gleichenberg.....	46 52' 7	15 54' 5
10	Marburg	46 34' 0	15 38' 2
11	St. Paul	46 41' 8	14 52' 1
12	Gmünd.....	46 54' 3	13 32' 3
13	Klagenfurt.....	46 37' 8	14 18' 3
14	St. Lambrecht.....	47 4' 2	14 18' 2
15	Laibach.....	46 2' 7	14 30' 6
16	Rudolfswert....	45 48' 5	15 10' 0
17	Cilli	46 13' 9	15 15' 2
18	Adelsberg	45 46' 4	14 12' 4
19	Görz	45 57' 8	13 38' 2
20	Triest.....	45 38' 7	13 45' 9
21	Pola	44 51' 8	13 50' 8

II. Declination (West).

Nr.	Station	D (1890)	D_1 (1850)	$D_1 - D$
1	Wr. Neustadt.....	9° 13' 9 ¹	—	—
2	Schottwien	9 31' 0	13° 53' 1	4° 22' 1
3	Bruck a./M.	9 46' 1	13 51' 5	4 5' 4
4	Aflenz	9 43' 3	13 51' 7	4 8' 4
5	Liezen	10 11' 9	14 35' 1	4 23' 2
6	Admont	10 6' 3	14 13' 1	4 6' 8
7	Eisenerz	9 55' 0	14 30' 0	4 35' 0
8	Graz.....	9 37' 4	14 12' 0	4 34' 6
9	Gleichenberg.....	9 13' 5	13 45' 8	4 32' 3
10	Marburg	9 28' 0	13 51' 1	4 23' 1

¹ In Wr. Neustadt hat Kreil nicht beobachtet.

Nr.	Station	D (1890)	D_1 (1850)	$D_1 - D$
11	St. Paul	9° 52'17	14° 18'6	4° 25'19
12	Gmünd.....	10 28·5	15 6·4	4 37·9
13	Klagenfurt.....	10 13·0	14 28·2	4 15·2
14	St. Lambrecht	10 22·9	14 58·6	4 35·7
15	Laibach.....	10 2·7	14 22·8	4 20·1
16	Rudolfswert.....	9 45·5	13 18·6	3 33·1
17	Cilli	9 41·7	13 40·9	3 59·2
18	Adelsberg	10 9·4	13 49·6	3 40·2
19	Görz	10 25·3	13 58·5	3 33·2
20	Triest.....	10 22·7	14 31·8	4 9·1
21	Pola	10 13·1	14 16·0	4 2·9

III. Horizontale Intensität.

Nr.	Station	H (1890) ¹	H_1 (1850)	$H - H_1$
1	Wr. Neustadt.....	2·0800	—	—
2	Schottwien	2·0852	2·0090	0·0762
3	Bruck a./M.	2·0933	2·0158	0·0775
4	Aflenz	2·0830	2·0081	0·0749
5	Liezen	2·0747	1·9944	0·0803
6	Admont	2·0730	2·0046	0·0684
7	Eisenerz	2·0800	2·0086	0·0714
8	Graz	2·1074	2·0380	0·0694
9	Gleichenberg.....	2·1145	2·0453	0·0692
10	Marburg	2·1273	2·0529	0·0744
11	St. Paul	2·1169	2·0454	0·0715
12	Gmünd.....	2·1047	2·0163	0·0884
13	Klagenfurt.....	2·1120	2·0440	0·0680
14	St. Lambrecht	2·0846	2·0197	0·0649
15	Laibach.....	2·1515	2·0707	0·0808
16	Rudolfswert.....	2·1614	2·0759	0·0855
17	Cilli	2·1434	2·0775	0·0659
18	Adelsberg	2·1554	2·0813	0·0741
19	Görz.....	2·1440	2·0687	0·0753
20	Triest.....	2·1602	2·0810	0·0792
21	Pola	2·1922	2·1122	0·0800
22	Rattenberg ²	2·0864	1·9737	0·0927

¹ Die hier mitgetheilten Intensitäten sind um circa 0·0040 zu klein, wie dies auch in den früheren Berichten hervorgehoben wurde.

² Diese Station ist aus Versehen im vorigen Berichte ausgeblieben und wird deshalb hier nachgetragen.

IV. Inclination.

Nr.	Station	$J(1890)$	$J_1(1850)$	$J_1 - J$
1	Wr. Neustadt.....	62° 51' 0	—	—
2	Schottwien	62 46·8	63° 55'	1° 8'
3	Bruck a. M.	62 34·3	63 51	1 17
4	Aflenz	62 46·3	63 54	1 8
5	Liezen	62 54·6	64 9	1 15
6	Admont	62 54·3	64 0	1 6
7	Eisenerz	62 49·1	63 55	1 6
8	Graz.....	62 16·9	63 30	1 13
9	Gleichenberg.....	62 22·7	63 28	1 5
10	Marburg	61 57·1	63 13	1 16
11	St. Paul	62 7·8	63 21	1 13
12	Gmünd.....	62 21·6	63 43	1 21
13	Klagenfurt.....	62 8·8	63 27	1 18
14	St. Lambrecht	62 38·7	63 49	1 10
15	Laibach	61 32·0	62 54	1 22
16	Rudolfswert.....	61 18·6	62 39	1 20
17	Cilli	61 41·3	62 53	1 12
18	Adelsberg	61 23·4	62 44	1 21
19	Görz	61 34·7	62 57	1 22
20	Triest.....	61 18·2	62 44	1 26
21	Pola	60 38·6	62 14	1 35
22	Znaim ¹	63 50	64 48	0 58

¹ In meinem zweiten Berichte steht infolge eines Druckfehlers für $J(1890)$ der Werth 64°50' statt des oben angeführten richtigen. Dass es nur ein Druckfehler ist, kann man aus der Differenz $J_1 - J$ ersehen.

Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

Im Nachfolgenden sollen einige stündliche und zweistündliche meteorologische Aufzeichnungen auf hohen Berggipfeln, die kürzlich zu meiner Kenntniss gelangt sind, einer Discussion unterzogen werden.

Die eine dieser Beobachtungsreihen bezieht sich auf den Gipfel des Ontake in Japan (3055 *m*). Die Ergebnisse derselben sind vom meteorologischen Central-Observatorium in Tokio publicirt worden unter dem Titel: »Meteorological Observations on the Summit of Ontake (Tokio 1893).« Der Text dieser Publication, circa 28 Seiten umfassend, ist leider nur in japanischer Sprache gedruckt,¹ die Zahlentabellen, 40 Seiten (Kleinfolio), haben Aufschriften in englischer und japanischer Sprache.

Die Beobachtungen auf dem Gipfel des Ontake sind zweistündlich gemacht vom 1. August bis 12. September 1891, also durch 43 Tage. Es werden sowohl die Mittel für den Monat August, als auch für die ganze Periode von 43 Tagen mitgetheilt. Die Beobachtungen erstrecken sich auf Luftdruck, Lufttemperatur, deren Maximum und Minimum, Maximum in der Sonne, Minimum unter dem Einfluss der Wärmeausstrahlung,

¹ Die Publication scheint desshalb nicht nach Europa versendet worden zu sein; ich erhielt selbe auf specielles Ansuchen durch die Güte des Directors des Met. Central-Observ. in Tokio, Herrn K. Kobayashi, dem ich hiefür auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

Bodentemperatur an der Erdoberfläche vierstündlich angestellt und in 0·3 *m* Tiefe um 10^h a. und 10^h p., Dampfdruck und relative Feuchtigkeit zweistündlich, Niederschlagsmenge vierstündlich, Windrichtung und Stärke (m. s.), Bewölkung nach Grad und Art, Witterungsverhältnisse gleichfalls zweistündlich.

Als Basisstation diente Kurosawa, das in 830 *m* Seehöhe und 22·5 *km* Entfernung östlich von Ontake liegt. Die Beobachtungen an dieser Station wurden correspondierend und genau nach dem gleichen Schema wie auf dem Gipfel des Ontake angestellt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass zu Kurosawa der Niederschlag in zweistündigen Intervallen gemessen wurde.

Da zudem der »Annual Report of the Central Met. Observatory of Japan for the year 1891, Part I« (Meteorological Observations in Japan) die Resultate stündlicher Aufzeichnungen an zehn Stationen in Japan zwischen 32°48' und 43°20' N. Br. und 130°42' und 145°35' E. von Greenwich enthält, so befindet man sich in der glücklichen Lage, auch von diesen die nächste Station zur Vergleichung herbeiziehen zu können. Die Wissenschaft schuldet der Leitung des meteorologischen Dienstes in Japan gewiss grossen Dank einerseits für die Unternehmung zweistündlicher Beobachtungen auf den Gipfeln der höchsten Berge des Landes¹ und der raschen und ausführlichen Publication der Ergebnisse derselben, anderseits für die Veröffentlichung stündlicher Beobachtungen aller Elemente an so zahlreichen und ziemlich gleichmässig vertheilten Punkten des Landes. Es gibt nur wenige meteorologische Beobachtungsnetze auf der Erde, die sich in ihren Leistungen mit jenen des japanischen Netzes gegenwärtig vergleichen können.

Als zweite und unterste Basisstation habe ich Nagoya gewählt, das südwestlich vom Ontaki in der Owari-Ebene, nahe der See an der Owari-Bai liegt. Die Lage dieser und der beiden anderen Stationen habe ich den Karten entnommen, welche sich im Ergänzungsheft 59 zu Peterm. Geogr. Mitth. (Gotha 1880:

¹ Die Ergebnisse der Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji, 3733 *m*, und des Gozaishogatake, 1201 *m*, habe ich discutirt in diesen Sitzungsberichten, Bd. C, Abth. II. a., December 1891.

»Der Nakasendô in Japan von E.-Knipping u. J. J. Rein«) befinden. Die Seehöhen der Station auf dem Ontake und jener zu Kurosawa habe ich aus den correspondirenden Luftdruck-, Temperatur- und Dampfdruck-Mitteln des August nach Rühlmann's hypsometrischen Tafeln berechnet. Als Basisstationen dienten dabei Kioto und Tokio, zwischen welchen die gedachten Orte liegen.

Ontake	35°54' N. Br.	137°30' E. von Gr.	3055 <i>m</i>
Kurosawa	35 50	137 45	834
Nagoya	35 10	136 55	15

Kurosawa liegt nach der Karte in einem, wie es scheint, ziemlich tiefen Thale am Flusse Kisogawa, Nagoya dagegen liegt am Rande einer ziemlich weiten Ebene an der See. Dies ist für die Beurtheilung der Unterschiede im täglichen Gange der meteorologischen Elemente an diesen beiden Orten von wesentlicher Bedeutung.

Die correspondirenden Mittelwerthe (August 1891) der meteorologischen Elemente dieser drei Stationen sind:

	Luft- druck	Temp.	Dampf- druck	Rel. Feucht.	Regen- menge	Mittlere	
						Windg. ¹	Bewölk.
Ontake	531·80	8·6	6·6	78·5	600	11·7	6·6
Kurosawa	690·36	20·3	14·4	83·0	268	0·9	6·3
Nagoya	758·15	26·1	19·6	79·3	276	2·2	6·1

Die Mittel für die beiden ersten Stationen sind aus den zweistündlichen Beobachtungen, jene von Nagoya aus stündlichen Aufzeichnungen gebildet.

Berechnet man die Seehöhe der beiden ersteren Stationen nach den correspondirenden Mittelwerthen der letzten nach Rühlmann's hypsometrischen Tafeln, so erhält man:

Ontake 3058·5 *m*, Kurosawa 835·9 *m*.

Ich möchte das früher angegebene Resultat der Berechnung nach Kioto—Tokio vorziehen, weil den etwaigen ost-westlichen und nordsüdlichen Druckgradienten dabei mehr

¹ Meter pro Secunde.

Rechnung getragen ist. Gifu, das auch dem Ontake recht nahe liegt ($35^{\circ}27'$, $136^{\circ}46'$, $15\cdot0\text{ m}$), gibt als Seehöhe desselben (respective des Barometers der temporären Station auf demselben) $3056\cdot0\text{ m}$.

Die Ergebnisse der Dampfdruckbeobachtungen auf dem Ontake stimmen genau mit meiner Formel¹ für die Abnahme des Wasserdampfgehaltes mit der Höhe überein, welche bekanntlich lautet:

$$\log e_h = \log e_0 - \frac{h}{6500};$$

e_0 ist in unserem Falle (Mittel Tokio $19\cdot3$, Kioto $19\cdot2$, Nagoya $19\cdot6$) $19\cdot4\text{ mm}$. Daraus erhält man:

Dampfdruck auf dem Ontake berechnet $6\cdot63$, beobachtet $6\cdot62$
 » zu Kurosawa » $14\cdot56$, » $14\cdot42$

Der Dampfdruck auf dem Ontake, berechnet aus den 43-tägigen Beobachtungen zu Kurosawa allein ($e_0 = 14\cdot60$), ergibt sich zu $6\cdot65$, beobachtet wurde $6\cdot78$.

Für den Fujigipfel (3733 m) habe ich nach derselben Formel erhalten $5\cdot43\text{ mm}$ (August 1889 $e_0 = 20\cdot3\text{ mm}$ am Meeresniveau) die Beobachtungen aber haben ergeben $5\cdot49\text{ mm}$.

Man kann also obige Formel als den Ausdruck eines empirischen Gesetzes betrachten, nach welchem unter mittleren Verhältnissen der Dampfdruck mit der Höhe abnimmt.

Bevor wir auf den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, den täglichen Gang der meteorologischen Elemente, näher eingehen, lohnt es sich wohl, noch einige bemerkenswerthe Ergebnisse der correspondirenden Beobachtungen auf dem Gipfel des Ontake und zu Kurosawa hier übersichtlich nebeneinander zu stellen.

	Maximum		Minimum		Differenz
	Luftdruck				
Ontake . . .	536·4	3. IX.	523·8	17. VIII.	12·6
Kurosawa .	694·7	3. IX.	683·5	17. VIII.	11·2

¹ Die Abnahme des Wasserdampfgehaltes in der Atmosphäre mit der Höhe. Zeitschrift für Met., Bd. IX, 1874, S. 193.

	Maximum		Minimum		Differenz
	Temperatur				
Ontake ...	19·2	1. IX.	1·3	19. VIII.	17·9
Kurosawa .	31·2	3. IX.	9·0	27. VIII.	22·2

	Mittlere tägl. Extreme		Differenz	Absolute Extreme		Differenz
Ontake ...	14·7	5·1	9·6	22·0	0·8	21·2
Kurosawa .	28·0	14·9	13·1	32·2	8·4	23·8

Tiefster Stand des der Wärmeausstrahlung ausgesetzten Thermometers:

Ontake26. August —4°8

Kurosawa.....27. August 5·3

Die mittlere Bodentemperatur an der Erdoberfläche war auf dem Ontake 10°1 (Luft 8°6), zu Kurosawa 24°2 (Luft 20°3), die Temperatur in 0·3 *m* Tiefe auf dem Ontake 8°9, der Lufttemperatur sehr nahe kommend. Den täglichen Gang der Temperatur an der Erdoberfläche habe ich auch für die correspondirenden Tage oben und unten (20 an der Zahl) berechnet (es fehlen nämlich oben wie unten einzelne Tage) und für die vierstündlichen Intervalle derart erhalten:

Täglicher Gang der Temperatur an der Erdoberfläche.

	Zeit ¹						Mittel
	2 ^h a.	6 ^h	10 ^h	2 ^h p.	6 ^h	10 ^h	
Ontake	4·9	4·8	15·4	17·8	10·3	5·2	9·7
Kurosawa ..	16·5	16·3	33·8	36·6	23·9	17·8	24·1

Die Extreme waren auf dem Ontake 27°4 und —1°1, zu Kurosawa 51°0 und 10°0.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Bodentemperatur an der Erdoberfläche aus allen Beobachtungen, die einen vollen Tag umfassen, abgeleitet, sind (Ortszeit, von Mitternacht an gezählt):

Ontake 33 Tage..... $10^{\circ}40 + 6 \cdot 38 \sin(279^{\circ}6 + x) + 2 \cdot 51 \sin(131^{\circ}6 + 2x)$

Kurosawa 28 Tage..... $24 \cdot 39 + 9 \cdot 51 \sin(282^{\circ}8 + x) + 3 \cdot 50 \sin(138 \cdot 8 + 2x)$

¹ Mittlere Japan Zeit, d. i. Zeit von 135° E. von Greenwich.

Die Beobachtungen auf dem Ontake sind in vierstündigen, jene zu Kurosawa in zweistündigen Intervallen angestellt; diese letzteren sind auch für Kurosawa zur Ableitung der obigen Formel benützt worden. Die Übereinstimmung des Ganges der Bodentemperatur an den beiden Stationen ist eine fast vollständige, nur die Amplitude ist an der unteren Station viel grösser.

Der Regenfall ist auf dem Ontake in vierstündigen Intervallen gemessen worden, zu Kurosawa aber in zweistündigen Zeiträumen. Der Vergleichbarkeit wegen habe ich in der folgenden übersichtlichen Zusammenstellung der Resultate dieser Messungen während 43 Tagen überall vierstündige Intervalle genommen.

Tägliche Periode des Regenfalles.

	Gemessen um						Summe
	2 ^h	6 ^h	10 ^h	2 ^h	6 ^h	10 ^h	
Ontake	142	147	149	146	102	82*	768
Kurosawa	67	77	79	40	34	30*	327

Die grösste Regenmenge ist an beiden Orten von 6^h—10^h Morgens gefallen, die kleinste von 6^h—10^h Abends. Der Regenfall auf dem Ontake war 2·35 mal grösser als unten zu Kurosawa. Die grösste Tagessumme auf dem Ontake war 142 *mm* am 9. September, zu Kurosawa 109·5 *mm* am 17. August.

In Bezug auf die Luftfeuchtigkeit zeigt der Gipfel des Ontake auffallenden Wechsel zwischen hoher relativer Feuchtigkeit bis zu 100% und grosser Trockenheit. Am 30. August war das Tagesmittel der relativen Feuchtigkeit 36·5%, in der Nacht vom 29./30. August wurden nur 2% und 4% beobachtet. Der dabei herrschende Wind war W und NW von geringer Stärke. Das Tagesmittel des 20. August war gar nur 31·7%, das Minimum ging aber nur auf 14% herab. Der Wind war schwach zwischen WSW, W und WNW.

Zu Kurosawa war das niedrigste Tagesmittel der relativen Feuchtigkeit 73% am 1. August, das absolute Minimum 41%.

Die vom 1. August bis 12. September auf dem Gipfel des Ontake vorherrschenden Winde waren WNW bis WSW. Die

heftigsten Winde waren SSW und S. Am 3. August war die mittlere Windgeschwindigkeit 22.1 m pro Secunde bei SSW, Maximum 37.3 m ; am 16. August erreichte das Tagesmittel bei Südwind 24.0 m . Das Maximum pro Stunde war 33.5 m , zwischen $11^{\text{h}}10^{\text{m}}$ und $11^{\text{h}}30^{\text{m}}$ sogar 45.2 m . Die kleinste Windgeschwindigkeit hatte der 6. September mit 4.5 m ; Calmen fehlten fast vollständig. Zu Kurosawa dagegen waren sie weitaus vorherrschend.

Zur Zeit der Terminbeobachtungen (43×12) gab es auf dem Ontake 128mal Regen, zu Kurosawa nur 117mal. Auf die Zeit von 6^{h} Abends bis 6^{h} Morgens (Nacht) kommen auf den Ontake 64, zu Kurosawa 49 Regenbeobachtungen, auf die Tageshälfte dagegen auf dem Ontake gleichfalls 64, dagegen zu Kurosawa 68. Auf dem Berggipfel war die Vertheilung der Regenstunden eine fast ganz gleichmässige über alle 24 Stunden, dagegen zeigte sich zu Kurosawa eine grössere Tendenz zu Nachmittagsregen.

Nach diesem kurzen Resumé der allgemeineren Beobachtungsergebnisse gehen wir nun über zu einer specielleren Untersuchung der täglichen Periode des Luftdruckes, der Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Bewölkung und Windgeschwindigkeit auf Grund der correspondirenden zweistündlichen Beobachtungen. Man findet die Ergebnisse derselben in den nachfolgenden kleinen Tabellen übersichtlich zusammengestellt. (Siehe S. 58).

Der tägliche Gang des Luftdruckes zeigt die charakteristischen Eigenthümlichkeiten einer Gipfelstation (Ontake), einer Thalstation (Kurosawa) und einer Station in der Ebene (Nagoya) in vollem Umfange. Am deutlichsten lässt sich dies aus den Gleichungen des täglichen Ganges erkennen. (Ortszeit von Mitternacht an gezählt. Die Correction auf Localzeit beträgt für Ontake im Zeitmass $-10'$, für die Winkelconstanten $-2^{\circ}5$ und $-5^{\circ}0$; für Kurosawa in Zeit $-11'$, für die erste Winkelconstante $-2^{\circ}7$, für die zweite -5.4 ; für Nagoya in Zeit $-8'$, für die beiden ersten Winkelconstanten -2° und -4° .)

$$\text{Ontake} \dots\dots\dots 0.282 \sin (221^{\circ}8+x) + 0.232 \sin (142^{\circ}5+2x)$$

$$\text{Kurosawa} \dots\dots\dots 0.679 \sin (35^{\circ}2+x) + 0.364 \sin (169^{\circ}2+2x)$$

$$\text{Nagoya} \dots\dots\dots 0.563 \sin (6^{\circ}3+x) + 0.412 \sin (154^{\circ}5+2x)$$

Übersicht des täglichen Ganges der meteorologischen
Elemente. August 1891.

	Ontake 3055	Kuro- sawa 834	Nagoya 15	Ontake 3055	Kuro- sawa 834	Nagoya 15
	Luftdruck			Temperatur		
	Abweichungen vom Mittel					
Mitternacht	— ·14	·48	·25	—1·75	—3·23	—2·09
2	— ·39	·25	·05	—1·97	—3·83	—2·67
4	— ·50	·32	·07	—2·21	—4·47	—3·06
6	— ·26	·61	·48	—1·75	—4·38	—3·13
8	— ·01	·53	·69	0·14	—0·93	—0·58
10	·27	·20	·57	2·41	3·18	1·70
Mittag	·33	— ·42	·05	3·52	5·45	3·19
2	·24	— ·86	— ·58	3·36	5·64	3·76
4	·04	— ·92	— ·87	1·79	4·69	3·34
6	— ·04	— ·74	— ·82	—0·49	1·70	1·40
8	·28	·10	— ·16	—1·52	—1·33	—0·45
10	·21	·47	·22	—1·54	—2·46	—1·40
Mittel	531·80	690·36	758·15	8·61	20·26	26·05
	Relative Feuchtigkeit (%)			Dampfdruck (mm)		
Mitternacht	74	96	89	5·64	13·91	19·73
2	74	96	91	5·61	13·54	19·53
4	80	97	92	5·93	13·01	19·18
6	81	96	91	6·09	13·04	19·14
8	79	84	80	6·53	14·23	19·33
10	78	70	70	7·38	14·97	19·23
Mittag	76	62	64	7·82	15·02	19·17
2	80	62	63	8·13	15·00	19·33
4	83	67	65	7·71	15·31	19·42
6	82	80	75	6·63	15·55	20·42
8	78	92	85	6·00	14·99	20·67
10	77	95	87	5·92	14·47	20·06
Mittel	78·5	83·0	79·3	6·62	14·42	19·60

	Ontake 3055	Kuro- sawa 834	Nagoya 15	Ontake 3055	Kuro- sawa 833	Nagoya 15
	Bewölkung (Scale 0—10)			Windgeschwindigkeit (Meter pro Secunde)		
Mitternacht	5·4	5·5	5·3	14·9	0·5	1·7
2	6·0	6·2	5·7	15·5	0·2	1·4
4	6·0	6·0	5·3	15·5	0·4	1·3
6	6·4	7·5	6·5	14·5	0·4	1·1
8	6·7	6·7	6·0	11·9	0·6	1·8
10	7·2	6·4	7·2	9·8	1·4	2·4
Mittag	8·1	7·1	7·3	8·1	1·9	2·9
2	8·5	7·2	6·8	7·6	2·1	3·6
4	8·2	6·7	6·3	7·8	2·0	3·4
6	6·5	6·7	6·3	10·0	1·0	3·1
8	4·4	5·1	4·7	11·7	0·3	2·0
10	5·4	5·1	5·4	13·1	0·3	1·9
Mittel	6·6	6·3	6·1	11·7	0·9	2·2

Die einmalige tägliche Barometerschwankung folgt auf dem Ontake in ihren Phasenzeiten, wie zu erwarten, nur mehr dem täglichen Wärmegange; die doppelte tägliche Oscillation bleibt in der Phasenzeit etwas zurück gegen jene in der benachbarten Niederung und hat zugleich eine etwas kleinere Amplitude (0·23 statt 0·28), als sie dem mittleren Barometerstande auf dem Ontake entsprechen würde. Die wahrscheinliche Ursache dieser allen Gipfelstationen gemeinsamen Eigenthümlichkeit habe ich an einer anderen Stelle eingehender erörtert.¹

Beim täglichen Barometergange zu Kurosawa fällt die grosse Amplitude der einmaligen täglichen Luftdruckschwankung auf, die Phasenzeiten derselben sind etwas verfrüht (4^h a. statt 6^h), dagegen zu Nagoya normal. Dass zwischen den

¹ Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften der Wiener Akad., Bd. LIX, 1892.

Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation zu Kurosawa und Nagoya ein Unterschied von einer halben Stunde besteht, ist wohl nur ein zufälliges Resultat der bloss 31-tägigen Beobachtungsreihe. Sonst ist die Übereinstimmung in ähnlichen Fällen viel grösser.

Versucht man aus dem täglichen Gange des Luftdruckes auf dem Ontake und zu Kurosawa im Augustmittel den täglichen Gang der Lufttemperatur in der atmosphärischen Schichte von 2220 *m* Mächtigkeit zwischen den beiden Stationen zu berechnen, so erhält man

$$1^{\circ}60 \sin (220^{\circ}2 + x) + 0^{\circ}25 \sin (50^{\circ}0 + 2x).$$

Nach dem Gange des Luftdruckes auf dem Ontake wäre demnach nur auf eine tägliche Wärmeschwankung von $3^{\circ}2$ in der Luftschichte unterhalb desselben zu schliessen.

Täglicher Gang der Temperatur. Auf dem Gipfel des Ontake und zu Kurosawa tritt das Maximum der Temperatur im täglichen Gange näher dem Mittage ein, als in der Ebene, namentlich auf dem Ontake liegt das Wärmemaximum dem Mittage sehr nahe; zu Nagoya tritt das Temperaturmaximum erst gegen 3^h Nachmittags auf, wie dies im Sommer normal ist. Der frühe Eintritt des Wärmemaximums zu Kurosawa scheint eine für Thalstationen ziemlich charakteristische Erscheinung zu sein, wie wir später noch sehen werden. Die Gleichungen für den täglichen Wärmegang sind:

$$\begin{array}{ll} \text{Ontake} & \dots\dots\dots 2^{\circ}77 \sin (253^{\circ}7 + x) + 1^{\circ}01 \sin (88^{\circ}6 + 2x) \\ \text{Kurosawa} & \dots\dots\dots 5^{\circ}13 \sin (236^{\circ}8 + x) + 1^{\circ}21 \sin (94^{\circ}1 + 2x) \\ \text{Nagoya} & \dots\dots\dots 3^{\circ}41 \sin (232^{\circ}5 + x) + 0^{\circ}65 \sin (92^{\circ}6 + 2x). \end{array}$$

Auf dem Ontake entfernt sich der tägliche Temperaturgang am meisten von einer einfachen täglichen Wärmewelle, das zweite Glied hat fast die halbe Amplitude des ersten, also einen sehr grossen Einfluss. Der Eintritt der Extreme ist verfrüht gegenüber den unteren Stationen. An der Thalstation ist die tägliche Amplitude sehr gross, viel grösser als in der Ebene, auch hat das zweite Glied noch einen erheblicheren Einfluss, die Phasenzeiten stimmen aber an beiden Orten (Kurosawa, Nagoya) fast vollkommen überein.

Der tägliche Gang der absoluten und der relativen Feuchtigkeit, sowie jener der Bewölkung tritt an den drei Stationen in sehr charakteristischer Form auf. Auf dem Berggipfel haben die Nachmittagsstunden die grösste relative Feuchtigkeit, wenn gleichzeitig in den Thälern und in der Ebene die Luftfeuchtigkeit noch dem Minimum der Sättigung nahe ist. Die trockenste Tageszeit auf dem Gipfel fällt auf Mitternacht bis 2^h, wenn unten in den Thälern die Luft am feuchtesten ist.

Der Wasserdampfgehalt der Luft erreicht in der täglichen Variation auf dem Berggipfel sein Maximum um 2^h Nachmittag, in der Thallage zu Kurosawa etwa um 5^h Nachmittag und zu Nagoya in der Ebene draussen erst um 7^h. Zu Nagoya zeigt sich auch die gewöhnliche Erscheinung eines ersten secundären Maximums des Dampfdruckes um 8^h—9^h Vormittag, dem rasch eine Abnahme folgt, die gewöhnlich und wohl mit Recht durch die tägliche Periode der Luftbewegung erklärt wird, dann folgt wieder eine Zunahme des Dampfdruckes bis zum Abende.

Der tägliche Gang der Bewölkung zeigt an allen drei Stationen eine grössere Übereinstimmung, als jener der Feuchtigkeit, was ja auch erklärlich ist, da die Himmelsansicht für alle Stationen nahe dieselbe ist, nur die localen Wolkenhauben der Berggipfel machen eine Ausnahme, die auch an der viel stärkeren Bewölkung auf dem Gipfel des Ontake in den ersten Nachmittagsstunden zum Ausdrucke kommt. Charakteristisch ist die rasche Abnahme der Bewölkung nach 6^h, so dass etwa um 8^h Abends das Minimum der Bewölkung eintritt.

Die Gleichungen des täglichen Ganges für die eben besprochenen meteorologischen Elemente folgen später.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Gipfel des Ontake steht in vollkommener Übereinstimmung mit den bisherigen Erfahrungen. Das Maximum der Windstärke tritt um 3^h Morgens ein, das Minimum um 3^h Nachmittags. Zu Nagoya in der Ebene trat das Minimum um 6^h Morgens ein, das Maximum von 3^h Nachmittags gleichzeitig mit dem Minimum der Windstärke auf dem Berggipfel. Die mittlere Windgeschwindigkeit war auf letzterem mehr als fünfmal grösser als in der Ebene, in der Thalstation war sie, wie zu erwarten, noch viel kleiner.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit sind folgende (Mitternacht $x = 0$,¹ Localzeit, Meter pro Secunde, Augustmittel 1891):

$$\begin{aligned}\text{Ontake} & \dots\dots\dots 4 \cdot 07 \sin (53 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 33 \sin (262 \cdot 4 + 2x) \\ \text{Kurosawa} & \dots\dots\dots 0 \cdot 90 \sin (243 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 38 \sin (47 \cdot 1 + 2x) \\ \text{Nagoya} & \dots\dots\dots 0 \cdot 97 \sin (228 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 26 \sin (25 \cdot 5 + 2x)\end{aligned}$$

Auffallend ist die grosse Amplitude in der täglichen Variation der Windstärke auf dem Gipfel des Ontake. Die Phasenzeiten des täglichen Ganges sind auf dem Ontake fast genau die entgegengesetzten von jenen zu Nagoya in der Niederung. Auch die mittlere Windgeschwindigkeit war auf dem Ontake ganz ungewöhnlich gross.

Ich will den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für einige Gipfelstationen, für welche ich die entsprechenden Gleichungen berechnet habe, hier zusammenstellen nebst Angabe der Seehöhe in Meter (Windgeschwindigkeit in Meter pro Secunde, Localzeit, $x = 0$ für Mitternacht.)

$$\begin{aligned}\text{Pikes Peak} & \quad 4308 \dots\dots 9 \cdot 26 + 1 \cdot 11 \sin (69 \cdot 2 + x) + 0 \cdot 30 \sin (301 \cdot 0 + 2x) \\ \text{Fuji Gipfel} & \quad 3733 \dots\dots 8 \cdot 79 + 2 \cdot 04 \sin (65 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 54 \sin (44 \cdot 3 + 2x) \\ \text{Ontake}^2 & \quad 3055 \dots\dots 11 \cdot 41 + 3 \cdot 84 \sin (53 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 53 \sin (247 \cdot 6 + 2x) \\ \text{Gozaishagatake} & \quad 1205 \dots\dots 7 \cdot 76 + 1 \cdot 50 \sin (84 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 59 \sin (281 \cdot 3 + 2x)\end{aligned}$$

Für die japanischen Stationen habe ich hier überall angenommen, dass die für Mitternacht angegebene Windgeschwindigkeit auch dieser Stunde entspricht, und nicht etwa dem Mittel des Intervalls 10^h—Mitternacht, also für 11^h p. gelte. An den japanischen Stationen wurde nur je einen (Sommer-) Monat oder wenig darüber beobachtet, für Pikes Peak dagegen bezieht sich die Formel auf ein mehrjähriges Mittel. Die Übereinstimmung im täglichen Gange der Windstärke aller Gipfelstationen ist eine sehr grosse.

In der nachfolgenden Tabelle habe ich die Mittelwerthe der zweistündigen Terminbeobachtungen für den ganzen Zeit-

¹ Ich nehme an, dass die unter Mitternacht stehende Windgeschwindigkeit dieser Stunde entspricht, nicht dem Mittel aus 10^h—Mitternacht.

² Hier ist der mittlere Gang für 43 Tage, d. i. die ganze Beobachtungsperiode eingestellt.

raum vom 1. August bis 12. September inclusive (also für 43 Tage) zusammengestellt und zwar in anderer Form, indem für jede Station alle meteorologischen Elemente beisammenstehen und so unter sich auf gegenseitige Beziehungen verglichen werden können.

Täglicher Gang der meteorologischen Elemente
1. August bis inclusive 12. September 1891 (43 Tage).

	Luftdruck	Temperatur	Feuchtigkeit		Bewölkung	Windstärke
			absolut	relativ		
Ontake 3055 m						
Mitternacht	532·02	7·19	5·93	76	5·6	14·2
2	1·76	6·93	5·81	76	5·7	14·6
4	1·64	6·72	6·04	81	5·6	15·1
6	1·84	7·07	6·22	82	6·0	14·3
8	2·10	8·93	6·66	79	6·3	11·8
10	2·40	11·52	7·43	76	7·1	9·7
Mittag	2·42	12·60	8·02	76	8·4	7·8
2	2·33	12·38	8·17	78	8·7	7·3
4	2·17	10·72	7·82	82	8·3	7·9
6	2·11	8·47	6·86	83	6·5	9·7
8	2·43	7·41	6·26	80	4·3	11·7
10	2·32	7·43	6·19	79	5·3	12·8
Mittel	532·13	8·95	6·78	79·0	6·5	11·4
Kurosawa 834 m						
Mitternacht	691·03	17·23	14·11	96	5·1	0·4
2	90·84	16·60	13·66	96	5·5	0·2
4	90·89	15·96	13·17	97	5·7	0·4
6	91·19	15·98	13·11	96	7·9	0·4
8	91·11	19·52	14·37	84	6·1	0·5
10	90·77	23·92	15·19	69	6·2	1·6
Mittag	90·13	26·20	15·13	61	6·6	2·1
2	89·69	26·35	15·29	61	6·6	2·2
4	89·61	25·37	15·49	66	6·2	2·2
6	89·81	22·00	15·80	81	6·1	0·9
8	90·71	19·13	15·23	92	4·5	0·3
10	91·02	18·03	14·71	95	5·0	0·3
Mittel	690·57	20·52	14·60	82·9	6·0	0·95

In derselben Anordnung sollen hier auch die Gleichungen für den täglichen Gang aller Elemente zusammengestellt werden. Die Zeit ist auch in diesen Gleichungen Localzeit, und $x = 0$ für Mitternacht.

Täglicher Gang der meteorologischen Elemente.

A. Auf dem Gipfel des Ontake 3055 m.

Luftdruck	$0.275 \sin (227^{\circ}4+x) + 0.229 \sin (143^{\circ}2+2x)$
Temperatur	$2.83 \sin (253.2+x) + 1.10 \sin (74.0+2x)$
Dampfdruck	$1.12 \sin (246.7+x) + 0.28 \sin (43.6+2x)$
Rel. Feuchtigkeit	$0.88 \sin (168.4+x) + 3.28 \sin (272.5+2x)$
Bewölkung	$1.57 \sin (257.3+x) + 0.89 \sin (24.8+2x)$
Windgeschw. . .	$3.84 \sin (53.6+x) + 0.53 \sin (247.6+2x)$

B. Zu Kurosawa 834 m.

Luftdruck	$0.685 \sin (35^{\circ}7+x) + 0.373 \sin (170^{\circ}4+2x)$
Temperatur	$5.27 \sin (237.4+x) + 1.57 \sin (64.9+2x)$
Dampfdruck	$1.17 \sin (208.3+x) + 0.33 \sin (156.2+2x)$
Rel. Feuchtigk.	$19.17 \sin (67.2+x) + 5.63 \sin (233.6+2x)$
Bewölkung	$0.89 \sin (299.0+x) + 0.45 \sin (309.6+2x)$
Windgeschw. . . .	$1.00 \sin (245.6+x) + 0.43 \sin (34.9+2x)$

Temperatur, Dampfdruck und Bewölkung zeigen in ihrem täglichen Gange die meiste Übereinstimmung, auf dem Ontake noch mehr als unten im Thale. Die relative Feuchtigkeit hat auf dem Gipfel der Hauptsache nach nur eine doppelte tägliche Periode, unten im Thale dagegen nur eine einfache und zwar mit excessiver Amplitude. Die Windgeschwindigkeit schliesst sich unten in ihrem täglichen Gange ganz der Temperatur an, nur treten die Extreme früher ein bei der Windstärke als bei der Temperatur; auf dem Gipfel ist, wie schon bemerkt, der Gang der entgegengesetzte.

Aus den Gleichungen des täglichen Ganges der Temperatur unten und oben erhält man unmittelbar auch jene des täglichen Ganges der Wärmeabnahme mit der Höhe durch einfache Subtraction der numerischen Coëfficienten und Division der Amplituden durch den Höhenunterschied der beiden Stationen. Die Rechnung stellt sich dann so:

Coëfficienten					
	p	p_1	q_1	p_2	q_2
Kurosawa 834 m .. 20°52	—4°57	—2°63	+1°48	+0°53	
Ontake 3055 . . . 8°95	—2°74	—0°70	+1°08	+0°21	
Differenz 2221 . . 11°57	—1°83	—1°93	+0°40	+0°32	

Täglicher Gang der Temperatur-Differenz:

$$11 \cdot 57 + 2 \cdot 660 \sin (223 \cdot 5 + x) + 0 \cdot 512 \sin (51 \cdot 3 + 2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 m :

$$0 \cdot 520 + 0 \cdot 120 \sin (223 \cdot 5 + x) + 0 \cdot 023 \sin (51 \cdot 3 + 2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 m (August allein):

$$0 \cdot 524 + 0 \cdot 117 \sin (221 \cdot 7 + x) + 0 \cdot 010 \sin (127 \cdot 9 + 2x)$$

Coëfficienten					
	p	p_1	q_1	p_2	q_2
Nagoya 15 m .. 26°05	—2°78	—1°98	+0°65	—0°075	
Kurosawa 834 . . 20°26	—4°42	—2°60	+1°19	—0°200	
Differenz 819 . . 5°79	+1°64	+0°62	—0°54	+0°125	

Täglicher Gang der Temperatur-Differenz:

$$5 \cdot 79 + 1 \cdot 753 \sin (69 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 554 \sin (283 \cdot 0 + 2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 m :

$$0 \cdot 709 + 0 \cdot 215 \sin (69 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 068 \sin (283 \cdot 0 + 2x)$$

Derselbe zwischen Nagoya—Ontake:

$$0 \cdot 574 + 0 \cdot 044 \sin (183 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 012 \sin (268 \cdot 3 + 2x)$$

Die mittlere Wärmeabnahme pro 100 m zwischen dem Gipfel des Ontake und Kurosawa ist 0°52, zwischen Kurosawa und Nagoya dagegen viel grösser, 0°71; Nagoya mit dem Ontake verglichen gibt 0°57 pro 100 m , d. i. eine verhältnissmässig geringe Wärmeabnahme für den Sommer. Freilich fällt die Beobachtungszeit in die Zeit des Regenmonsuns. Es kann aber auch die mittlere Temperatur auf dem Ontake ein wenig zu hoch gefunden worden sein, doch spricht die grosse mittlere Windgeschwindigkeit gegen die Annahme, dass die Wärmestrahlung des kahlen besonnten Gipfels die Angaben der Thermometer erheblich beeinflusst haben mag.

Der tägliche Gang der Wärmeabnahme zwischen der Thalstation und dem Gipfel des Ontake nimmt gerade den umgekehrten Verlauf wie jener zwischen Kurosawa und dem in der Niederung ausserhalb des Gebirges gelegenen Nagoya. Die nächtliche Abkühlung der Thalstation ist so gross, dass der Wärmeunterschied gegen Nagoya um diese Zeit grösser wird, als er am Nachmittag ist, wo umgekehrt die Thalstation einen Wärmeexcess zeigt. So entsteht das ganz abnorme Verhältniss einer raschen nächtlichen und langsamen nachmittägigen Wärmeabnahme mit der Höhe. Strenger genommen sollte man diesen letzteren Ausdruck im vorliegenden Falle gar nicht anwenden, denn sicherlich handelt es sich hier nur um locale Temperaturunterschiede, und nicht um jene in der zwischenliegenden Luftschichte selbst. Die Luftschichte oberhalb Nagoya in der Seehöhe von Kurosawa hat ganz unzweifelhaft nicht die extreme tägliche Wärmeschwankung, wie wir sie in diesem Niveau an der Erdoberfläche in dem wahrscheinlich ziemlich engen Gebirgsthale finden. Man sollte daher nur von dem täglichen Gange des Wärmeunterschiedes zwischen Nagoya und Kurosawa sprechen und nicht von einer Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen beiden. Da wir später einen ganz analogen Fall zu betrachten haben werden, der das Interesse an dieser Erscheinung sehr erhöht, da er derselben eine grössere Tragweite gibt, so wollen wir bloss als Rechnungsgrösse doch die Zahlen der Wärmeabnahme mit der Höhe zum Vergleiche beibehalten.

Wärmeabnahme pro 100 m											
Mittn.	2	4	6	8	10	Mittag	2	4	6	8	10
Kurosawa—Ontake (43 Tage):											
·456	·426	·407*	·415	·465	·545	·620	·655	·639	·589	·533	·489
Nagoya—Kurosawa (August):											
·844	·891	·921	·851	·694	·527	·442*	·487	·589	·699	·764	·799
Nagoya—Ontake (August):											
·559	·544	·541*	·543	·544	·549	·565	·592	·619	·629	·616	·587

Wegen der übermässigen localen täglichen Temperaturvariation im Gebirgsthale von Kurosawa haben wohl die Zahlen

für den täglichen Gang der Wärmeänderung mit der Höhe zwischen Nagoya und Ontake eine allgemeinere Bedeutung, als jene für Kurosawa—Ontake, trotz der geringen horizontalen Entfernung dieser letztgenannten Stationen.

In der Wärmeabnahme zwischen der Station in der Ebene am Meeresufer und jener auf dem Gipfel des Ontake ist die tägliche Variation eine sehr geringe; die Amplitude der letzteren ist dagegen sehr gross zwischen der Ebene und dem Gebirgsthale.

II.

Eine zweite Beobachtungsreihe stündlicher Werthe der meteorologischen Elemente auf einem hohen Berggipfel verdanken wir Herrn J. Vallot, der kürzlich zweimonatliche Beobachtungsergebnisse auf dem Gipfel des Montblanc, bei den Grands Mulets und zu Chamonix veröffentlicht hat.¹ Dieselben sollen hier einer kurzen Discussion unterzogen werden, namentlich auch im Vergleiche mit den eben vorher besprochenen correspondirenden Beobachtungen auf dem Ontake und an dessen Fuss zu Kurosawa.

Herr Vallot hat in seiner Publication den täglichen Gang der meteorologischen Elemente an den oben genannten Stationen, der mit Hilfe von öfter controlirten Registrirapparaten von Richard erhalten worden ist, bloss in Form von Curven mitgetheilt; die Zahlenwerthe selbst sollen im Jahrgang 1892 des »Annales du bureau central Mét. de France« zur Veröffentlichung gelangen, der eben erst zum Drucke kommt. Ich habe einstweilen den von Herrn Vallot veröffentlichten Diagrammen des täglichen Ganges die numerischen Werthe der meteorologischen Elemente entnommen, was, wie Controlversuche ergeben haben, mit hinlänglicher Genauigkeit geschehen konnte. Herr J. Vallot hat den Aufzeichnungen der Richard'schen Autographen die numerischen Werthe nur für dreistündige Intervalle entnommen, wahrscheinlich desshalb, weil er die Zeitscala sehr klein nehmen musste, um an den oberen, schwer zugänglichen Punkten die Autographen längere Zeit sich selbst

¹ Annales de l'Observ. Mét. du Montblanc, Paris, G. Steinheil, 1893.

überlassen zu können. Dagegen verdoppelte sein Barograph die Änderungen des Luftdruckes gegenüber den Angaben eines Quecksilberbarometers.

Es braucht hier nur bemerkt zu werden, dass die nachstehend mitgetheilten Beobachtungsergebnisse das vollste Vertrauen verdienen, was mir auch Herr Angot, der sich speciell mit diesen Registrirungen und ihrer Reduction beschäftigte, bestätigt hat. In Bezug auf nähere Information darüber, wie die Registrirungen erhalten worden sind, und in welcher Weise für die Richtigkeit der Aufzeichnungen gesorgt wurde, und die nöthigen Reductionen ermöglicht worden sind, müssen wir auf die leicht zugängliche Publication des Herrn J. Vallot verweisen, dem die Wissenschaft für seine mit grossen Kosten und ausserordentlichen Strapazen verbundenen Bemühungen zu grossem Danke verpflichtet ist.

Die Registrirungen des Luftdruckes auf dem Montblanc-Gipfel, circa 3 *m* unterhalb desselben in 4807 *m* Seehöhe umfassen 54 Tage, vom 17. Juli bis 9. September 1877, jene der Temperatur nur 28 Tage, vom 18. Juli bis 14. August. An die Reduction der Barographenzeichnungen (Richard, grosses Modell) wurden die Temperaturcorrectionen angebracht.

Beiden Grands Mulets (3010 *m*) zeichnete der Barograph 55 Tage, der Thermograph 47 und der Hygrograph 53 Tage (beginnend mit dem 16. Juli 1887, mit Unterbrechungen, die ergänzt werden konnten). Da an die Angaben des Barographen keine Temperaturcorrection angebracht worden ist, wurden dieselben hier nicht verwendet.

Zu Chamonix (1035 *m*) registrirten Barograph, Thermograph und Hygrograph ununterbrochen vom 11. Juli bis 11. September. Thermograph und Hygrograph befanden sich in einer Jalousiehütte im Garten des Hôtel Montblanc, die Hütte wurde noch besonders durch Schirme aus Segeltuch gegen die Sonnenstrahlung geschützt. Dieselbe Vorsicht wurde auch nach Möglichkeit bei den Thermometeraufstellungen auf dem Montblanc-Gipfel und bei den Grands Mulets beobachtet.

Ausserdem werden von Herrn Vallot die Ergebnisse der correspondirenden Aufzeichnungen und Registrirungen der

meteorologischen Elemente zu Genf, Observatorium (Seehöhe 407 *m*) und auf dem grossen St. Bernhard (Seehöhe 2476 *m*) ebenfalls in Form von Diagrammen zum Vergleiche mitgetheilt.

Wie weit die von Herrn Vallot in Form von Diagrammen mitgetheilten Beobachtungsergebnisse wirklich correspondirend sind, ist aus der Publication nicht zu ersehen. Einen Einfluss auf die nachstehenden Erörterungen dürften etwaige Abweichungen von einer absoluten Gleichzeitigkeit der verglichenen täglichen Perioden der meteorologischen Elemente nicht haben.

In den nachfolgenden zwei Tabellen (siehe S. 70 und 71) habe ich die höchst interessanten Ergebnisse der durch Herrn Vallot's Bemühungen zu Stande gekommenen correspondirenden Beobachtungsreihen in einem verticalen Höhenintervall von fast $4\frac{1}{2}$ *km*, übersichtlich zusammengestellt. Die Ergebnisse ähnlicher Aufzeichnungen in den folgenden Jahren 1890, 1891 und 1892 beim Observatorium Vallot 4365 *m*, bei den Grands Mulets und zu Chamonix sind noch nicht veröffentlicht worden.

Ich will zuerst den täglichen Gang der Luftfeuchtigkeit besprechen, weil am wenigsten darüber zu bemerken ist. Die relative Feuchtigkeit hat bei den Grands Mulets (3010 *m*) ihr Minimum um 10^h Vormittag und ihr Maximum um 6^h Abends. Der Gang ist also ein anderer wie auf dem Ontake in gleicher Seehöhe, wahrscheinlich weil wir es hier nicht mit einer Gipfelstation zu thun haben, sondern mit einem vergletscherten Bergabhang. Der Gegensatz zwischen der Trockenheit der ersten Morgenstunden bei den Grands Mulets und der gleichzeitigen fast völligen Sättigung der Luft mit Wasserdampf im Thale unten tritt auch hier auffallend genug zu Tage. Die tägliche Variation der relativen Feuchtigkeit ist zu Chamonix viel grösser als bei den Grands Mulets.

Der Gang der absoluten Feuchtigkeit bei den Grands Mulets ist jenem auf dem Ontake (in gleicher Seehöhe und gleicher Jahreszeit) sehr ähnlich, aber der Eintritt der Extreme erfolgt um einige Stunden später bei den Grands Mulets.

Täglicher Gang des Luftdruckes und der Temperatur
(1887).

	Luftdruck 2 Monate		Temperatur 1 Monat Juli/August				
	Genf	Mont-blanc	Genf	Chamonix	St. Bernhard	Grands Mulets	Mont-blanc
	407 m	4807 m	407 m	1035 m	2470 m	3010 m	4807 m
	Mittel:						
	727·34	423·85	21·0	16·8	8·6	5·8	—6·5
Abweichungen vom Mittel							
Mitternacht	·22	·00	—3·1	—4·6	—1·3	—1·2	—1·1
1	·17	—·15	—3·8	—5·1	—1·4	—1·4	—1·2
2	·13	—·25	—4·4	—5·6	—1·5	—1·6	—1·3
3	·06	—·35	—5·1	—5·9	—1·6	—1·7	—1·4
4	·01	—·44	—5·4	—6·2	—1·8	—1·9	—1·5
5	·08	—·49	—5·2	—6·8	—1·7	—1·8	—1·3
6	·26	—·53	—4·1	—5·0	—1·5	—1·5	—1·1
7	·36	—·52	—2·5	—3·0	—1·0	—0·9	—0·7
8	·46	—·39	—1·0	—0·6	—0·3	—0·1	—0·2
9	·54	—·24	0·8	2·4	0·7	0·7	0·4
10	·56	—·06	2·2	5·1	1·6	1·4	1·0
11	·43	09	3·3	6·3	2·1	2·2	1·5
Mittag	·06	·22	4·2	7·2	2·5	2·8	1·8
1	—·26	·33	4·7	7·4*	2·6*	3·0*	2·0*
2	—·46	·38	5·0	7·1	2·4	2·8	2·0*
3	—·60	·39	5·2*	6·4	2·1	2·2	1·8
4	—·65	·38	4·9	5·2	1·5	1·5	1·5
5	—·64	·33	4·0	3·9	0·9	0·9	1·1
6	—·55	·26	2·9	2·0	0·1	0·2	0·5
7	—·43	·20	1·8	0·2	—0·3	—0·5	0·0
8	—·24	·19	0·2	—1·2	—0·8	—0·8	—0·5
9	—·03	·22	—0·8	—2·6	—1·0	—1·0	—0·8
10	·18	·23	—1·6	—3·6	—1·1	—1·1	—1·0
11	·24	·15	—2·3	—4·0	—1·2	—1·1	—1·0
Mittel	·317	·283	3·27	4·44	1·29	1·43	1·11

Täglicher Gang der Temperatur und Feuchtigkeit
2 Monate (1887).

	Temperatur			Dampfdruck <i>mm</i>			Relative Feuchtigkeit <i>%</i>		
	Genf	Cha- monix	Grands Mulets	Genf	Cha- monix	Grands Mulets	Genf	Cha- monix	Grands Mulets
	407 <i>m</i>	1035 <i>m</i>	3010 <i>m</i>	407 <i>m</i>	1035 <i>m</i>	3010 <i>m</i>	407 <i>m</i>	1035 <i>m</i>	3010 <i>m</i>
Mittn.	16·0	11·3	3·3	11 2	9·6	4·1	84	92	71
1	15·5	10·9	3·2						
2	15·0	10·4	3·1	10·9	9·3	4·0	87	93	70
3	14·3	10·0	3·0						
4	14·1	9·8	3·0	10·6	8·8	3·9	88	96	68
5	14·4	9·9	3·1						
6	15·0	10·2	3·2	11·0	9·3	3·8	86	93	65
7	16·0	11·5	3·4						
8	17·9	14·0	4·0	11·8	9·9	3·7	78	83	60
9	19·3	16·7	4·9						
10	20·8	19·3	5·6	12·5	10·5	4·0	70	64	59
11	22·0	21·0	6·3						
Mittag	23·0	22·0	6·9	12·8	10·7	4·6	63	56	61
1	23·4	22·2	7·2						
2	23·7	22·1	7·3	12·6	10 4	5·0	58	54	66
3	23·7	21·7	7·1						
4	23·3	20·6	6 7	12·3	9·8	5·4	58	57	73
5	22·3	18·9	6·0						
6	21·1	17·0	5·1	12·3	10·5	5·1	65	71	77
7	20·0	15·7	4·3						
8	19·0	14·3	4·0	12·2	10·6	4·6	74	85	76
9	18·0	13·0	3·7						
10	17·2	12·4	3·4	11·7	10·0	4·1	80	93	74
11	16·6	11·8	3·3						
Mittel	18·8	15·3	4·6	11 8	9·9	4·4	74	78	68

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Luftfeuchtigkeit bei den Grands Mulets und zu Chamonix sind:

Relative Feuchtigkeit

Grands Mulets . . . $7 \cdot 98 \sin (138 \cdot 2 + x) + 2 \cdot 60 \sin (296 \cdot 5 + 2x)$

Chamonix $21 \cdot 60 \sin (62 \cdot 9 + x) + 5 \cdot 45 \sin (228 \cdot 4 + 2x)$

Dampfdruck

Grands Mulets . . . $0 \cdot 71 \sin (201 \cdot 5 + x) + 0 \cdot 29 \sin (344 \cdot 1 + 2x)$

Chamonix $0 \cdot 66 \sin (221 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 43 \sin (153 \cdot 2 + 2x)$

Der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit zu Chamonix stimmt in den Amplituden und Phasenzeiten völlig überein mit jenem zu Kurosawa, ist also charakteristisch für Thalstationen und den Sommer. Desgleichen ist auch der Gang des Dampfdruckes fast völlig übereinstimmend, weist aber eine kleinere Amplitude auf.

Die Abnahme des absoluten Wasserdampfgehaltes der Luft erfolgt nach der früher erwähnten Formel, wie folgende mittelst derselben erhaltene Rechnungsergebnisse zeigen:

Dampfdruck bei den Grands Mulets berechnet nach jenem zu Genf 4·7, nach jenem zu Chamonix 4·8, beobachtet 4·4 *mm*.

Für den Montblanc-Gipfel erhält man als Dampfdruck (Mitte Juli bis 10. September) aus den Beobachtungen zu Genf 2·5, zu Chamonix 2·6, bei den Grands Mulets 2·3, Mittel 2·5 *mm*.

Der tägliche Gang der Lufttemperatur zeigt zwischen Chamonix und Genf genau dieselben Unterschiede, wie wir sie zwischen Kurosawa und Nagoya vorhin gefunden haben. In dem engen Gebirgsthale von Chamonix ist die tägliche Amplitude der Temperaturvariation viel grösser als zu Genf, und das Maximum liegt viel näher dem Mittage, ganz wie zu Kurosawa. In ähnlicher Weise hat die Station Kolm Saigurn das Temperaturmaximum dem Mittage sehr nahe, und das gleiche zeigen die Stationen in den Hochthälern der Rocky Mountains, von denen ich seinerzeit stündliche Temperatur- und Luftdruck-

aufzeichnungen discutirt habe.¹ Folgende kleine Tabelle zeigt diese Übereinstimmung des Temperaturganges in den Thälern und deren Verschiedenheit von jenem ausserhalb des Gebirges.

Täglicher Wärmegang. Abweichungen vom Mittel.

Ort	Höhe in hm	Zeit							
		9 ^h	10 ^h	11 ^h	Mittag	1 ^h	2 ^h	3 ^h	4 ^h
Kurosawa	8·3	1·1	3·2	4·3	5·5	5·7*	5·6	5·1	4·7
Chamonix	10·3	2·4	5·1	6·3	7·2	7·4*	7·1	6·4	5·2
Kolm Saigurn	16·0	1·5	2·1	2·6	2·9	3·1*	3·0	2·6	2·2
Rocky Mountains .	20·2	3·7	6·3	7·4	8·0	8·0*	7·8	7·3	6·4
Nagoya	0·1	0·7	1·7	2·5	3·1	3·6	3·7*	3·6	3·3
Genf	4·0	0·8	2·2	3·3	4·2	4·7	5·0	5·2*	4·9

An den letzteren Stationen ist um 4^h Nachmittag die Temperatur noch nahe dem Maximum und höher als um Mittag; an den ersteren Stationen in tieferen Gebirgsthälern ist die Mittagstemperatur höher als jene um 4^h Nachmittag.

Ich möchte hier nur auf diese bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit des täglichen Ganges hinweisen, wie sie die hier verglichenen Stationen zeigen, um dadurch vielleicht Anregung zu speciellerer Prüfung über die Tragweite derselben zu geben. Zeigt sich, dass die Verfrühung im Eintritt des Temperaturmaximums in Gebirgsthälern eine allgemeine Erscheinung ist, dann erst wird es an der Zeit sein, über die Ursachen derselben (ob es in der absoluten Höhenlage oder Beschränkung des Horizontes, Eingeschlossenheit, begründet) nachzuforschen. Nichts ist für den Fortschritt der Wissenschaft bedenklicher, als für jede neue auffallende Naturerscheinung auch gleich mit einer supponirten Erklärung bei der Hand zu sein.

Die Constanten der Sinusreihen für den täglichen Wärmegang sind:

¹ Über den täglichen Gang des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit, Bewölkung und Windstärke in den Rocky Mountains. Diese Sitzungsberichte, Bd. LXXXIII, Märzheft 1881.

Täglicher Wärmegang.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Erster Monat								
Genf.....	-3.88	-3.31	+0.57	+0.01	229.5	89.5	5.10	0.57
Chamonix ..	-6.09	-3.03	+1.40	+0.15	243.6	83.9	6.80	1.41
St. Bernhard.	-1.90	-0.78	+0.63	+0.18	247.7	74.1	2.05	0.65
Gr. Mulets ..	-2.00	-0.82	+0.72	+0.21	247.7	73.7	2.16	0.75
Montblanc ..	-1.52	-0.76	+0.32	+0.20	243.4	58.0	1.70	0.38
Zwei Monate								
Genf.....	-3.21	-2.93	+0.71	+0.22	227.6	72.8	4.35	0.74
Chamonix ..	-5.03	-3.13	+1.45	+0.46	238.1	72.4	5.92	1.52
Gr. Mulets ..	-1.92	-1.02	+0.46	+0.44	242.0	46.3	2.17	0.64

Die hochgelegenen Stationen Grands Mulets, St. Bernhard und Montblanc-Gipfel zeigen sämmtlich die Eigenthümlichkeit, dass das Wärmemaximum dem Mittage recht nahe liegt.

Da meine Daten erst wieder aus den Diagrammen des Herrn J. Vallot zurück abgeleitet worden sind, und möglicher Weise dadurch kleine Abweichungen gegenüber den unmittelbar beobachteten Temperaturen entstanden sein könnten, so schadet es nicht, diesbezüglich einen Vergleich anzustellen. Durch die Güte des Herrn A. Angot, der mir die unmittelbar den Thermographenzeichnungen auf dem Montblanc-Gipfel entnommenen Temperaturmittel für die 28 Tage, vom 18. Juli bis 14. August (1887), mitgetheilt hat, bin ich in der Lage, diesen Vergleich wenigstens für eine Station vornehmen zu können.

Temperatur auf dem Montblanc-Gipfel.

	1 ^h	4 ^h	7 ^h	10 ^h a.	1 ^h	4 ^h	7 ^h	10 ^h p.	Mittel
Beobachtung ..	-7.7	-8.1	-7.2	-5.5	-4.3	-4.8	-6.3	-7.5	-6.44
Diagramm ¹ ..	-7.7	-8.0	-7.2	-5.5	-4.5	-5.0	-6.5	-7.5	-6.48

¹ Aus dem Diagramm des Herrn J. Vallot entnommene Temperaturen.

Man sieht, die Unterschiede sind ganz unbedeutend. Noch weniger einflussreich werden sie aber bei den tieferen Stationen mit grösseren Temperaturamplituden sein.

Die Gleichung des täglichen Wärmeganges nach den dreistündigen, den Registrirungen entnommenen Temperaturen ist:

$$-6 \cdot 44 + 1 \cdot 83 \sin (241 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 40 \sin (57^\circ 1 + 2x)$$

Aus diesen Gleichungen des täglichen Wärmeganges erhalten wir auch unmittelbar jene für den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe. Der grösste directe Höhenunterschied, für welche dieselbe je berechnet werden konnte, ist nun der zwischen Genf und dem Montblanc-Gipfel, fast $4\frac{1}{2}$ km. Die Rechnung steht so:¹

	p	p_1	q_1	p_2	q_2
Genf 407 m	21·04	—3·88	—3·31	+0·57	+0·005
Montblanc 4807 m . . .	6·44	—1·78	—0·44	+0·40	+0·02
Differenz 4400 m . . .	27·48	—2·10	—2·87	+0·17	—0·015

Daraus folgt als täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe pro 100 m zwischen Genf und dem Montblanc-Gipfel (für Ende Juli):

$$0^\circ 624 + 0^\circ 081 \sin (216^\circ 2 + x) + 0^\circ 004 \sin (95^\circ 1 + 2x).$$

Diese tägliche Periode hat also eine ziemlich kleine Amplitude. Die nach dieser Formel für zweistündliche Intervalle berechneten Werthe finden sich später mit anderen ähnlichen zusammengestellt.

Für die Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Chamonix und Montblanc findet man auf gleiche Weise folgende Gleichung:

Chamonix 1035 m — Montblanc 4807 m

$$0^\circ 616 + 0^\circ 133 \sin (239^\circ 0 + x) + 0^\circ 027 \sin (82^\circ 6 + 2x).$$

Hier hat der tägliche Gang schon eine viel grössere Amplitude in Folge der grossen täglichen Wärmeschwankung im Thale von Chamonix.

¹ Die Bedeutung der Constanten p , p_1 , q_1 , p_2 , q_2 ergibt sich aus der bekannten Form der harmonischen Reihe

$$p + p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x.$$

Ich habe mittelst der auf S. 74 mitgetheilten Constanten des täglichen Wärmeganges noch folgende Gleichungen für den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe abgeleitet:

Grands Mulets (3010)—Montblanc (4807)

$$0.684 + 0.027 \sin (262.9 + x) + 0.022 \sin (88.6 + 2x)$$

St. Bernhard (2476)—Montblanc (4807)

$$0.647 + 0.016 \sin (267.0 + x) + 0.013 \sin (113.7 + 2x)$$

Chamonix (1035)—Grands Mulets (3010)

$$0.554 + 0.235 \sin (241.6 + x) + 0.036 \sin (94.8 + 2x)$$

Genf (407)—Chamonix (1035)

$$0.564 + 0.292 \sin (83.7 + x) + 0.124 \sin (252.0 + 2x)$$

Die letztere Gleichung ist aus den correspondirenden Aufzeichnungen von zwei Monaten (11. Juli bis 11. September) abgeleitet, alle übrigen aus Aufzeichnungen von einem Monate.

Die tägliche Variation der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen hochgelegenen Punkten (mit Ausschluss von Thalstationen) hat eine sehr geringe Amplitude, wie die ersten beiden Gleichungen zeigen. Die Wärmeabnahme zwischen Genf und Chamonix hat genau den gleichen Charakter wie jene zwischen Nagoya und Kurosawa, das Maximum tritt in der Nacht ein, das Minimum am Nachmittage.

Ich habe schon oben bemerkt, dass ich diesem Resultate keine reelle Bedeutung zugestehen mag, weil dasselbe keineswegs sich wirklich auf die Luftschichte zwischen Genf und Chamonix bezieht. Die excessive Erwärmung am Nachmittage und Erkaltung bei Nacht bleibt sicherlich auf die der Thalsole von Chamonix aufliegenden Luftschichten beschränkt. Mit der üblichen abgekürzten Bezeichnung können wir sagen, dass diese Zahlen die »klimatische« Wärmeabnahme zwischen Genf und Chamonix ausdrücken. Die Übereinstimmung mit den für Nagoya—Kurosawa erhaltenen Zahlen zeigt aber, dass wir es hier mit einer Erscheinung von allgemeinerer Bedeutung zu thun haben:

Täglicher Gang der Wärmeabnahme.

	a_0	a_1	A_1	a_2	A_2
Nagoya—Kurosawa . . .	0·709	0·215	69·3	0·068	283·0
Genf—Chamonix	0·564	0·292	83·7	0·124	252·0

Aus den vorhergehenden Gleichungen habe ich die folgenden Zahlenwerthe berechnet:

Täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe
(pro 100 *m*).

	Genf Mont- blanc 4400 <i>m</i>	Chamonix Mont- blanc 3772 <i>m</i>	Grands Mulets Mont- blanc 1800 <i>m</i>	St. Bern- hard Mont- blanc 2330 <i>m</i>	Chamonix Grands Mulets 1975 <i>m</i>	Genf Chamonix 628 <i>m</i>
	1 Monat					2 Monate
Mittern.	·580	·528	·679	·644	·383	·736
2	·551	·499	·671	·638	·335	·739
4	·542*	·489*	·657*	·631*	·333*	·763
6	·555	·521	·659	·633	·406	·714
8	·590	·577	·682	·647	·604	·539
10	·635	·691	·716	·668	·698	·303
Mittag	·676	·756	·783	·677	·797	·156*
2	·699	·765	·721	·667	·805	·205
4	·702	·723	·689	·649	·733	·417
6	·685	·659	·665	·635	·630	·650
8	·656	·623	·662	·634	·472	·773
10	·617	·561	·674	·641	·452	·778
Mittel	·624	·616	·684	·647	·554	·564

Die aus den Temperaturregistrierungen des Herrn Vallot auf dem Gipfel des Montblanc folgende tägliche Wärmeschwankung dürfte jedenfalls etwas zu gross sein in Folge der Unmöglichkeit, das registrirende Thermometer genügend gegen die Insolation und die Wärmereflexion des Schnees zu schützen. Das geht wohl schon aus einer Vergleichung mit dem täglichen Wärmegange auf dem Obirgipfel und Sonnblickgipfel in viel geringerer Seehöhe hervor.

Täglicher Wärmegang im Sommer.

Obirgipfel 2140 *m* $1.65 \sin(238.1 + x) + 0.25 \sin(24.3 + 2x)$
 Sonnblickgipfel 3100 *m* . . . $1.04 \sin(224.0 + x) + 0.12 \sin(16.9 + 2x)$
 Montblanc-Gipfel 4807 *m* . $1.70 \sin(243.4 + x) + 0.38 \sin(58.0 + 2x)$

Man darf wohl annehmen, dass die wahre Amplitude der täglichen Temperaturvariation auf dem Montblanc-Gipfel nur halb so gross (oder noch kleiner) ist, als man sie hier angegeben findet.

Herr Nilson Ekholm hat während seines Aufenthaltes auf Spitzbergen bei Cap Thordsen 1882/1883 sehr interessante und instructive Untersuchungen gemacht über den Einfluss der directen Insolation und der Wärmereflexion des Schnees auf die Thermometer in einer dieselben möglichst gegen Wärmestrahlung schützenden Hütte mit doppelten Jalousiewänden. In den Monaten April und Mai zeigten dieselben trotzdem öfter eine bis zu 4° höhere Temperatur als ein Schleuderthermometer.

Stündliche Vergleichsbeobachtungen vom 5.—25. Mai ergaben, dass nach dem Schleuderthermometer das Maximum der Lufttemperatur erst gegen 1½^h p. eintrat, in der Hütte dagegen schon vor Mittag. Die tägliche Temperaturamplitude in der Hütte war 3°4, das Schleuderthermometer ergab dieselbe für die Luft ausserhalb bloss zu 2°9. Und auch diese Amplitude ist wohl noch etwas zu gross. Die mittlere Temperatur in der Hütte war um etwas mehr als einen halben Grad zu hoch.

Für die Zeit vom 18. Juli bis 14. August 1887 ergaben die Beobachtungen auf dem Sonnblickgipfel eine mittlere Temperatur von +3°0, d. i. eine Abweichung vom (30-jährigen) Mittel

von $+1.5$. Darf man annehmen, dass dieselbe auch für den Montblanc Giltigkeit hatte, so erhält man als normale Temperatur desselben für diese Periode -8° . Die Beobachtungen auf dem Theodulpass (3330 *m*) stimmen damit sehr gut überein.

Als wahrscheinliches Jahresmittel der Wärme auf dem Montblanc-Gipfel möchte ich die auf verschiedenen Wegen ziemlich übereinstimmend gefundene Temperatur von -14° annehmen (für den Jänner -20° rund). Die von Herrn Vallot im Innern des Eistunnels auf dem Gipfel gefundene Mitteltemperatur von $-16^{\circ}5$ ist wohl, wofür er ja selbst triftige Gründe angibt, erheblich niedriger als die äussere Lufttemperatur auf dem Gipfel.

Die Luftdruckbeobachtungen des Herrn Vallot auf dem Montblanc-Gipfel haben wohl den grössten Werth, weil die grösste Tragweite. Durch Berechnung der Seehöhe des Montblanc-Gipfels auf Grund derselben hat Herr A. Angot schon gezeigt, dass sie dieselbe zu 4810.5 *m* ergeben (Mittel nach Säntis und Puy de Dôme) in bester Übereinstimmung mit der trigonometrischen Messung.¹ Am interessantesten ist aber die Constatirung des täglichen Ganges des Luftdruckes auf einem Gipfel von nahe 5 *km* Seehöhe. Nach den Ergebnissen der Registrirungen auf dem Sonnblickgipfel hätte man geneigt sein können, anzunehmen, dass in einer 1700 *m* grösseren Seehöhe der tägliche Gang des Barometers nur mehr ein Minimum am frühen Morgen und ein Maximum am Abend haben möchte. Die früheren vorläufigen Mittheilungen über die Ergebnisse der Beobachtungen des Herrn Vallot lauteten auch in der That so. Herr Rotch, der mit Herrn Vallot auf dem Montblanc war und in die Ergebnisse der Registrirungen auf demselben Einsicht hatte, sagte noch kürzlich, dass auf dem Gipfel des Montblanc der Luftdruck bloss ein Maximum um 1^h p. und ein einziges Minimum um 4^h Morgens habe mit einer blossen Tendenz zu einem zweiten Minimum am späten Nachmittag.²

¹ Comptes rendus, tome CXVII, p. 786, 4. dec. 1893.

² The highest Met. Station in the world. American Met. Journal, October 1893.

Die jetzt veröffentlichten Ergebnisse der Aneroidregistrierungen auf dem Montblanc-Gipfel zeigen aber in der That noch ein ganz ausgesprochenes zweites Minimum am späten Nachmittage. Ich lasse zunächst die mir von Herrn A. Angot freundlichst mitgetheilten Ergebnisse der Reductionen der Aufzeichnungen vom 18. Juli bis 14. August hier folgen.

Luftdruckmittel Montblanc 4807 *m*.

1 ^h a.	4 ^h	7 ^h	10 ^h	1 ^h p.	4 ^h	7 ^h	10 ^h p.	Mittel
426·42	26·22	26·12	26·59	27·02	27·07	26·73	26·78	426·62

Diesen Luftdruckmitteln entspricht die Gleichung:

$$426·62 + 0·429 \sin(203^{\circ}5 + x) + 0·151 \sin(67^{\circ}6 + 2x)$$

Nach dem von Herrn J. Vallot nach den Mitteln für die Zeit vom 18. Juli bis 9. September gezeichneten Diagramme des täglichen Ganges verspätete sich das »Vormittagsmaximum« des Luftdruckes auf dem Montblanc bis 3^h Nachmittags, das Nachmittagsminimum tritt um 7^{1/2}^h Abends ein (das Barometer sinkt doch noch um 0·19 *mm*), das Abendmaximum fällt ganz normal auf 9^{1/2}^h Abends (+0·23), das Hauptminimum am Morgen tritt um 6^h früh ein (—0·53). Die folgende Zusammenstellung des täglichen Barometerganges auf dem Schafberg, Obir, Säntis, Sonnblick und Montblanc zeigt recht deutlich die continuirliche Verspätung des »Vormittagsmaximums« mit zunehmender Seehöhe, womit die Verspätung des Nachmittagsminimums gleichen Schritt hält. Auch die zunehmende Vertiefung des Morgenminimums tritt sehr charakteristisch hervor.

Täglicher Gang des Barometers im Sommer auf hohen
Alpengipfeln.

Zeit	Schafberg 1780 <i>m</i>	Obir 2040 <i>m</i>	Säntis 2500 <i>m</i>	Sonnblick 3100 <i>m</i>	Montblanc 4810 <i>m</i>
Mitternacht	·17	·20	·16	·18	·00
1	·03	·07	—·03	·00	—·15
2	—·13	—·09	—·18	—·15	—·25
3	—·28	—·25	—·30	—·32	—·35
4	—·35*	—·36	—·41	—·45	—·44
5	—·33	—·38*	—·44*	—·50*	—·49
6	—·29	—·33	—·39	—·45	—·53*
7	—·13	—·23	—·30	—·37	—·52
8	—·03	—·11	—·20	—·27	—·39
9	·06	·02	—·11	—·17	—·24
10	·14	·13	·00	—·04	—·06
11	·19	·22	·11	·08	·09
Mittag	·17	·24	·15	·16	·22
1	·13	·21	·17	·19	·33
2	·07	·13	·15	·21	·38
3	·03	·06	·14	·22	·39
4	—·04	—·02	·11	·19	·38
5	—·09*	—·08	·07*	·14	·33
6	—·08	—·12*	·08	·12*	·26
7	—·02	—·09	·13	·14	·20
8	·08	·04	·21	·19	·19*
9	·21	·21	·30	·30	·22
10	·24	·28	·30	·33	·23
11	·24	·27	·25	·29	·15

Die folgende kleine Tabelle enthält in übersichtlicher Zusammenstellung die Gleichungen des täglichen Ganges des Barometers für verschiedene Seehöhen. Diese letzteren sind relativ genommen, indem die mittlere Seehöhe der Basisstationen Genf und Salzburg (407 m und 430 m) von den absoluten Höhen abgezogen worden ist. Namentlich für das erste Glied, die einmalige tägliche Barometerschwankung, ist ja fast nur die relative Seehöhe massgebend. Die Zeit ist stets von Mitternacht an gezählt.

Ort	Relative Höhe hm	Täglicher Gang des Barometers im Sommer
Genf ¹	0	$0\cdot417 \sin (6\cdot9+x) + 0\cdot326 \sin (148\cdot8+2x)$
Salzburg	0	$0\cdot388 \sin (26\cdot5+x) + 0\cdot276 \sin (137\cdot5+2x)$
Wendelstein	13\cdot1	$0\cdot076 \sin (187\cdot8+x) + 0\cdot187 \sin (130\cdot8+2x)$
Schafberg	13\cdot6	$0\cdot123 \sin (195\cdot0+x) + 0\cdot214 \sin (127\cdot1+2x)$
Obir	16\cdot2	$0\cdot141 \sin (194\cdot3+x) + 0\cdot246 \sin (115\cdot2+2x)$
Säntis	20\cdot8	$0\cdot266 \sin (183\cdot1+x) + 0\cdot178 \sin (122\cdot4+2x)$
Sonnblick	26\cdot8	$0\cdot318 \sin (181\cdot7+x) + 0\cdot179 \sin (110\cdot3+2x)$
Montblanc	43\cdot9	$0\cdot425 \sin (194\cdot3+x) + 0\cdot130 \sin (82\cdot9+2x)$

Von der absoluten Seehöhe der Gipfelstationen in Hectometern ist gleichmässig 4\cdot2 abgezogen worden, um die »beiläufige« relative Höhe einigermaßen anzudeuten. Man sieht aus dieser Zusammenstellung die anfängliche Abnahme der Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung und die dann wieder folgende Zunahme derselben mit entgegengesetzten Phasenzeiten. Die Ursache dieser Erscheinung habe ich in meiner Abhandlung: »Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers« eingehender nachgewiesen.²

¹ Mitte Juli bis Anfang September 1877 correspondirend mit Montblanc; die übrigen Mittel mehrjährig.

² Denkschriften der Wiener Akademie, LIX. Band, Wien 1892. Tempsky.

Die Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation auf den hohen Alpengipfeln scheinen von der Seehöhe fast unabhängig zu sein. Der mittlere Werth der Winkelconstante ist 191° . Das Maximum fällt demnach auf $6\frac{3}{4}^h$ Abends, das Minimum auf $6\frac{3}{4}^h$ Morgens. Das Maximum des Luftdruckes tritt demnach viel später ein, als das der Temperatur. Für diese liegt die Winkelconstante bei 240° , das Maximum wie das Minimum tritt demnach mindestens drei Stunden früher ein.

Die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation nimmt ziemlich regelmässig im Verhältniss mit dem Luftdrucke mit der Höhe ab, aber auch die Winkelconstante wird mit der Höhe kleiner, was eine Verspätung der Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation mit der Höhe bedeutet, auf deren Ursache ich in meiner citirten Abhandlung gleichfalls hingewiesen habe.

Den allmäligen Übergang der Amplituden und der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Barometerschwankung von der Erdoberfläche bis zu jener relativen Höhe, in welcher die Phasenzeit in die entgegengesetzte umschlägt, vermag man aus den oben und ebenso aus den von mir früher mitgetheilten Beobachtungen nicht ersehen, weil die Zwischenstationen bisher fehlten. Es ist das Verdienst der königlich baierischen meteorologischen Centralstation in München, solche Zwischenstationen mit registrirenden Barometern versehen zu haben.

In dem Jahrgang 1892 der »Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Baiern« finden sich mit Juni beginnend die Ergebnisse zweistündlicher Reductionen dieser Aufzeichnungen bereits mitgetheilt.¹ Ich habe Mittel für die drei Sommermonate Juni, Juli, August gebildet und die correspondirenden Mittel für Obir, Säntis und Sonnblick zum Vergleiche beigegeben. So erhält man ein höchst lehrreiches Bild der allmäligen Modification des täglichen Barometerganges mit zunehmender Seehöhe, wie man ein solches bisher noch nie besessen hat. Die Station Hirschberg ist wohl keine eigentliche Gipfelstation, sondern nimmt eine Mittelstellung ein zwischen

¹ F. Erk, Die Resultate der Barometerregistrirung in München und Wendelstein, sowie in Hirschberg und Hohenpeissenberg im Jahre 1892. S. 147 und 148.

einer Gehängstation und einer Gipfelstation. Der etwas auffallende tägliche Gang des Barometers an derselben stimmt vollständig überein mit jenem zu Kolm Saigurn, einer Thalstation (mehr Gehängstation) in 1600 *m* absoluter Seehöhe; die relative Seehöhe aber stimmt wohl sehr nahe mit jener der Station Hirschberg überein. Diese beiden Stationen repräsentiren einen ganz aparten Typus des täglichen Barometerganges.

Täglicher Barometergang im Sommer 1892.

	München	Hohen- Peissen- berg	Hirsch- berg ¹	Wendel- stein	Obir	Säntis	Sonn- blick
Breite	48° 9'	47° 48'	47° 40'	47° 42'	46° 30'	47° 15'	47° 3'
Höhe	526·4	993·9	1512·0	1727·22	2044·0	2500·0	3106·5
Luftdruck . . .	716·8	678·4	638·2	622·1	598·4	566·5	525·1
Temperatur .	16·7	14·9	11·4	9·7	8·3	4·9	0·6
Mitternacht	·30	·26	·24	·18	—·15	·17	·12
2	·11	·04	—·05	—·10	—·10	—·17	—·17
4	·01	—·16	—·26	—·31	—·29	—·45	—·40
6	·20	—·07	—·15	—·21	—·27	—·38	—·36
8	·36	·12	·01	·00	—·06	—·17	—·20
10	·33	·22	·07	·10	·11	—·01	·05
Mittag	·08	·08	·01	·10	·18	·14	·15
2	—·32	—·17	—·12	—·02	·11	·16	·24
4	—·62	—·31	—·20	—·12	·03	·11	·14
6	—·55	—·31	—·12	—·10	—·08	·08	·04
8	—·13	—·02	·19	·15	·00	·20	·14
10	·19	·28	·37	·30	·20	·31	·24

¹ Täglicher Gang des Barometers zu Kolm Saigurn, 1600 *m*:

Mittn.	2 ^h	4 ^h	6 ^h	8 ^h	10 ^h	Mittg.	2 ^h	4 ^h	6 ^h	8 ^h	10 ^h
·27	—·13	—·32	—·24	—·05	·07	·03	—·07	—·11	—·05	·23	·41

Diesen Zahlenwerthen entsprechen folgende Gleichungen:

München	$0\cdot346 \sin (15^{\circ}1+x)+0\cdot289 \sin (141\cdot8+2x)$
Peissenberg	$0\cdot117 \sin (36\cdot7+x)+0\cdot251 \sin (133\cdot6+2x)$
Hirschberg	$0\cdot118 \sin (120\cdot1+x)+0\cdot225 \sin (144\cdot4+2x)$
Wendelstein	$0\cdot095 \sin (163\cdot5+x)+0\cdot214 \sin (138\cdot0+2x)$
Obir	$0\cdot124 \sin (202\cdot1+x)+0\cdot179 \sin (114\cdot7+2x)$
Säntis	$0\cdot267 \sin (182\cdot6+x)+0\cdot181 \sin (122\cdot8+2x)$
Sonnblick	$0\cdot249 \sin (192\cdot3+x)+0\cdot167 \sin (111\cdot5+2x)$

Die vorstehende Tabelle und die darauf gegründeten Gleichungen des täglichen Ganges zeigen in sehr instructiver Weise den Übergang der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation des Barometers von einem Maximum am Morgen bis zu einem Maximum am Nachmittage auf den hohen Gipfelstationen. Die Winkelconstante geht allmählig aus dem ersten Quadranten in den dritten über. Zugleich nimmt die Amplitude zuerst ab und dann wieder zu (dass Peissenberg eine so kleine Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung hat, ist wohl nur eine Zufälligkeit des Mittels von bloss drei Monaten). Für diese Verhältnisse ist der Natur der Sache nach nur die relative Seehöhe massgebend, d. i. die Mächtigkeit der unterhalb der Station befindlichen Luftschichte. Man darf nach den Ergebnissen der baierischen Stationen wohl annehmen, dass in einer relativen Seehöhe von 1300—1400 *m* die Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung im Sommer nahezu verschwunden ist und die Phasenzeiten darüber hinaus in die entgegengesetzten von jenen am Erdboden übergehen. Das hängt aber natürlich nicht bloss von der Mächtigkeit der unterlagernden Luftschichte, sondern auch von der Grösse der täglichen Temperaturschwankung in derselben ab. Wenn die normale einmalige Barometerschwankung am Erdboden nicht genau die entgegengesetzten Phasenzeiten hat von jenen des Temperaturganges in der überlagernden Luftschichte, so wird die Combination derselben mit der rein »thermischen« Barometerschwankung in 1300—1400 *m* Seehöhe keineswegs die Barometerschwankung daselbst ganz aufheben, sondern es wird eine solche von geringer Amplitude mit zwischenliegenden Phasenzeiten übrigbleiben. Auf solche Verhältnisse scheint die

tägliche Barometerschwankung auf dem Wendelstein hinzu-deuten.

Es ist interessant zu bemerken, wie in einer relativen Seehöhe von etwa 1000 *m* das Vormittagsmaximum des Barometers zwar zur normalen Zeit eintritt, aber ausserordentlich abgeschwächt erscheint.

Die vorstehenden Erörterungen gelten selbstverständlich nur für den Sommer oder für die Zeit, wo die »thermische« Druckschwankung in der Höhe am grössten ist. Im Winter reicht die normale einmalige tägliche Barometerschwankung bis zu viel grösseren Höhen hinauf.

Das Nachmittagsminimum und Abendmaximum auf sehr hohen Berggipfeln. Es hat einiges Interesse, sich specieller Rechenschaft darüber zu geben, wie es kommt, dass selbst auf dem Montblanc-Gipfel in nahe 5 *km* Seehöhe das zweite Minimum im täglichen Gange des Barometers noch nicht verschwunden ist, und wesshalb das Abendmaximum des Barometers mit der Höhe zunimmt.

Renou hat die Ansicht ausgesprochen, dass in sehr grosser Höhe der Atmosphäre der tägliche Gang des Barometers bloss ein Maximum um 4^h Nachmittags und ein Minimum um 4^h Morgens haben dürfte.¹ Nach den neueren Ergebnissen der Luftdruckregistrierungen auf den hohen Alpengipfeln scheint es mir zweifelhaft geworden zu sein, ob dies für die Tropengegenden mit ihrer grossen doppelten täglichen Barometerschwankung in der That noch angenommen werden darf. Jedenfalls werden aber diese Extreme nach den neueren Erfahrungen näher bei der Stunde 6^h als 4^h zu finden sein.

Um diesem Problem etwas näher zu treten, habe ich mir zunächst die Frage vorgelegt: wie müsste der Temperaturgang in der 1700 *m* mächtigen Luftschicht zwischen Montblanc- und Sonnblickgipfel beschaffen sein, damit auf ersterem der tägliche Gang des Barometers nur mehr ein Maximum und ein Minimum haben würde?

Zu diesem Zwecke wurde der Gang des Luftdruckes auf dem Sonnblickgipfel (Mittel Juli—August von 4 Jahren) auf die

¹ De l'oscillation diurne du baromètre par E. Renou. Comptes rendus de l'Acad. d. Sc. 1878, I. Sem., tome 86.

Höhe des Montblanc-Gipfels reducirt (d. h. die Amplituden im Verhältniss von 426:525 *mm* Luftdruck verkleinert). Man erhält derart

$$0\cdot241 \sin (182^{\circ} + x) + 0\cdot145 \sin (111^{\circ} + 2x);$$

das wäre die Gleichung des täglichen Ganges des Luftdruckes auf dem Montblanc-Gipfel, wenn es in der Luftschichte zwischen 3100 *m* und 4800 *m* gar keine tägliche Temperaturvariation geben würde. Aus dieser Gleichung ergeben sich folgende Luftdruckabweichungen für zweistündige Intervalle:

	0 ^h	2 ^h	4 ^h	6 ^h	8 ^h	10 ^h
Vormittag						
Einfache Welle	—·008	—·128	—·213	—·241	—·205	—·113
Doppelte Welle	·136	·022	—·113	—·136	—·022	·113
Summe ..	·128	—·106	—·326	—·377	—·227	·000
Nachmittag						
Einfache Welle	·008	·128	·213	·241	·205	·113
Doppelte Welle	·136	·022	—·113	—·136	—·022	·113
Summe ..	·144	·150	·100	·105	·183	·226

Man sieht zunächst aus dieser kleinen Tabelle, wie das hohe Maximum der Hochstationen am Abende zustande kommt, d. i. durch die Auflagerung des Maximums der doppelten täglichen Oscillation auf einen Theil des Wellenberges der einmaligen täglichen Schwankung. Da die Amplitude der letzteren mit der Höhe zunimmt, die Phasenzeit sich aber dabei fast gleich bleibt, so wächst die Summe beider Wellen für die Stunde 10^h etwas schneller, als sie beide vermöge der Druckabnahme mit der Höhe kleiner werden; freilich nur bis zu einer gewissen, aber schon sehr grossen Höhe.

Die erste Welle erreicht ihren Scheitelpunkt etwas vor 6^h Abends, gleichzeitig tritt aber bei der doppelten täglichen Oscillation das Wellenthal ein. Die Superposition der entgegengesetzten Phasen der beiden Wellen erzeugt das späte Nachmittagsminimum auf den hohen Berggipfeln.

Sollte dieses Minimum ausbleiben, so müsste mindestens folgende Ungleichheit bestehen, wenn wir mit x die gesuchte Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung bezeichnen, welche diesen Effect zu erzielen im Stande wäre:

$$x - 0.136 > 0.113 + x \sin 30^\circ, \text{ d. i. } > 113 + \frac{x}{2},$$

$$x > 272 + 226, \text{ d. i. } > 498.$$

Wenn also die Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung auf dem Montblanc-Gipfel 0.50 mm wäre, so würde der Gang des Barometers auf demselben nur mehr ein Maximum und ein Minimum zeigen. Der tägliche Gang des Barometers in 4810 m würde dann sein:

Mittn.	2 ^h	4 ^h	6 ^h	8 ^h	10 ^h	Mittag	2 ^h	4 ^h	6 ^h	8 ^h	10 ^h
·06	·24	·55	·64	·45	·12	·21	·29	·33	·36	·40	·35

Das Abendmaximum würde dann auf 8^h fallen. Wie man leicht findet, würde eine tägliche Wärmeschwankung von 0.76° in der Luftschichte zwischen 3100 m und 4800 m genügen, um die Amplitude der einmaligen thermischen Druckschwankung auf 0.5 mm zu erhöhen und so den obigen Effect hervorzu-bringen.

Aus dem correspondirenden täglichen Gange des Barometers auf dem Sonnblick- und Montblanc-Gipfel (16. Juli bis 10. September 1887) findet man für den täglichen Wärme-gang in der zwischenliegenden Luftschichte von 1700 m die Gleichung

$$0.49 \sin (189^\circ + x) + 0.23 \sin (354 + 2x).$$

Die einfache tägliche Wärmewelle hat also nur eine Amplitude von $\frac{1}{2}^\circ$ statt $\frac{3}{4}^\circ \text{ C.}$, wie sie zur Unterdrückung des secundären Abendminimums nöthig wäre.

Wenn man den früher berechneten täglichen Gang des Barometers auf dem Sonnblickgipfel reducirt auf Montblanc-höhe graphisch darstellt und dann durch eine Curve aus freier Hand das Abendminimum unterdrückt und der Curve nur ein Abendmaximum gibt, was sich in der That nur auf eine Weise ungezwungen erzielen lässt, so erhält man auf einem anderen Wege die Ordinaten der einmaligen thermischen Welle, welche den täglichen Barometergang auf dem Montblanc-Gipfel zu einer einfachen Welle gestalten würde. Die Amplitude fällt dann etwas grösser aus und das Abendmaximum verlagert

sich auf $5\frac{1}{2}^h$ p. Die Gleichung dieses Barometerganges wäre:

$$0\cdot599 \sin (191^\circ + x) + 0\cdot145^\circ \sin (111^\circ + 2x).$$

Die Amplitude der täglichen Wärmeschwankung in der Luftschichte zwischen Montblanc und Sonnblick müsste dann $1^\circ05$ sein, d. i. mehr als zweimal so gross als sie aus dem beobachteten Barometergang in 4800 *m* zu erschliessen ist, aber immer noch viel kleiner als die Registrirungen der Lufttemperatur auf dem Montblanc-Gipfel ergeben haben.

Unterdrückt man in der von Herrn Vallot mitgetheilten Curve des täglichen Barometerganges auf dem Montblanc das kleine secundäre Abendminimum durch freie Ergänzung der Curve, die sich auch ganz ungezwungen ergibt, so erhält man ein Maximum um 6^h p. etwa mit der Ordinate $+0\cdot50$ und ein Minimum um $6\frac{1}{2}^h$ Morgens mit $-0\cdot60$. Diese Curve stellt aber keinen reellen Barometergang mehr vor, weil die doppelte tägliche Oscillation fast völlig aufgehoben erscheint, was ganz unnatürlich wäre.¹ Der vorhin eingeschlagene Weg zur Kenntniss der Bedingungen zu gelangen, unter denen auf dem Montblanc-Gipfel der tägliche Barometergang nur ein Maximum und ein Minimum haben würde, ist desshalb der richtigere.

Die Luftdruckregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel durch Herrn Vallot beweisen abermals, dass die tägliche Temperaturschwankung in den freien höheren Schichten der Atmosphäre viel kleiner ist, als man sie auf Grund der directen Beobachtungen annehmen müsste. Es scheint mir, dass die Luftdruckregistrirungen auf Berggipfeln gerade dadurch ein besonderes Interesse erlangen, dass sie uns gestatten, Schlüsse auf die tägliche Temperaturvariation in den freien atmosphärischen Luftschichten zu ziehen, die auf einem anderen Wege kaum zu erzielen wären. Um die Anwendbarkeit meiner Methode der Berechnung des täglichen Wärmeganges in der freien Atmosphäre aus dem täglichen Gange des Barometers auf Berggipfel zu zeigen, habe ich für einige Höhengschichten

¹ Die Gleichung dieser Curve ist:

$$0\cdot543 \sin (205^\circ + x) + 0\cdot048 \sin (128^\circ2 + 2x).$$

den täglichen Wärmegang aus dem Barometergang passend gewählter Gipfelstationen berechnet, wozu mir namentlich als Mittelglieder die bairischen Stationen besonders dienlich waren. Dieselben gestatten die Abnahme der Amplituden der täglichen Temperaturvariation mit der Höhe in der freien Atmosphäre aufs Deutlichste vor Augen zu führen. Ich halte die nachfolgenden Rechnungsergebnisse mehr nur als Proben für die Anwendbarkeit der Methode als für irgend definitive oder absolute Werthe. Um solche zu erhalten, müssten erstlich gleichzeitige Registrirungen verwendet werden, und dann müssten noch manche Fehlerquellen eliminirt werden, die den jetzigen Luftdruckregistrirungen auf Berggipfeln und deren Reductionen noch anhaften und die sich störend erweisen, wo, wie im vorliegenden Falle, äusserste Genauigkeit erforderlich erscheint.¹

Die Berechnung des Temperaturganges in der verticalen Luftschichte zwischen zwei Stationen verschiedener Seehöhe aus dem bekannten täglichen Gange des Barometers an denselben wurde in folgender Weise geführt.

Z. B. München. Luftdruck 716·8, Temperatur 16·7, Seehöhe 526·4. Hohenpeissenberg. Luftdruck 678·4, Temperatur 14·9, Seehöhe 993·9. $\Delta h = 467·5$; $678·4 : 716·8 = 0·946$; Factor zur Reduction der Druckschwankungen auf Temperaturschwankung in der zwischenliegenden Luftschichte, d. i. der Quotient. $R T^2 : b \Delta h = 7·44$ (wobei T_0 , um der Luftfeuchtigkeit Rechnung zu tragen $= 263^\circ$ oder $\alpha = 0·0038$ und R dementsprechend $= 30·37$ gesetzt wurde; bei Temperaturen unter Null wurde $T = 273$ und $R = 29·3$ gesetzt).

Bezeichnet man ferner, wie schon früher, die Coëfficienten der harmonischen Reihen mit $p_1 q_1$; $p_2 q_2$, so steht die Rechnung wie folgt:

¹ Wenn Herr Richard seinen registirenden Aneroiden (grosses Modell) eine Temperaturregistrirung (auf demselben Papierblatte) begeben würde, was leicht ausführbar wäre und den Preis der Instrumente nur wenig erhöhen dürfte, so würde der tägliche Gang des Luftdruckes mittelst derselben mit viel grösserer Sicherheit abgeleitet werden können.

Täglicher Gang des Barometers (Sommer 1892).

	p_1	q_1	q_2	p_2
<i>A</i> München.....	+0·090	+0·334	+0·179	—0·227
<i>Ar</i> red. auf Peissenb. +	0·085	+0·316	+0·169	—0·215
<i>B</i> Peissenb. (beob.) . +	0·070	+0·094	+0·182	—0·173
<i>B—Ar</i> (thermische Druckschwankung) —	0·015	—0·222	+0·013	+0·042

Gleichung der thermischen Druckschwankung somit:

$$0\cdot222 \sin (183\cdot9+x)+0\cdot044 \sin (17\cdot2+x).$$

Daraus folgt durch Multiplication der Coëfficienten mit 7·44 als Gleichung der täglichen Temperaturvariation in der Luftschichte zwischen München und Hohenpeissenberg:

$$1\cdot66 \sin (183\cdot9+x) + 0\cdot33 \sin (17\cdot2+2x).$$

In analoger Weise wurden auch die nachfolgenden Gleichungen des täglichen Wärmeganges erhalten. Jene für das Höhenintervall Paris—Eiffelthurm ist aus den Beobachtungen im Sommer 1890 abgeleitet worden. Als beiläufige mittlere Seehöhe der Luftschichte, für welche die angegebene tägliche Temperaturvariation gilt, ist die mittlere relative Höhe (über dem Erdboden) derselben eingestellt. Z. B. Peissenberg hat circa 470 *m* relative Höhe, Wendelstein 1200 *m*; die Luftschichte zwischen den Stationen hat demnach circa 840 *m* relative Höhe; München—Peissenberg 240 *m* etc.

Stationspaare	Relative Höhe der Luftschichte	Gleichung des täglichen Wärmeganges in derselben im Sommer
Paris—Eiffelthurm	140 <i>m</i>	$2\cdot16 \sin (207^\circ+x)+0\cdot45 \sin (54+2x)$
München—Peissenberg ..	240	$1\cdot66 \sin (184+x)+0\cdot33 \sin (17+2x)$
München—Wendelstein ¹ .	630	$1\cdot10 \sin (197+x)+0\cdot18 \sin (13+2x)$
Peissenberg—Hirschberg.	730	$1\cdot06 \sin (166+x)+0\cdot31 \sin (243+2x)$
Peissenberg—Wendelst. .	840	$0\cdot87 \sin (192+x)+0\cdot01 \sin (270+2x)$
Schafberg ² —Sonnblick ..	2000	$0\cdot72 \sin (174+x)+0\cdot12 \sin (18+2x)$
Säntis—Montblanc.	3200	$0\cdot52 \sin (204+x)+0\cdot19 \sin (5+2x)$

¹ München, Salzburg, als untere Station genommen und verglichen mit Wendelstein Schafberg.

² Mittel aus Schafberg und Obir.

Ich habe auch versucht, die mittlere Temperaturvariation in der ganzen Luftschichte zwischen dem Montblanc-Gipfel und der Erdoberfläche zu berechnen. Als untere Stationen nahm ich Genf einerseits, Mailand und Turin anderseits.¹ Auf diese Weise erhielt ich folgenden täglichen Temperaturgang in der circa 4400 *m* mächtigen Luftschichte:

$$0^{\circ}98 \sin (203^{\circ} + x) + 0^{\circ}17 \sin (15^{\circ} + 2x).$$

Das Resultat stimmt sehr gut mit dem partiell berechneten täglichen Wärmegang in den einzelnen Höhenstufen.²

Die Amplitude der aus dem täglichen Barometergange auf den Gipfelstationen von verschiedener Seehöhe berechneten täglichen Temperaturvariation nimmt demnach mit der Höhe ziemlich regelmässig ab, wie es sein muss, wenn dem Rechnungsergebnisse eine reelle Bedeutung zugesprochen werden soll.

Die Winkelconstante des ersten massgebenden Gliedes ist im Mittel der ersten drei Stationen 196° , im Mittel der drei letzten 190° , also so gut wie übereinstimmend für alle See-

¹ Der tägliche Barometergang im Mittel dieser Stationen ist:

$$0^{\circ}45 \sin (357^{\circ} + x) + 0^{\circ}33 \sin (144^{\circ}4 + 2x)$$

² Das seitliche Ausweichen der Luft bei der thermischen Ausdehnung der Luft in den Thälern kann bewirken, dass auf den umgebenden Berghöhen die Drucksteigerung am Nachmittage nicht mit dem vollen Betrage, d. i. der Temperaturamplitude entsprechend, zur Geltung kommt. Der mögliche Maximal-effect dieser Abstumpfung der täglichen thermischen Druckvariation auf den Berggipfeln lässt sich aber leicht beurtheilen aus der abnormen Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung in den Thälern unten. Nehmen wir z. B. an, dieselbe betrüge zu Chamonix und Courmayeur 1.0 *mm* statt 0.45 *mm* wie draussen im Vorlande der Alpen. Die Differenz 0.55 *mm* kommt auf Rechnung des seitlichen Abfliessens der Luft gegen die geneigten Bergabhänge. Für den Montblanc-Gipfel könnte dies eine Verringerung der thermischen Druckschwankung um 0.32 bewirken und die Amplitude derselben könnte deshalb, wenn der Montblanc auf einer freien Ebene liegen würde, 0.75 statt wie jetzt 0.43 betragen. Hätten wir oben Chamonix und Courmayeur als untere Stationen gewählt, so würden wir die Temperaturamplitude 1.73 statt 0.98 gefunden haben, unter der gegebenen Voraussetzung. Auf die Berechnung der Temperaturamplituden in den Luftschichten zwischen Gipfelstationen hat diese Bemerkung keine Geltung.

höhen.¹ Nehmen wir 195° rund im Mittel, so würde in den freien Luftschichten der Hauptsache nach (im Sommer) das Temperatur-Minimum um 5^h Morgens und das Maximum um 5^h Abends eintreten, was durchaus nicht unwahrscheinlich ist. Die Winkelconstante des zweiten Gliedes liegt, wie bei dem Temperaturgang an der Erdoberfläche, im ersten Quadranten. Man erhält also aus den Unterschieden des täglichen Barometerganges an den Gipfelstationen verschiedener Seehöhe einen täglichen Temperaturgang, welcher grosse Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Theoretisch besteht kein Zweifel darüber, dass so lange man die barometrische Höhenformel anwenden darf, man auch aus den Druckunterschieden in den verschiedenen Niveaux die Temperatur der zwischen liegenden Luftschichte berechnen kann. Da zur Ableitung der Temperaturvariationen in denselben die Kenntniss der Barometercorrectionen und die genaue Seehöhe der Stationen nicht erforderlich ist, so kann selbe mit grosser Genauigkeit erfolgen, wenn die Registrirbarometer die Druckvariationen genau liefern. Da auf den täglichen Gang des Wasserdampfgehaltes der Luft nur angenähert Rücksicht genommen werden konnte, so kann derselbe noch einigen Einfluss auf die obigen Rechnungsergebnisse haben, der aber gewiss sehr geringfügig sein dürfte.

Wenn wir auch durch mancherlei Erfahrungen darauf vorbereitet sein müssen, dass die Amplituden der täglichen Temperaturvariation in der freien Atmosphäre viel kleiner sein werden, als sie sich aus den Beobachtungen an festen Stationen an der Erdoberfläche und auf Berggipfeln direct ergeben, so sind doch die überraschend kleinen täglichen Temperaturschwankungen, wie sie sich aus den Luftdruckschwankungen berechnen lassen, geeignet, stutzig zu machen und Bedenken gegen deren Richtigkeit einzuflössen.

Solche Bedenken hat jüngst Herr A. Angot geäußert in einer kurzen Discussion jener Registrirungen des Luft-

¹ Peissenberg—Hirschberg bleibt am besten unberücksichtigt, da Hirschberg Eigenthümlichkeiten zeigt, wie sie vielleicht nur den Stationen an Bergabhängen zukommen.

druckes auf dem Montblanc-Gipfel, die wir vorhin auch benutzt haben.¹

Aus den dreistündigen Temperaturbeobachtungen auf dem Montblanc, zu Bern, Genf und Lyon leitet er für die tägliche Temperaturvariation in der zwischenliegenden Luftschichte die Gleichung ab:

$$\Delta T = 3^{\circ}11 \sin (230^{\circ} + x) + 0^{\circ}32 \sin (69^{\circ} + 2x).$$

Daraus ergibt sich, wie er bemerkt, als Luftdruckvariation auf dem Montblanc-Gipfel:

$$2^{\circ}55 \sin (230^{\circ} + x) + 0^{\circ}26 \sin (69^{\circ} + 2x).$$

Die wirklich beobachtete Druckvariation bleibt nun, wie wir bereits wissen, weit hinter dieser berechneten Variation zurück, was wir eben dadurch erklären, dass die beobachteten täglichen Temperaturvariationen viel zu gross sind.² Herr Angot glaubt das nicht gelten lassen zu dürfen, indem er das arithmetische Mittel der unten und oben beobachteten Temperaturvariation für die zwischenliegende Luftschicht als gültig annehmen zu müssen vermeint.

¹ Sur la variation diurne de la pression au sommet du mont Blanc. Comptes rendus. 11. déc. 1893. Tome CXVII, p. 847.

² Ein, soweit man den directen Beobachtungen folgen darf, genauerer Ausdruck für die tägliche Temperaturvariation zwischen Montblanc-Gipfel und dem Niveau von Genf wäre folgender:

Täglicher Temperaturgang:

	p_1	q_1	p_2	q_2
Genf 407 m	—3·88	—3·31	+0·57	+0·01
Chamonix—Grands Mulets				
2020 m	—4·05	—1·93	+1·06	+0·18
Montblanc 4807 m	—1·78	—0·44	+0·40	+0·02
Mittel	—3·24	—1·89	+0·68	+0·07

Daraus folgt als Gleichung des täglichen Wärmeganges in der Luftschichte von 4400 m Mächtigkeit

$$\Delta T = 3^{\circ}75 \sin (239^{\circ}8 + x) + 0^{\circ}68 \sin (84^{\circ}1 + 2x),$$

welche natürlich eine noch grössere Druckvariation auf dem Montblanc ergeben würde.

Um aber dem Widerspruch mit den daraus folgenden grossen Druckvariationen auf den Berggipfeln zu begegnen, glaubt Herr Angot annehmen zu können, dass in Folge der Erwärmung Luft seitlich abfliesst, wodurch dann die Druckvariationen auf den Bergen kleiner werden. Er sagt »Eine andere Erklärung der Widersprüche« (als die meine) »zwischen Rechnung und Beobachtung scheint einfacher. Man hat für die Rechnung angenommen, dass die Luft wie in einem verticalen Cylinder sich ausdehnt, ohne seitliche Bewegung. Aber in dem Masse, als die Luft sich in einer Gegend ausdehnt, fliesst sie wahrscheinlich seitlich nach minder erwärmten Gegenden ab, so dass nicht die ganze Luftmasse emporsteigt, die in Rechnung gestellt wird; der wirkliche Effect wird daher auch nur ein Bruchtheil des berechneten Effectes sein.«

Auf den ersten Eindruck hin könnte Manchem diese Erklärung zureichend scheinen, darum ist es wohl nöthig, darauf aufmerksam zu machen, dass sie physikalisch nicht haltbar ist und auf einem Übersehen oder auf einem Missverständniss beruht. Ob Luft horizontal zufliesst oder abfliesst hat auf die Giltigkeit meiner Berechnungen der Temperaturvariationen aus den Druckvariationen keinen Einfluss. Wenn durch ein Abfliessen der Luft der Druck unten (Barometerstand B) um ΔB sinkt, so sinkt er auch oben (Barometerstand b) um $\Delta B \times (b:B)$ und die Druckdifferenz beider Stationen bleibt wie früher nur eine Function der Temperatur (und des Wasserdampfgehaltes) der zwischenliegenden Luftschichte. Durch ein Abfliessen der erwärmten Luft kann man demnach die aus der Rechnung sich ergebenden kleinen Temperaturamplituden nicht erklären.

Übrigens ist ein solches tägliches periodisches Abfliessen und Zufliesen der Luft in dem Masse, dass dadurch tägliche Druckschwankungen von 4 mm in 4800 m Seehöhe entstehen, respective unterdrückt werden, im höchsten Grade unwahrscheinlich und widerspricht allen Beobachtungen. Man müsste ja doch an den Orten, wohin die Luft abfliesst, eine entsprechend grosse Druckzunahme am Nachmittage (bis zu $3\frac{1}{2}\text{ mm}$) beobachten können in Form einer totalen Umkehrung des täglichen Barometerganges. Davon ist aber nirgend wo etwas zu bemerken.

Man kann leicht berechnen, welchen Effect das von Herrn Angot angenommene tägliche Abfließen der Luft (am Nachmittage und Wiederzuströmen bei Nacht) in der Umgebung des Montblanc auf den täglichen Barometergang zu Genf haben müsste.

Die von Herrn Angot aufgestellte tägliche Barometervariation auf dem Montblanc-Gipfel ergibt:

	p_1	q_1	p_2	q_2
Thermische Druckschwankung auf				
dem Montblanc	-1·954	-1·639	+0·243	+0·093
Beobachtete Druckschwankung...	-0·267	-0·336	+0·150	-0·020
Differenz	-1·687	-1·303	+0·093	+0·113
Reducirt auf Genf (728 : 426).....	-2·879	-2·224	+0·159	+0·193

Der Ausdruck für die periodische tägliche Abnahme und Zunahme des Druckes, welche nöthig wäre, um die durch die beobachteten täglichen Temperaturamplituden hervorgerufenen Druckschwankungen auf dem Montblanc-Gipfel bis zu der beobachteten Grösse herabzumindern, wäre demnach:

Tägliche Druckschwankung in Genf in Folge des vorausgesetzten periodischen Abfließens und Zuströmens der Luft

$$3\cdot64 \sin (232\cdot3+x) + 0\cdot25 \sin (39\cdot5+2x).$$

Es würde also in Genf eine tägliche Druckvariation von mindestens 7 *mm* nöthig sein, um die Druckschwankungen auf dem Montblanc-Gipfel auf die beobachtete Amplitude herabzudrücken, wenn die tägliche Variation der Lufttemperatur in der That dem arithmetischen Mittel der unten und oben beobachteten Temperaturvariation gleich wäre.

Durch die Annahme eines periodischen Abströmens und Zufließens der Luft kann man desshalb die beobachteten geringen thermischen Druckschwankungen auf den Berggipfeln nicht verträglich machen mit den beobachteten Temperaturschwankungen, wenn man selbe für die freie Atmosphäre gelten lassen will. Dass die von mir für letztere berechneten Temperaturvariationen nicht völlig richtig sein werden, gebe ich gerne zu und habe auch schon auf eine der Ursachen hin-

gewiesen,¹ welche die täglichen Druckvariationen auf Berggipfeln von jenen der freien Atmosphäre etwas abweichend gestalten mögen.

Nur Stationen wie jene auf dem Eiffelthurm sind von jedem derartigen Einwurfe frei, denn die von Herrn Teisserenc de Bort angenommenen dynamischen Druckschwankungen scheinen mir, wenigstens in dem angenommenen Betrage, vorläufig noch höchst unwahrscheinlich zu sein. Sollte die tägliche Windperiode in Folge der saugenden Wirkung des Windes auf den täglichen Barometergang einen merklichen Einfluss haben, so würde derselbe, da ja das Maximum der Windstärke in der Höhe auf die Nachtstunden fällt, dem Sinne nach mit der thermischen Druckschwankung übereinstimmen, sich zu selber addiren und die aus dem Luftdrucke berechneten Temperaturamplituden noch vergrößern, statt sie zu verkleinern. Und doch weist selbst auf dem Eiffelthurm die tägliche Barometerschwankung auf eine tägliche Temperaturamplitude der unterhalb liegenden Luftschichte von kaum 2°2 hin, während selbe nach den Thermometerständen unten und oben 3°3 sein würde.²

Die Ergebnisse der Luftdruckregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel stehen also in vollkommener Übereinstimmung mit jenen auf anderen Gipfelstationen und auch jenen auf dem Eiffelthurm, indem sie dafür sprechen, dass in den höheren Schichten der freien Atmosphäre die tägliche Wärmeschwankung viel kleiner ist, als die directen Temperaturmessungen sie zu ergeben scheinen.

¹ Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften Bd. LIX.

² Täglicher Temperaturgang zwischen Eiffelthurm und Paris (Δh 279 m):

Beobachtet $3.34 \sin (229^\circ + x) + 0.37 \sin (66^\circ + 2x)$

Aus der Druckschwankung berechnet $2.16 \sin (207^\circ + x) + 0.45 \sin (54^\circ + 2x)$

Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen

von

Franz Streintz.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

Die beiden Salzlösungen im Daniell-Elemente beeinflussen dasselbe bekanntlich in einer Weise, dass die Vergrößerung der Concentration des ZnSO_4 mit einer Abnahme, die des CuSO_4 hingegen mit einer Zunahme der elektromotorischen Kraft verbunden ist. In den einschlägigen Arbeiten von Kittler¹ und G. Meyer² sind die Concentrationen der Lösungen aus ihren specifischen Gewichten oder nach Gewichtsprocenten bestimmt worden.

Mit Rücksicht auf den Entwicklungsgang der Elektrochemie erscheint es von Bedeutung, die Lösungen so herzustellen, dass sie in molecular einfachen Verhältnissen stehen. Derartige Versuche an Elementen, welche aus zwei Metallen in den entsprechenden Salzlösungen bestanden, sind von A. Wright und C. Thompson³ angestellt worden; das Daniell-Element war mit äquimolecularen Lösungen von Zink- und Kupfersulfat nach dem Schema $m\text{MSO}_4 \cdot 100\text{H}_2\text{O}$ beschickt worden;

¹ Kittler, Wied. Ann., 17. S. 894, 1882.

² G. Meyer, Wied. Ann., 33, S. 277, 1888.

³ A. Wright und C. Thompson, Phil. Mag., V, S. 19, p. 17 und 209, 1885.

dabei wurde m innerhalb der Grenzen von 0·1 bis 2·25 verändert. Es ergab sich eine von m unabhängige elektromotorische Kraft von 1·114 Volt. Löst man also je ein Gramm-Molekül der beiden wasserfreien Salze in gleichen Mengen Wasser auf, so bleibt die elektromotorische Kraft constant, wenn die Verdünnung von 0·8 l bis 18 l fortschreitet.

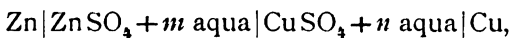
Zweck der vorliegenden Mittheilung ist der Nachweis, dass dieser Satz in weitem Umfange besteht und nicht nur für äquimoleculare Lösungen gilt, sondern auch dann, wenn das Verhältniss des Salzgehaltes derselben einen beliebigen constanten Werth besitzt.

Das Element bestand aus einem kleinen Becherglase, welches einen Kupferstreifen und eine Thonzelle enthielt; in die letztere wurde ein Stäbchen von amalgamirtem Zink gesenkt. Durch Auflösen eines Gramm-Moleküls ZnSO_4 , beziehungsweise CuSO_4 in je einem Liter Wasser, die Krystallwasser eingerechnet, wurden zweifach normale Lösungen hergestellt, welche beliebigen Verdünnungen unterworfen werden konnten. Die Salze waren als chemisch rein bezogen.

Zu den Messungen diente ein tadellos functionirendes Quadrantenelektrometer. Es wurden regelmässig die ersten Ausschläge nach beiden Seiten der Ruhelage beobachtet. Ein Normal-Clark-Element rief einen solchen von 160 mm an einer über 300 cm vom Spiegel des Instrumentes entfernt aufgestellten Scala hervor. Zehntel eines Millimeters konnten noch mit Sicherheit geschätzt werden.

Selbstverständlich wurde auf das Reinigen der verwendeten Gefässe und der Metalle besondere Aufmerksamkeit gerichtet; zudem gebrauchte man die Vorsicht, das Element mit den neuen Lösungen gefüllt durch einige Minuten zunächst sich selbst zu überlassen, dann jene abzuhebern und durch gleichartige zu ersetzen. Dann erst wurden die Bestimmungen vorgenommen.

Bezeichnet man die Combination durch



wobei m und n in Litern ausgedrückt werden, so ergeben sich nachstehende Resultate:

1. $\frac{m}{n} = 1$. (Äquimoleculare Lösungen.)

m	E_1	m	E_1
1	1·114 V.	16	1·114 V.
2	1·114	32	1·114
4	1·113	64	1·112
8	1·114	128	1·107
		256	1·099

Die Zahlen stehen in vollständiger Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Wright und Thompson. Innerhalb des Intervalles von $m = 1$ bis 64 ist E. K. vollkommen constant und ergibt einen Mittelwerth $E_1 = 1·1136$ V. Über diese Verdünnungsgrenze hinaus nimmt E_1 ab.

2. $\frac{m}{n} = 2$.

n	E_2	n	E_2
8	1·107 V.	64	1·108 V.
16	1·106	128	1·105
32	1·105	256	1·105
	1·107		

Eine Veränderung der elektromotorischen Kraft ist hier auch bei grossen Verdünnungen nicht aufgetreten. Der Mittelwerth E_2 beträgt 1·1061 V.

3. $\frac{m}{n} = 8$.

n	E_8	n	E_8
8	1·099 V.	64	1·098 V.
16	1·098	128	1·099
32	1·097	256	1·101

Für $n = 8$ bis 128 ist im Mittel $E_8 = 1·0982$ V.

4. $\frac{m}{n} = 32$.

n	E_{32}	n	E_{32}
32	1·092 V.	256	1·093
64	1·091	512	1·095
128	1·091		

Mittel für $n = 32$ bis 256 , $E_{32} = 1.0917$ V.

Es sei hervorgehoben, dass die Werthe für E bei grossen Verdünnungen des Kupfervitriols sich einem Grenzwerte nähern, welcher bei 1.100 V. gelegen ist.

Bei den unter 2., 3. und 4. mitgetheilten Beobachtungen stand einer concentrirteren Zinklösung eine verdünntere Kupferlösung gegenüber. Verfährt man in entgegengesetzter Weise, so ergibt sich:

$$5. \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

m	$E_{1/2}$	m	$E_{1/2}$
2	1.119 V.	32	1.120 V.
4	1.119	64	1.118
8	1.120	128	1.100
16	1.120		

Mittel $E_{1/2} = 1.1193$ von $m = 2$ bis 64 .

$$6. \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{8}.$$

m	$E_{1/8}$	m	$E_{1/8}$
8	1.129 V.	64	1.125 V.
16	1.128	128	1.124
32	1.124	256	1.115

Mittel $E_{1/8} = 1.1260$ V. für $m = 8$ bis $m = 128$.

$$7. \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{32}.$$

m	$E_{1/32}$	m	$E_{1/32}$
32	1.143 V.	128	1.136 V.
64	1.141	256	1.130

Mittel $E_{1/32} = 1.1425$ V. für $m = 32$ und $m = 64$.

Aus den mitgetheilten Zahlen folgt:

Die elektromotorische Kraft des Daniell-Elementes hängt nur von dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen ab; sie ist mithin unabhängig von der Stärke der Einzelconcentrationen.

Nach F. Kohlrausch¹ besitzt das moleculare Leitungsvermögen der beiden Salzlösungen in der gleichen beliebigen Verdünnung fast denselben Werth. Der von Arrhenius² eingeführte Activitätscoëfficient ist somit für beide Sulfate von gleicher Grösse, und weiters haben die Zink- und Kupferjonen dieselbe Wanderungszahl. Für die elektromotorische Kraft eines Elementes, dessen Metalle zweiwerthig sind und dessen Lösungen die bezeichneten Bedingungen erfüllen, hat Nernst³ die Gleichung abgeleitet:

$$E = \frac{p_0}{2} \left(\log n \frac{P_1 p_2}{P_2 p_1} + \frac{u-v}{u+v} \log n \frac{p_1}{p_2} \right) + A.$$

Darin bedeuten P_1 und P_2 die elektrolytischen Lösungstensionen der Metalle Zn und Cu, p_1 und p_2 die Diffusionstensionen (osmotischen Drucke) der entsprechenden Salzlösungen; ferner stellt u die gemeinsame Beweglichkeit der Cu- und Zn-Jonen und v diejenige des gemeinsamen Jons SO_4 der beiden Lösungen dar. Endlich bezeichnet p_0 die elektrolytische Gasconstante multiplicirt mit der absoluten Temperatur, bei welcher E beobachtet wurde, und A eine etwaige bei Berührung der Elektroden hervorgerufene Potentialdifferenz.

Das Verhältniss der Diffusionsdrucke $\frac{p_1}{p_2}$ entspricht der Zahl $\frac{m}{n}$ in den vorliegenden Beobachtungen; die Unabhängigkeit der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes von der Stärke der Einzelconcentrationen seiner Lösungen ergibt sich daher als eine erste Consequenz der Nernst'schen Theorie.

Die für die verschiedenen $\frac{m}{n}$ gefundenen Werthe von E lassen sich jedoch auch unter einander in Beziehung bringen durch eine Gleichung

$$E = A - B \log \left(\frac{m}{n} \right).$$

¹ F. Kohlrausch, Wied. Ann., 26, S. 196, 1885.

² Arrhenius, Ostw. Zeitschr., 1, S. 633, 1887.

³ Nernst, Ostw. Zeitschr., 4, S. 179, 1889.

Die Rechnung ergibt für den Coëfficienten A den Werth 1·1139 V., für $B = 0·0177$ V. Der Grad der Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen wird aus nachstehender Tabelle ersichtlich:

$\frac{m}{n}$	E beob.	E ber.	Δ
$\frac{m}{n} = 1$	1·1136 V.	1·1139 V.	—0·0003
2	1·1061	1·1086	—0·0025
8	1·0982	1·0979	+0·0003
32	1·0917	1·0873	+0·0044
$\frac{1}{2}$	1·1193	1·1192	+0·0001
$\frac{1}{8}$	1·1260	1·1299	—0·0039
$\frac{1}{32}$	1·1425	1·1405	+0·0020

Für zwei Einzelbestimmungen, bei welchen $\frac{m}{n}$ die Werthe 4, beziehungsweise $\frac{1}{4}$ besass, ergaben sich:

$\frac{m}{n}$	E beob.	E ber.	Δ
4	1·1050 V.	1·1032 V.	+0·0018
$\frac{1}{4}$	1·1257	1·1246	+0·0011

Man überzeugt sich nun leicht, dass den beiden Coëfficienten A und B nach Nernst folgende Bedeutung zukommen muss:

$$A = \frac{p_0}{2} \cdot \log \frac{P_1}{P_2} + A, \quad B = p_0 \frac{u}{u+v} \cdot \frac{1}{\log e}.$$

Für p_0 ist $0·860 \cdot T \cdot 10^{-4}$ einzusetzen; da die Beobachtungen von E bei 18° C. erfolgten, ergibt sich p_0 zu 0·0250. Die gemeinsame Wanderungszahl für die Zn- und Cu-Jonen, $\frac{u}{u+v}$, wurde von Hittorf zu 0·360 bestimmt. Daraus folgt

$$B = 0·0207 \text{ V.}$$

Mit Rücksicht auf die mannigfachen Schwierigkeiten, welche sich aus der Natur der Theorie¹ ergeben, weiters mit Rücksicht auf die Thatsache, dass der Grad der Dissociation bei den angewendeten Lösungen ein mässiger ist, wird man die Übereinstimmung mit dem durch den Versuch gefundenen Werth $B = 0.0177$ als genügend bezeichnen können.

¹ Vergl. Nernst, a. a. O., 144, 145.

III. SITZUNG VOM 18. JÄNNER 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII (October 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte vor.

Das k. k. Ackerbau-Ministerium übermittelt ein Exemplar des von demselben veröffentlichten Werkes: »Geologisch-bergmännische Karten mit Profilen von Idria nebst Bildern von den Quecksilber-Lagerstätten in Idria.«

Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Friedrich Czapek, betitelt: »Zur Kenntniss des Milchsafsystems der Convolvulaceen.«

Herr Dr. Stanislaus Klemensiewicz, Professor am k. k. Gymnasium in Rzeszow, übersendet eine Abhandlung: »Beiträge zur geographischen Verbreitung der Schmetterlinge in Galizien.«

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Abhandlung des Herrn Carl Grafen Attems in Wien, betitelt: »Die Copulationsfüsse der Polydesmiden.«

Ferner überreicht Herr Hofrath Claus eine Arbeit des Herrn A. König in Wien, unter dem Titel: »*Hemispeiropsis comatulae*, eine neue Gattung der Urceolariden.«

Das c. M. Herr Oberst A. v. Obermayer überreicht den Bericht über die im vorigen Jahre in Gemeinschaft mit Herrn Hauptmann A. Schindler im Auftrage der kaiserl. Akademie ausgeführte »Trigonometrische Höhenbestimmung des hohen Sonnblick, in der Goldberggruppe der hohen Tauern.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung des Herrn Prof. Dr. E. Kobald in Leoben über eine »Verallgemeinerung eines Appel'schen Satzes aus der Theorie der Wärmeleitung«.

Das c. M. Herr Prof. K. Grobben in Wien überreicht eine Abhandlung: »Zur Kenntniss der Morphologie, der Verwandtschaftsverhältnisse und des Systems der Mollusken.«

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über ein isomeres Jodmethyl-Brucin.«

Herr Dr. Gustav Jäger in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne«.

Die trigonometrische Höhenbestimmung des Hohen Sonnblicks in der Goldberggruppe der Hohen Tauern

von

Oberst **A. v. Obermayer**,

c. M. k. Akad.

und

Hauptmann **Anton Schindler**.

Da der Sonnblickgipfel kein Hauptpunkt des Triangulierungsnetzes ist, so liegt auch keine hinreichend genaue Bestimmung seiner Höhe auf trigonometrischem Wege vor.

Die Höhenangaben differiren sehr erheblich. In der vom k. und k. Militärgeographischen Institute herausgegebenen Original-Aufnahme-section im Massstabe 1:25.000 vom Jahre 1871 findet sich für den Sonnblick die Höhengöte 3090 *m*; in der Specialkarte im Massstabe 1:750.000 die Höhengöte 3103 *m* angegeben.

Bei der Unsicherheit, welche den umliegenden von der trigonometrischen Triangulierung des Katasters aus den Dreissiger Jahren dieses Jahrhunderts herrührenden Punkten anhaftet, sind solche abweichende Angaben nicht zu verwundern.

Durch den Bestand des Observatoriums auf dem Sonnblick wurde es Herrn Hofrath Hann möglich (1891),¹ aus correspondirenden, corrigirten Luftdruckmitteln nach der barohypsometrischen Formel, aus den Beobachtungen der vier Jahrgänge 1887—1890 die Höhe des Sonnblickgipfels zu berechnen.

¹ Diese Sitzungsber., Bd. C, April 1891, S. 451.

Es wurden so aus den unten angeführten Vergleichsstationen, von denen Ischl—Lienz an das Präcisionsnivelement angeschlossen sind, gefunden:

Vergleichsstation	Seehöhe	Höhendifferenz	Sonnblickgipfel
Schafberggipfel	1776·1	1327·0	3103·1
Obir	2044	1064·7	3108·7
Säntis	2464	645·5	3109·9
Ischl—Lienz	573·2	2531·2	3104·4

Wird aus den so berechneten Höhen des Sonnblickgipfels das Mittel genommen, so ergibt sich für diese Höhe:

$$3106·5 \pm 1·6 \text{ m}$$

bis zum Gefäss des in der Gelehrtenstube aufgehängenen Fortin'schen Barometers. Dasselbe dürfte sich nach ungefährer Schätzung 60 *cm* über dem äusseren Boden befinden.

Bei der Bedeutung, welche der genauen Kenntniss der Höhe des Sonnblicks zukommt, hat die kaiserliche Akademie der Wissenschaften Einen von uns aufgefordert, eine trigonometrische Höhenbestimmung auszuführen.

Überdies wurden vom Sonnblick-Verein die Kosten des Transportes der Instrumente, der Führer etc. mit einem Betrage von circa 60 fl. bestritten.

Zu dem Zwecke der soliden Aufstellung der Instrumente wurde Peter Lechner der Auftrag ertheilt, zwei Pfeiler in Stein in einer Höhe von etwa 1·1 *m* mit möglichst ebenen oberen Platten aufzumauern. Peter Lechner hat die Aufstellungsorte der Pfeiler so gut gewählt, dass dieselben nicht nur gegenseitig sichtbar sind, sondern auch jeder für sich die grösstmögliche Rundschau gewähren. Allerdings hat dies eine Regulirung der Ostseite des Gipfels nöthig gemacht.

Die Kosten der Bauführung, die sich aus dem letzteren Grunde auf etwa 47 fl. stellten, hat auch der Sonnblick-Verein getragen und dadurch einem, bei wissenschaftlichen Specialuntersuchungen sehr fühlbaren Bedürfnisse Rechnung getragen.

Die Pfeiler, nach ihrer Lage Ost- und Westpfeiler genannt, sind auf ihren Platten, die gerade nicht sehr eben ausfielen,

mit eingemeisselten Kreuzen versehen und dadurch der Aufstellungsort der Instrumente bezeichnet worden.

Die Distanz zwischen den so festgelegten Mitten der Pfeiler wurde mittelst Latten gemessen und gleich $36.81 \pm 0.02 m$ gefunden.

Der Höhenunterschied der Platten wurde allerdings nicht mit genügender Sicherheit gemessen. Die Platte des Westpfeilers dürfte nahe $0.19 m$ höher sein, als jene des Ostpfeilers. Die Höhe der Platte des Westpfeilers über dem Erdboden ist $1.14 m$, jene der Platte des Ostpfeilers $1.12 m$.

Eine Beobachtungsreihe wurde anfangs Juli von uns beiden angestellt. Dieselbe umfasst die eben angeführten Messungen, die Bestimmung der Horizontalwinkel zwischen einer Reihe von Punkten und die Bestimmung der Höhenwinkel dieser Punkte. Das Wetter war um diese Zeit ziemlich veränderlich. Die ersten Tage waren zum Theil trüb und vergingen mit der Rectification des Instrumentes. Am 4. Juli Vormittag konnte gemessen werden. Am 5. Juli war es vollständig rein, am 6. Juli war Nebel, am 7. war es rein, am 8. theilweise rein, am 9. vollkommen rein, am 10. war Nebel, am 11. war es zum Theil rein, dann folgte ein Wetterumschlag.

Eine zweite Beobachtungsreihe wurde von Einem von uns, Hauptmann A. Schindler, in der Zeit vom 14. bis 17. September ausgeführt und dabei ausschliesslich Höhenwinkel gemessen. Das Wetter war um diese Zeit beständig.

Von den sichtbaren und bezeichneten Punkten haben wir in die Messung einbezogen: den Grossglockner mit Pyramide, $3798.4 m$; den Unholden mit grossem Steinmandl auf dem einen Gipfel, $2870 m$; das Böse Weibl mit Steinmandl, $3110 m$; den Sandkopf mit Steinmandl und Stange, $3084 m$; die Stanziwurt mit Steinmandl und Stange, $2704 m$; den Ziethenkopf mit schöner und hoher Pyramide, $2484.8 m$; den Stellkopf mit Steinmandl, $2846 m$; das Alteck mit charakteristischem Gipfel, $2939 m$; den Ankogel mit charakteristischer Gipfelform, $3262.7 m$; den Silberpfennig mit Steinmandl und vertikaler und schiefer, ausspreizender, weisser Latte, $2597 m$; den Hochnarr mit Steinmandl und Stange, $3258 m$. Von allen diesen Punkten konnten wir aber bloss die vom k. u. k. Militär-

geographischen Institute bestimmten Punkte Grossglockner, Ziethenkopf und Ankogel der Rechnung zu Grunde legen. Die Coordinaten der übrigen, von der schon erwähnten Katastralvermessung herrührenden Punkte erwiesen sich so wenig in Übereinstimmung, dass wir die zahlreichen darauf bezüglichen Messungen unbenützt lassen mussten.

Zu den Messungen hatte uns das k. u. k. Militärgeographische Institut einen Theodolithen zur Landesvermessung von Starke & Kammerer (Nr. 250) zur Verfügung gestellt, welcher am Horizontalkreise und am Höhenkreise mittelst Mikroskopen mit Ocularmikrometern 2 Sekunden abzulesen gestattet. Beide Theilkreise sind mit Reibung drehbar, um verschiedene Stellen der Kreise zur Ablesung benützen zu können.

Die Bestimmung der Lage des Sonnblicks nach dem Pothénot'schen Verfahren.

Hiezu wurde, wie schon erwähnt, die aus den Triangulierungsarbeiten des Militärgeographischen Institutes folgenden Coordinaten von Grossglockner, Ankogl und Ziethenkopf benützt. Der Coordinatenanfangspunkt ist in der Nähe des Hochnarrs angenommen worden, die x -Axe läuft von W gegen E und die y -Axe von N nach S.

Diese Coordinaten sind:

	x	y
A Ankogl	$+23710\cdot8$	$+ 3153\cdot3$
B Ziethenkopf.	$+ 176\cdot7$	$+30180\cdot9$
C Grossglockner.	$-18371\cdot7$	$+ 0\cdot4$

Denselben entsprechen die Dreieckseiten:

$$c = 35837\cdot77 \text{ m}, \quad a = 35424\cdot65 \text{ m}, \quad b = 42200\cdot50 \text{ m}$$

und die Winkel:

$$C = 54^\circ 8' 28\cdot0'', \quad A = 53^\circ 14' 13\cdot7'', \quad B = 72^\circ 37' 18\cdot3''.$$

Wird der Ostpfeiler mit E , der Westpfeiler mit W bezeichnet, so ergab die Messung folgende Mittelwerthe der Winkel bei einer Anzahl n Messungen:

$$\sphericalangle CWB = 94^{\circ} 25' 16.9'' \pm 0.73'' \quad n = 8$$

$$\sphericalangle AWB = 91 \quad 20 \quad 44.9 \pm 1.90 \quad n = 6$$

$$\sphericalangle CEB = 94^{\circ} 20' 34.0'' \pm 2.34'' \quad n = 6$$

$$\sphericalangle AEB = 91 \quad 25 \quad 37.9 \pm 2.17 \quad n = 8$$

Damit wurden folgende Abstände der Pfeiler von den Punkten berechnet:

Entfernung von	<i>E</i>	<i>W'</i>
<i>C</i> Grossglockner.....	20140.8 <i>m</i>	20104.6 <i>m</i>
<i>B</i> Ziethenkopf.....	22113.1	22149.2
<i>A</i> Ankogl.....	27656.7	27658.2

Hieraus folgen die Coordinaten der beiden Pfeiler:

	<i>x</i>	<i>y</i>
<i>E</i>	1605.6 <i>m</i>	2561.1 <i>m</i>
<i>W'</i>	1569.6	2557.7

Aus den Coordinaten ist es möglich, den Abstand der Pfeilermitten zu ermitteln. Dieser wird so gefunden: 36.1 *m*, was gegen die directe Messung um 0.7 *m* differirt und eine nützliche Controle der Messungen bietet.

Ein Fehler der gemessenen Winkel *CWB* und *AWB* z. B., um je 2 Secunden bringt eine Änderung in der Länge *WC*, *WB* und *WA* hervor, welche bloss in den Centimetern liegt, daher kaum in Betracht kommt.

Die trigonometrische Höhenmessung.

Von den drei gewählten Fixpunkten ist insbesondere der Grossglockner durch den Herrn Oberstlieutenant H. Hartl des k. u. k. Militärgeographischen Institutes, mit Hilfe von Zwischenpunkten in kleinen Distanzen, an das Präcisionsnivellement im Pusterthale angeschlossen. Ebenso sind der Ziethenkopf und der Ankogl sorgfältig bestimmt worden. Die Höhen sind auf den Erdboden des Gipfels bezogen.

Grossglockner.....	3798.4 <i>m</i>
Ankogl.....	3262.7
Ziethenkopf.....	2484.8

Zur Höhenberechnung wurde die von Oberstlieutenant H. Hartl benützte Formel¹ verwendet, welche der Krümmung der Erde und dem Einflusse der Refraction Rechnung trägt. Dieselbe lautet:

$$U = S \cot z + S^2 q, \quad q = \frac{1-K}{2\rho}.$$

Darin sind: U die gesuchte Höhendifferenz in Metern zwischen dem Vergleichsgipfel und dem Mittelpunkte des Höhenkreises, S die Entfernung vom Vergleichsgipfel, z der Zenithwinkel, ρ der Erdhalbmesser.

Für K ist zu setzen:

$$K = 0.1470 - 0.00080 h,$$

worin h die beiläufige Höhendifferenz in Hectometern bedeutet. Ferner wurde genommen:

$$\log \frac{1}{2} \rho = 2.8942233 - 10.$$

Die Instrumentenhöhe beträgt beim Ostpfeiler 1.38 m , beim Westpfeiler 1.40 m . Der Mittelpunkt des Höhenkreises steht nahe 0.26 m über der Aufstellungsebene.

Wegen der Veränderlichkeit der Refraction wurden die Messungen der Höhenwinkel hauptsächlich um die Mittagszeit ausgeführt. Um aber doch den Einfluss der Refraction kennen zu lernen, haben wir auch in den Vormittagsstunden und am späten Nachmittage Messungen ausgeführt. Insbesondere die letzteren gaben auffallend abweichende Werthe.

In der folgenden Tabelle sind die gemessenen Höhenwinkel unter z angesetzt und dazu angeführt: das Datum, die Versuchszeit, die Anzahl n der Messungen, die Pfeilerbezeichnung und die Höhe H in Metern.

¹ Mittheilungen des k. und k. Militärgeographischen Institutes, Bd. IV, S. 173.

Ankogel.

			<i>Z</i>	<i>n</i>	<i>H</i>
7. Juli	1 ^h 25—	2 ^h 10 <i>E</i> 89° 40' 49·0'' ±0·67''	10	3105·37 ±0·10
7. »	2 12—	2 25 <i>E</i> 89 40 50·1 ±1·47	8	3105·49 ±0·16
8. »	10 40—11	0 <i>W</i> 89 41 14·0 ±0·89	6	3107·53 ±0·10
8. »	12 50—	1 10 <i>W</i> 89 40 59·4 ±2·22	7	3105·96 ±0·24
15. Sept.	10 50—11	30 <i>W</i> 89 40 51·6 ±2·12	5	3105·14 ±0·24
16. »	11 40—	1 10 <i>W</i> 89 40 58·8 ±2·44	7	3105·93 ±0·25

Aus diesen 43 Beobachtungen ergibt sich:

$$H = 3106·09 \pm 0·21 \text{ m.}$$

Ziethenkopf.

			<i>Z</i>	<i>n</i>	<i>H</i>
8. Juli	10 ^h 15—12 ^h	0 <i>W</i> 91° 24' 13·0'' ±5·4 "	16	3110·24 ±0·73
8. »	12 20—12	40 <i>W</i> 91 24 52·1 ±0·83	5	3107·43 ±0·10
14. Sept.	9 30—	3 30 <i>W</i> 91 24 13·2 ±0·13	10	3110·27 ±0·18
15. »	11 50—12	0 <i>W</i> 91 24 20·1 ±5·18	2	3111·21 ±0·77
16. »	10 0—12	31 <i>W</i> 91 24 9·5 ±7·20	5	3109·78 ±0·96
7. Juli	12 40—	1 10 <i>E</i> 91 24 10·2 ±1·11	15	3110 05 ±0·16
15. Sept.	2 5—	2 35 <i>E</i> 91 24 3·5 ±2·47	3	3107·15 ±0·32

Aus diesen 56 Beobachtungen ergibt sich:

$$H = 3108·84 \pm 0·62 \text{ m.}$$

Grossglockner.

			<i>Z</i>	<i>n</i>	<i>H</i>
5. Juli	10 ^h 30—11 ^h	15 <i>W</i> 88° 6' 30·3'' ±3·44''	7	3105·84 ±0·38
5. »	11 15—11	50 <i>W</i> 88 6 34·8 ±2·81	6	3106·28 ±0·31
8. »	11 0—11	30 <i>W</i> 88 6 31·1 ±1·16	9	3105·90 ±0·13
8. »	12 30—12	50 <i>W</i> 88 6 43·5 ±1·52	8	3107·12 ±0·17
8. »	1 10—	1 30 <i>W</i> 88 6 54·6 ±1·66	7	3108·22 ±0·18
9. »	1 45—	2 15 <i>W</i> 88 7 5·1 ±2·05	10	3109·23 ±0·20
14. Sept.	9 50—10	0 <i>W</i> 88 6 31·3 ±1·04	4	3108·73 ±0·11
15. »	9 40—10	30 <i>W</i> 88 6 32·4 ±1·58	5	3106·04 ±0·17
16. »	11 30—12	0 <i>W</i> 88 6 41·7 ±1·68	6	3106·95 ±0·18
15. »	2 45—	3 0 <i>E</i> 88 6 49·8 ±0·94	5	3106·63 ±0·10

Aus diesen 67 Beobachtungen folgt unter Berücksichtigung der Genauigkeit und der Anzahl der Messungen, aus denen die Werthe abgeleitet sind:

$$H = 3106·47 \pm 0·12 \text{ m.}$$

Alle Beobachtungen sind auf den Erdboden beim Westpfeiler bezogen.

Die Genauigkeit der Beobachtungen des Ziethenkopfes ist geringer wie jene der anderen Beobachtungen, da dieser Gipfel fast genau in der Mittagslinie liegt und dadurch das Visiren um die Mittagszeit sehr erschwert ist.

Unter Berücksichtigung der Genauigkeit der Mittelwerthe und der Anzahl der Beobachtungen, aus denen sie abgeleitet sind, ergibt sich:

$$H = 3106.47 \pm 0.10 \text{ m.}$$

Weiter ist unter Berücksichtigung der früher angegebenen Höhenmessungen der Pfeiler etc.:

Platte des Westpfeilers	3107.61 m
Platte des Ostpfeilers.....	3107.42
Beiläufige Höhe des Barometergefäßes....	3106.9
Durch Hann aus Barometermitteln	3106.5 $\pm 1.6 \text{ m}$,

wonach unsere Bestimmung der Höhe des Barometergefäßes innerhalb der Fehlergrenze des Mittels aus den Hann'schen Werthen liegt.

Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist die Mittheilung einiger neuer Sätze über die Anzahl aller, sowie der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch bestimmte Formen. Zu dem Behufe soll zunächst im ersten Paragraphe eine auf den grössten gemeinschaftlichen Theiler eines Systems von ganzen Zahlen bezügliche Formel ermittelt und gelegentlich auf mehrere specielle Fälle angewendet werden, während im zweiten die mit Hilfe einiger der gefundenen Beziehungen und von bekannten Theoremen Jacobi's, Eisenstein's und Liouville's leicht zu beweisenden Theoreme aufgestellt werden.

I. In der Summe

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s])$$

tritt das Glied $F(d)$, wo d irgend ein Theiler von n ist, so oft auf, als es Werthsysteme x_1, x_2, \dots, x_s gibt, welche den Beziehungen

$$x_1 = dy_1, x_2 = dy_2, \dots, x_s = dy_s \quad (y_\lambda = \text{ganze Zahl})$$

$$\left[\frac{n}{d}, y_1, y_2, \dots, y_s \right] = 1$$

genügen, d. i. also so vielmal, als dem Intervalle $1 \dots \frac{n}{d}$ angehörige Systeme von s ganzen Zahlen existiren, deren grösster

gemeinsamer Theiler zu n theilerfremd ist, und demnach hat man die Relation

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_d F(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right),$$

in welcher die Summation nach d über alle Theiler von n zu erstrecken ist.

Berücksichtigt man, dass

$$\varphi_s(n) = \sum_d d^s \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

ist, so kann man derselben sofort eine der zwei folgenden Gestalten geben:

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_d d^s f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_d \chi(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

wo

$$\sum_d f(d) = F(n)$$

$$\sum_d F\left(\frac{n}{d}\right) d^s = \chi(n)$$

ist.

Setzt man in diesen Gleichungen

$$f(x) = \mu \sqrt[r]{x}, \quad \lambda_r(x), \quad \alpha(x),$$

so erhält man für die Anzahl $\varphi_{r,s}(n)$ derjenigen Systeme von s beliebigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \dots n$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keine r te Potenz (ausser 1) gemein hat, die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 \varphi_{r,s}(n) &= \sum_{d_r} d_r^s \mu \left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}} \right) \\
 &= \sum_d \mu_r(d) \varphi_s \left(\frac{n}{d} \right) \\
 &= \sum_d \bar{\psi}_{r,s}(d) \mu \left(\frac{n}{d} \right)
 \end{aligned}$$

für die Anzahl $\bar{\chi}_{r,s}(n)$ derjenigen Systeme von s dem Intervalle $1 \dots n$ beliebig entnommenen ganzen Zahlen, welche mit n ein $(s+1)$ -gliedriges Zahlensystem bilden, dessen grösster gemeinsamer Theiler eine r te Potenz ist, die Werthe

$$\begin{aligned}
 \bar{\chi}_{r,s}(n) &= \sum_{d_r} \varphi_s(d_r) \\
 &= \sum_d \lambda_r(d) \varphi_s \left(\frac{n}{d} \right) \\
 &= \sum_d \rho_{s,r}(d) \mu \left(\frac{n}{d} \right),
 \end{aligned}$$

und für die Summe $A_s(n)$ derjenigen Werthe, welche die Function $f_1(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene grössten gemeinsamen Theiler von s beliebig herauszugreifenden ganzen Zahlen des Bereiches $1 \dots n$ durchläuft, welche Primfactoren von n sind, die Werthe

$$\begin{aligned}
 A_s(n) &= \sum_d \alpha \left(\frac{n}{d} \right) d^s \\
 &= \sum_p f_1(p) \varphi_s \left(\frac{n}{p} \right)
 \end{aligned}$$

und speciell für die $A_s^{(0)}(n)$ Anzahl der zuletzt genannten s -gliedrigen Zahlensysteme

$$\begin{aligned}
 A_s^{(0)}(n) &= \sum_d \alpha_0 \left(\frac{n}{d} \right) d^s \\
 &= \sum_p \varphi_s \left(\frac{n}{p} \right) \\
 &= \sum_d \mu \left(\frac{n}{d} \right) p_s(d),
 \end{aligned}$$

wo die Summationen nach d über alle, jene nach d_r aber nur über diejenigen Theiler von n zu erstrecken sind, deren complementärer Divisor eine r^{te} Potenz ist, die Summationen nach p sich auf alle Primtheiler von n beziehen, mit $\bar{\psi}_{r,s}(x)$ die Summe der s^{ten} Potenzen derjenigen Theiler von x bezeichnet wird, deren complementärer Divisor durch keine r^{te} Potenz theilbar ist, und $p_s(x)$ die Summe der s^{ten} Potenzen jener Theiler von x vorstellt, deren complementärer Divisor eine Primzahl ist.

Es mag bei dieser Gelegenheit nur erwähnt werden, dass aus den obigen Erörterungen die Beziehungen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi_{r,s}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-s)}{\zeta(rs)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi_{r,s}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(rs)\zeta(s-s)}{\zeta(s)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\bar{\psi}_{r,s}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-s)}{\zeta(rs)}$$

folgen.

Die Substitutionen

$$f(x) = x', \quad \left(\frac{\Delta}{x}\right) \quad (\Delta = \text{Fundamentaldiscriminante}),$$

$$\varphi_t(x), \quad f_{\beta-1}(x), \quad \frac{f_{\beta-2}(x) \psi(x^2 \pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\psi(x)}}$$

liefern die Relationen

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} \psi_t([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) &= \sum_d \psi_t(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_d \psi_s(d) \varphi_t\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= n^t \psi_{s-t}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{\Delta, x_1, \dots, x_s = n} \varphi([n, x_1, x_2, \dots, x_s], \Delta) = \tau n^s \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{\frac{1}{s}} \quad (\tau = \text{Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante } \Delta \text{ in sich selbst}) \\
& \quad = \sum_d \varphi(d, \Delta) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\
& \sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{\Delta, x_1, \dots, x_s = n} [n, x_1, x_2, \dots, x_s]^t = \sum_d d^t \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\
& \quad = \sum_d d^s \varphi_t\left(\frac{n}{d}\right) \\
& \sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{\Delta, x_1, \dots, x_s = n} f_{\beta}([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_d f_{\beta}(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\
& \quad = \sum_d f_{\beta-1}\left(\frac{n}{d}\right) d^s \\
& \sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{\Delta, x_1, \dots, x_s = n} \frac{f_{\beta-1}([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) \psi([n, x_1, x_2, \dots, x_s])^2 \pi^{\beta-2}([n, x_1, x_2, \dots, x_s])}{(\beta-1)^{\omega([n, x_1, x_2, \dots, x_s])}} = \sum_d \frac{f_{\beta-2}\left(\frac{n}{d}\right) \psi\left(\frac{n}{d^2} \pi^{\beta-3}\left(\frac{n}{d}\right)\right) d^s}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}\left(\frac{n}{d}\right)}} \\
& \quad = \sum_d \frac{f_{\beta-1}(d) \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(d)}} \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)
\end{aligned}$$

und speciell

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} \omega([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_d \omega(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\ = \sum_d \mu_s\left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} \psi^2([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_d \psi^2(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\ = \sum_d \omega\left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} \psi([n, x_1, x_2, \dots, x_s]^2) = \sum_d \psi(d^2) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\ = \sum_d \psi^2\left(\frac{n}{d}\right) d^s,$$

aus denen u. A. die folgenden Formeln sich ergeben:

$$\sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} \phi_t([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_t = n \\ x_1, x_2, \dots, x_t = 1}} \phi_s([n, x_1, x_2, \dots, x_t]) \\ \sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ x_1, x_2, \dots, x_s = 1}} [n, x_1, x_2, \dots, x_s] = \sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_t = n \\ x_1, x_2, \dots, x_t = 1}} [n, x_1, x_2, \dots, x_t]^s.$$

§. 2. Auf Grund der im vorigen Paragraphen aufgestellten Formeln kann man nun für die Anzahl aller, sowie der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen eine Reihe von Sätzen aufstellen, deren grösster Theil einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen dieser Anzahl und einer für jede Form besonderen Function der grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit den einzelnen demjenigen Bereiche, dessen Grenzen 1 und die dargestellte Zahl sind, beliebig entnehmbaren Zahlensystemen von einer Elementenanzahl, die von der darstellenden Form abhängt,

aufdeckt. Von diesen Theoremen mögen hier die folgenden angeführt werden:

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dieselbe nicht überschreitenden ganzen Zahlen besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht überschreitenden, zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dieselbe nicht überschreitenden ganzen Zahlen in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht überschreitenden zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dreigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl derjenigen dreigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren

Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und ein zu demselben theilerfremdes System bilden.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dreigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl derjenigen dreigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen über alle Theiler der dargestellten Zahl ausgedehnte Summe der Anzahlen derjenigen einem Intervalle, dessen Grenzen 1 und der bezügliche Divisor sind, beliebig entnommenen dreigliedrigen Zahlensysteme, deren grösster gemeinsamer Theiler mit diesem Divisor kein Quadrat (ausser 1) gemein hat.

Die Anzahl aller Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen fünfgliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen sind, besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer einfach geraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl derjenigen fünfgliedrigen

Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfach geraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen fünfgliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl derjenigen fünfgliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen über alle Theiler der dargestellten Zahl ausgedehnten Summe der Anzahlen derjenigen einem Intervalle, dessen Grenzen 1 und der betreffende Divisor sind, beliebig entnommenen fünfgliedrigen Zahlensysteme, deren grösster gemeinsamer Theiler mit diesem Divisor keinen quadratischen Factor (ausser 1) gemein hat.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von sechs Quadraten ist gleich der zwölffachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der grössten gemeinschaftlichen Divisoren der dargestellten Zahl mit allen zweigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen sind, durch eine Summe von zwei Quadraten.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von sechs

Quadraten ist gleich der zwölffachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Divisors der erwähnten Zahl durch eine Summe von zwei Quadraten mit der Anzahl derjenigen zweigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer Zahl von der Form $4s+3$ durch eine Summe von zehn Quadraten ist gleich der zwölffachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der grössten gemeinschaftlichen Divisoren der dargestellten Zahl mit allen viergliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Gebiete beliebig entnommen werden, durch eine Summe von zwei Quadraten.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer Zahl von der Form $4s+3$ durch eine Summe von zehn Quadraten ist gleich der zwölffachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Theilers der erwähnten Zahl durch eine Summe von zwei Quadraten mit der Anzahl derjenigen viergliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von drei einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der $2\left\{4 - \left(\frac{2}{n}\right)\right\}$ -fachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen, den Bedingungen $y \geq 0$, $2x > 3y$ genügenden Darstellungen der einzelnen grössten gemeinsamen Theiler der dargestellten Zahl und aller dieselbe nicht übertreffenden ganzen Zahlen durch die binäre quadratische Form $(1, 0, -2)$.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von drei einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der

$2 \left\{ 4 - \left(\frac{2}{n} \right) \right\}$ -fachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen, die Bedingungen $y \geq 0$, $2x > 3y$ erfüllenden Darstellungen jedes Divisors der dargestellten Zahl durch die binäre quadratische Form $(1, 0, -2)$ mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht übertreffenden, zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von fünf einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der $\frac{1}{6} \left\{ 4 - \left(\frac{-2}{n} \right) \right\}$ -fachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der einzelnen grössten gemeinsamen Theiler der dargestellten Zahl mit allen zweigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnehmbar sind, durch die binäre quadratische Form $(1, 0, 2)$.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von fünf einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der $\frac{1}{6} \left\{ 4 - \left(\frac{-2}{n} \right) \right\}$ -fachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Divisors der dargestellten Zahl durch die binäre quadratische Form $(1, 0, 2)$ mit der Anzahl derjenigen zweigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, welche den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Ich will bei dieser Gelegenheit als Berichtigung eines sinnstörenden Druckfehlers meiner im Decemberhefte 1893 dieser Sitzungsberichte enthaltenen Mittheilung »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung« bemerken, dass der Coëfficient des auf der rechten Seite der vorletzten Gleichung

auf S. 13 stehenden Integrales zu lauten hat $\frac{\arccos \frac{b}{2\sqrt{ac}}}{\sqrt{4ac - b^2}}$.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IV. SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1894.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 25. Jänner l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath Prof. Dr. Emil Weyr erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Wien übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Die Stauungspapille und ihre Bedeutung als eines Zeichens von gesteigertem Druck in der Höhle des Schädels«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Wien (IV. Bezirk), übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (9. Fortsetzung).

Der Secretär legt folgende behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Schreiben vor, und zwar:

Von Herrn Dr. Alexander Marmorek in Wien

1. »Neues Heilverfahren gegen die septischen Krankheiten«,
2. »Über den Ersatz der chirurgischen Drainage«;

ferner von Herrn Friedrich Strohmer, Vorstand der chemisch-technischen Versuchsstation des Centralvereines für

Rübenzucker-Industrie in der österreichisch-ungarischen Monarchie in Wien

3. »Beitrag zur Prophylaxis parasitärer Krankheiten der landwirthschaftlichen Culturpflanzen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei im pharmacognostischen Institute der Universität Lemberg ausgeführte Arbeiten:

1. »Über die α -Epichlorhydrin-Verbindungen« von Prof. L. Niemiłowicz.
 2. »Über eine neue pyknometrische Dichtebestimmungsmethode der weichen Fette« von Z. Zawalkiewicz.
-

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Obermayer, A. v., Zur Erinnerung an Josef Stefan, k. k. Hofrath und Professor der Physik an der Universität in Wien. Wien und Leipzig, 1893; 8°.

V. SITZUNG VOM 8. FEBRUAR 1894.

In Verhinderung des Herrn Vicepräsidenten führt Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 6. Februar l. J. in Abbazia erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath Prof. Dr. Theodor Billroth erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Wiesner übersendet die dritte pflanzenphysiologische Mittheilung aus Buitenzorg unter dem Titel: »Über den vorherrschend ombrophilen Charakter des Laubes der Tropengewächse«.

Von dem k. u. k. Oberlieutenant Herrn Victor Dziubiński in Peterwardein wird ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität eingesendet, welches die Aufschrift führt: »Gas-kraft-Motor«.

Das w. M. Herr Hofrath A. Kerner v. Marilaun bespricht eine Abhandlung von Dr. E. v. Halácsy, welche den Titel führt: »Beiträge zur Flora von Epirus«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Wilhelm Webers Werke, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. IV. Bd. Galvanismus und Elektrodynamik. II. Theil. Besorgt durch Heinrich Weber. (Mit 4 Tafeln und Abbildungen im Texte.) Berlin, 1894; 8°. — VI. Bd. Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Besorgt durch Friedrich Merkel und Otto Fischer. (Mit 17 Tafeln und Abbildungen im Texte.) Berlin, 1894; 8°.

VI. SITZUNG VOM 15. FEBRUAR 1894.

Das Executiv-Comité des unter dem Allerhöchsten Protectorate Sr. k. und k. apost. Majestät stehenden VIII. Internationalen Congresses für Hygiene und Demographie ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an diesem Congress, welcher vom 1. bis 9. September d. J. in Budapest tagen wird, ein und übermittle ein hierauf bezügliches vorläufiges Programm.

Das w. M. Herr Hofrath Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung von Dr. Ad. Jolles in Wien, betitelt: »Das Margarín, seine Verdaulichkeit und sein Nährwerth im Vergleich zu reiner Naturbutter«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Dr. J. Herzig ausgeführte Arbeit: »Über Brasilin und Hämatoxylín«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Abhandlung von Dr. K. Zsigmondy in Wien: »Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n -ten Grades von x , welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Denkschriften der medicinisch - naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. (3. Bd. II. Theil). Vergleichend-anatomische und entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen

an Walthieren, von W. Kükenthal. (Mit 12 Tafeln und 115 Abbildungen im Text.) Jena, 1893; 4°.

Mitscherlich Alexander, Erinnerung an Eilhard Mitscherlich 1794—1863. Berlin, 1894; 8°.

The collected Papers of Sir W. Bowman. (Vol. I and II.)
Edited for the Committee of the »Bowman Testimonial Fund« by J. Burdon-Sanderson and J. W. Hulke.
Presented by Harriet Lady Bowman. London, 1892; 4°.

Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n^{ten} Grades von x , welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen

von

K. Zsigmondy in Wien.

1.

Im Folgenden werden wie gewöhnlich zwei Polynome von x mit ganzzahligen Coëfficienten nur dann als nach dem Primzahlmodul p wesentlich von einander verschieden angesehen, wenn wenigstens ein Coëfficient in dem einen modulo p nicht congruent ist dem entsprechenden Coëfficienten derselben Potenz von x in dem anderen Polynom.

Ferner wird der Coëfficient der höchsten Potenz von x in jeder Congruenz gleich der Einheit angenommen, was stets durch Multiplication mit einem geeigneten Factor erreicht werden kann.

In einer Congruenz ν^{ten} Grades bleiben mithin ν Coëfficienten willkürlich; da jeder ein vollständiges Restsystem modulo p durchlaufen kann, erkennt man, dass es nur p^ν verschiedene Congruenzen ν^{ten} Grades gibt.

2.

Um die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades zu finden, welche die x vorgegebenen verschiedenen Zahlen

$$a_1, a_2, \dots, a_x \quad (I)$$

als Wurzeln nach dem Modul p nicht besitzen, hat man aus der Gesamtheit S der p^n verschiedenen Congruenzen

$$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

diejenigen auszuschneiden, welche durch einen der linearen Factoren $x - a_j$ ($j = 1, 2, \dots, x$) theilbar sind.

Es kann dies nach einem Verfahren, das ich bereits bei einer anderen Gelegenheit verwendet habe, leicht durchgeführt werden.¹

Bekanntlich lässt sich die linke Seite jeder Congruenz

$$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

welche die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ besitzt, nur auf eine Weise modulo p in die Form

$$f_n(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_i) f_{n-i}(x) \quad (\text{II})$$

bringen, wo $f_{n-i}(x)$ ein Polynom $n-i$ ten Grades bedeutet, in welchem der Coëfficient der höchsten Potenz von x wieder gleich der Einheit ist. Nimmt man für $f_{n-i}(x)$ alle p^{n-i} modulo p verschiedenen Functionen $n-i$ ten Grades, so liefern die zugehörigen $f_n(x)$ ein bestimmtes in S enthaltenes System von Congruenzen $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$.

Fügt man zu dem Systeme S alle diejenigen Systeme $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$ hinzu, bei welchen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ irgend eine Combination aus einer geraden Anzahl der Elemente der Reihe a_1, a_2, \dots, a_x bedeutet und scheidet man hierauf alle diejenigen Systeme aus, bei denen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ eine Combination aus einer ungeraden Anzahl von den genannten Elementen darstellt, so bleibt in dem schliesslich sich ergebenden Systeme die Gesamtheit derjenigen Congruenzen n ten Grades übrig, welche die x Zahlen a_1, a_2, \dots, a_x als Wurzeln nicht besitzen.

Es lässt sich nämlich, wie schon erwähnt, jede Congruenz $f_n(x) \equiv 0$, welche die verschiedenen, der Reihe (I) angehörigen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ zulässt und für keinen weiteren

¹ Zur Verallgemeinerung der Function $\varphi(m)$ in der Zahlentheorie. Journ. für r. und ang. Math., Bd. 111.

Werth der Reihe (I) verschwindet, eindeutig modulo p in die Form (II) bringen, wo dann $f_{n-i}(x)$ durch keinen von $x - \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, i$) verschiedenen linearen Factor $x - \alpha_p$ ($p = 1, 2, \dots, x$) theilbar ist. Die Congruenz $f_n(x) \equiv 0$ wurde somit

$$\binom{i}{2} + \binom{i}{4} + \dots \text{mal}$$

hinzugefügt und

$$\binom{i}{1} + \binom{i}{3} + \dots \text{mal}$$

ausgeschieden, kommt daher im Ganzen

$$1 - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} - \binom{i}{3} + \dots = (1-1)^i \text{mal,}$$

d. h. überhaupt nicht vor.

Da den p^n Congruenzen $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$ im Ganzen

$$\binom{x}{2} p^{n-2} + \binom{x}{4} p^{n-4} + \dots$$

Congruenzen hinzugefügt, und hingegen

$$\binom{x}{1} p^{n-1} + \binom{x}{3} p^{n-3} + \dots$$

Congruenzen weggenommen wurden, erhält man das folgende Theorem:

Die Anzahl $\psi(n, x)$ derjenigen Congruenzen n ten Grades nach einem Primzahlmodul p , welche x vorgegebene verschiedene Zahlen als Wurzeln nicht besitzen, wird bestimmt durch den Ausdruck

$$\psi(n, x) = p^n - \binom{x}{1} p^{n-1} + \binom{x}{2} p^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{x}{n}. \quad (\text{III})$$

3.

Der eben für $\psi(n, x)$ gefundene Ausdruck nimmt im Falle $n \geq x$ die besonders einfache Gestalt

$$\psi(n, \kappa) = p^{n-\kappa}(p-1)^\kappa \quad (\text{IV})$$

an, während für jeden möglichen Werth von n die Recursionsformel

$$\psi(n, \kappa) = p\psi(n-1, \kappa) + (-1)^n \binom{\kappa}{n}$$

besteht.

Ferner folgt unmittelbar aus der Gleichung (III) die Relation

$$\psi(n, \kappa+1) = \psi(n, \kappa) - \psi(n-1, \kappa), \quad (\text{V})$$

welche ihrerseits wieder im Zusammenhange mit dem Anfangswerthe $\psi(n, 0) = p^n$ die Function $\psi(n, \kappa)$ charakterisirt. Man erhält nämlich durch wiederholte Anwendung von (V) die Gleichung

$$\psi(n, \kappa+i) = \psi(n, \kappa) - \binom{i}{1} \psi(n-1, \kappa) + \binom{i}{2} \psi(n-2, \kappa) - \dots, \quad (\text{VI})$$

welche in der That für $\kappa = 0$ in den Ausdruck (III) übergeht.

Endlich lässt sich auf Grund der Beziehung (V) die Relation

$$p^n = \psi(n, \kappa) + \binom{\kappa}{1} \psi(n-1, \kappa-1) + \binom{\kappa}{2} \psi(n-2, \kappa-2) + \dots$$

mittels des Schlusses von κ auf $\kappa+1$ bewahrheiten.

4.

Von besonderem Interesse ist der Fall $\kappa = p$. Man erhält alsdann für die Anzahl $\psi(n)$ derjenigen Congruenzen n ten Grades nach einem Primzahlmodul p , die überhaupt keine Wurzeln besitzen, gemäss der Gleichung (III) den Ausdruck

$$\psi(n) = p^n - \binom{p}{1} p^{n-1} + \binom{p}{2} p^{n-2} - \dots$$

Einen Zusammenhang zwischen den Functionen $\psi(n)$ und $\psi(n, \kappa)$ vermittelt die Relation (VI). Wird in derselben $i = p - \kappa$ gesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$\psi(n) = \psi(n, x) - \binom{p-x}{1} \psi(n-1, x) + \binom{p-x}{2} \psi(n-2, x) - \dots,$$

welche, wie eine einfache auf die Bedeutung von $\psi(n, x)$ gegründete Überlegung lehrt, in folgender Art umgekehrt werden kann:

$$\begin{aligned} \psi(n, x) = \psi(n) + \binom{\overline{p-x+1}-1}{1} \psi(n-1) + \\ + \binom{\overline{p-x+2}-1}{2} \psi(n-2) + \dots \quad (\text{VII}) \end{aligned}$$

Die folgenden Sätze fließen unmittelbar aus der Bedeutung der Function $\psi(n)$:

1. Die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades modulo p , welche überhaupt Wurzeln zulassen, wird durch die Differenz

$$p^n - \psi(n)$$

bestimmt.

2. Die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die genau i verschiedene Wurzeln besitzen, wird durch das Product

$$\binom{p}{i} \psi(n-i)$$

bestimmt.

3. Die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die i verschiedene und gleiche Wurzeln haben, wird durch das Product

$$\binom{p+i-1}{i} \psi(n-i)$$

bestimmt.

Nach dem Satze 2 (beziehungsweise 3) erhält man als die Gesamtzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die bloss verschiedene, beziehungsweise verschiedene und gleiche Wurzeln besitzen, die Summe

$$\sum_{i=1}^n \binom{p}{i} \psi(n-i),$$

beziehungsweise

$$\sum_{i=1}^n \binom{p+i-1}{i} \psi(n-i).$$

Das letztere Resultat liefert im Zusammenhalte mit dem Satze 1 die Recursionsformel

$$\psi(n) = p^n - \sum_{i=1}^n \binom{p+i-1}{i} \psi(n-i),$$

welche sich auch aus der Gleichung (VII) für den speciellen Werth $x = 0$ ergibt. Übrigens kann die zuletzt gefundene Formel auch in der folgenden Art verallgemeinert werden:

$$\psi(n, x) = p^n - \sum_{i=1}^n \binom{x+i-1}{i} \psi(n-i, x).$$

5.

Wird im Falle $x = p$ noch ausserdem $n \geq p$ vorausgesetzt, so besteht gemäss der Relation (IV) die Gleichung

$$\psi(n) = p^{n-p} (p-1)^p.$$

Versteht man unter dem Quotienten $\frac{\psi(n)}{p^n}$ die mittlere Dichte derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die keine Wurzeln besitzen, so kann man das folgende Theorem aussprechen:

Die mittlere Dichte derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades modulo p , welche keine Wurzeln zulassen, besitzt für $n \geq p$ den von n unabhängigen Werth $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^p$ und nähert sich mit wachsendem Modul der Grenze e^{-1} .

Dieser Satz gewährt einen Einblick in die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich angenommene Congruenz n^{ten} Grades Wurzeln besitzt, im Falle, als $n \geq p$ ist und p einen grossen Werth hat; sie ist etwas kleiner als $\frac{2}{3}$.

6.

Die vorstehenden Betrachtungen gestatten auch eine Anwendung auf den von Kronecker eingeführten Begriff des Ranges eines Systems von Grössen, worauf mein hochverehrter Lehrer Herr Prof. Gegenbauer mich aufmerksam zu machen die Güte hatte.

Nach einem Satze von Herrn Julius König, den Herr Gustav Rados bewiesen hat,¹ besitzt die Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \dots + a_{p-2} = 0 \pmod{p} \quad (\text{VIII})$$

unter der Voraussetzung, dass a_{p-2} nicht durch die ungerade Primzahl p theilbar ist, dann und nur dann genau $p-1-i$ verschiedene Wurzeln, wenn alle Subdeterminanten $(i+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante

$$|a_{j+\kappa}| \quad \left(\begin{array}{l} j, \kappa = 0, 1, \dots, p-2 \\ a_{j+p-1} = a_j \end{array} \right),$$

aber nicht alle Subdeterminanten i^{ter} Ordnung modulo p verschwinden, wenn also nach der Definition Kronecker's² das System der $(p-1)^2$ Grössen

$$a_{j+\kappa}$$

den Rang i bezüglich des Moduls p besitzt.

Bezeichnet nun a_{r-1} die erste durch p nicht theilbare Zahl der Reihe

$$a_0, a_1, \dots, a_{p-2},$$

so soll gesagt werden, das Grössensystem

$$a_{j+\kappa} \quad \left(\begin{array}{l} j, \kappa = 0, 1, \dots, p-2 \\ a_{j+p-1} = a_j \end{array} \right)$$

habe die Ordnung r modulo p .

¹ Rados, Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades. Journ. f. r. und ang. Math., Bd. 99, S. 258–280.

² Vergl. z. B. Kronecker, Periodensyst. von Functionen reeller Var., Berliner Sitzungsber., 1884, XLVI.

In diesem Falle besitzt die Congruenz (VIII) den Grad $p-1-r$ und der Coëfficient a_{r-1} kann nach Multiplication der Congruenz mit einer geeigneten Zahl gleich der Einheit angenommen werden. Die Grössen $a_{j+\kappa}$ erleiden hiedurch nur insofern eine Veränderung, als alle mit einem und demselben durch p nicht theilbaren Factor multiplicirt erscheinen. Zwei Grössensysteme aber, welche sich bloss in der angegebenen Art unterscheiden, haben augenscheinlich denselben Rang und sollen als nicht wesentlich von einander verschieden betrachtet werden.

Nach einem dem Satze 2 in Nr. 4 analogen Satz ist die Anzahl derjenigen Congruenzen vom Grade $p-1-r$, welche genau $p-1-i$ verschiedene Wurzeln (den Werth 0 ausgeschlossen) besitzen, gleich dem Producte

$$\left(\begin{matrix} p-1 \\ p-1-i \end{matrix} \right) \psi(\overline{p-1-r-p-1-i}).$$

Man ist mithin zu dem folgenden Theorem gelangt:

Es gibt $\left(\begin{matrix} p-1 \\ i \end{matrix} \right) \psi(i-r)$ wesentlich von einander verschiedene Systeme $a_{j+\kappa}$ vom Range i und der Ordnung r modulo p .

$$\left(\begin{matrix} j, \kappa = 0, 1, \dots, p-2, \\ a_{j+\overline{p-1}} = a_j, \quad a_{p-2} \not\equiv 0 \pmod{p} \end{matrix} \right)^1.$$

7.

Zum Schlusse mögen noch folgende Bemerkungen Platz finden.

Zu der Gleichung (III) hätte man auch noch auf einem anderen Wege successive gelangen können.

Scheidet man nämlich zunächst aus der Gesammtheit der p^n Congruenzen $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$ alle p^{n-1} Congruenzen,

¹ Man vergleiche hiezu den Ausdruck für die Anzahl aller möglichen modulo p verschiedenen Systeme vom Range i mit bestimmter Zeilen- und Colonnenzahl, welchen Herr Georg Landsberg im Journ. f. r. und ang. Math. Bd. 111, S. 87 angibt.

welche den Factor $x - a_1$ besitzen, aus, so bleiben $\psi(n, 1) = p^n - p^{n-1}$ Congruenzen übrig. Von diesen hat man wieder diejenigen, welche den Factor $x - a_2$, also die Form $(x - a_2) \cdot f_{n-1}(x) \equiv 0$ haben, zu entfernen, wo jedoch das im Übrigen beliebige Polynom $(n-1)$ ten Grades $f_{n-1}(x)$ nicht durch $x - a_1$ theilbar ist. Die Anzahl der zulässigen Functionen $f_{n-1}(x)$ wurde aber eben ermittelt; sie wird ausgedrückt durch $\psi(n-1, 1)$. Es bleiben mithin $\psi(n, 2) = \psi(n, 1) - \psi(n-1, 1)$ Congruenzen stehen, welche weder durch $x - a_1$, noch durch $x - a_2$ theilbar sind. Von diesen hat man wieder diejenigen wegzunehmen, welche den Factor $x - a_3$, also die Form $(x - a_3) f_{n-1}(x) \equiv 0$ besitzen, deren Anzahl eben als $\psi(n-1, 2)$ ermittelt wurde u. s. f.

Man gelangt auf diese Art allgemein zu der Relation (V), deren wahre Bedeutung hier in Evidenz tritt und beweist auf Grund derselben mittelst vollständiger Induction die Gleichung (III).

Schliesslich sei ausdrücklich hervorgehoben, dass das in Nr. 2 auseinandergesetzte Verfahren wesentlich auf der Eindeutigkeit der Form (II) modulo p beruht, und dass dasselbe auch in anderen Fällen, wo ebenfalls eine eindeutige Zerlegung stattfindet, angewendet werden kann.

Beispielsweise ist bekanntlich die Zerlegung von $f(x)$ überhaupt in irreductible Factoren modulo p nur auf eine Weise möglich. Bezeichnet man demnach mit $\chi(i)$ die Anzahl der irreductiblen Functionen i ten Grades modulo p , so wird die Anzahl derjenigen Congruenzen n ten Grades, die keinen irreductiblen Factor i ten Grades zulassen, auf Grund des angegebenen Verfahrens durch den Ausdruck

$$\Psi(n, \chi(i)) = p^n - \binom{\chi(i)}{1} p^{n-i} + \binom{\chi(i)}{2} p^{n-2i} - \dots + \dots$$

bestimmt werden.

Es leuchtet ein, dass $\Psi(n, \chi(i))$ analogen Formeln, wie sie in Nr. 3 für $\psi(n, \kappa)$ entwickelt wurden, genügen wird. Hier sei bloss das eine Resultat hervorgehoben:

Die mittlere Dichte derjenigen Functionen n ten Grades, die modulo p durch keinen irreductiblen Factor i ten Grades theilbar sind, nähert sich mit wachsendem Modul der Grenze $c^{-\frac{1}{i}}$ ($n > i \cdot \chi(i)$)

Man gelangt zu diesem Satze auf dem nämlichen Wege, der in Nr. 4 eingeschlagen wurde, unter Benutzung des in der Literatur¹ vorfindlichen Ausdrucks für

$$\chi(i) = \frac{\sum_d p^d \mu\left(\frac{i}{d}\right)}{i},$$

wo die Summe sich auf alle Theiler von i zu erstrecken hat und $\mu(x)$ die bekannte zahlentheoretische Function bedeutet.

¹ Serret, Algebra II, deutsche Ausgabe, 1868, S. 111.

Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne

von

Dr. Gustav Jäger.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1894.)

In seiner Abhandlung »Zählung der nördlichen Sterne im Bonner Verzeichnisse nach Grössen«¹ zeigt K. v. Littrow, dass die Folgerungen aus der Annahme, die Sterne haben im Allgemeinen dieselbe Entfernung von einander und dieselbe Helligkeit, zu keinem Widerspruche mit den thatsächlichen Verhältnissen führen, wenn man sich auf die Sterne erster bis zwölfter Grösse beschränkt. Dabei verfährt er folgendermassen. Bezeichnen wir mit z_m die Zahl der Sterne bis inclusive einer gewissen Grössenklasse, und nennen wir analog r_{m+1} den Radius der betreffenden Kugel, so ist, wenn k eine Constante bedeutet,

$$z_m = k r_{m+1}^3 \quad (1)$$

oder

$$r_{m+1} = \sqrt[3]{\frac{z_m}{k}}. \quad (2)$$

Alle Sterne der m -Grösse befinden sich in der Hohlkugel zwischen den Radien r_m und r_{m+1} . Die Helligkeit der Sterne an der inneren Grenze einer solchen Hohlkugel kann durch $\frac{c}{r_m^2}$, wo c wieder eine Constante, an der äusseren durch $\frac{c}{r_{m+1}^2}$ ausgedrückt werden, somit die mittlere Helligkeit H_m der Sterne dieser Hohlkugel durch

¹ Wiener Ber., LIX, S. 569 ff, 1869.

$$H_m = \frac{1}{r_{m+1} - r_m} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{cd r}{r^2} = \frac{c}{r_m r_{m+1}}. \quad (3)$$

Nach dem Sinne, in welchem man die Schätzung von Sterngrössen gewöhnlich auffasst, ist ferner

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r_m}{r_{m+2}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_{m+1}}} = \delta, \quad (4)$$

eine Constante. Indem man nun für z_{m-1} und z_{m+1} die bekannten Zahlen von z_6 und z_8 einsetzt, ferner $H_1 = 1$ und $r_2 = 1$ macht, lassen sich aus den vorhandenen Gleichungen die Werthe für k , c und δ finden. Da nun weiter

$$\frac{r_m}{r_{m+1}} = \frac{r_{m+1}}{r_{m+2}},$$

so folgt nach Gleichung (4)

$$\frac{r_m}{r_{m+1}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_m}} = \sqrt{\delta},$$

folglich

$$z_{m-1} = z_m \sqrt{\delta^3}. \quad (5)$$

Die Zahl der Sterne m^{ter} Grösse allein ist gegeben durch

$$Z_m = z_m - z_{m-1} = z_m (1 - \sqrt{\delta^3}). \quad (6)$$

Berechnet man nach dieser Formel die Zahl der Sterne der verschiedenen Grössenklassen, so ist die Übereinstimmung mit der directen Zählung eine sehr befriedigende.

Wie man annehmen kann, die Helligkeit der Fixsterne sei durch deren Entfernung bedingt, so liegt es auch nahe, die wahren Eigenbewegungen der Sterne als durchschnittlich gleich und die scheinbare Verschiedenheit bloss als Folge der verschiedenen Entfernung zu betrachten. Auf Grund dieser Annahme findet Struve¹ folgende Tabelle.

¹ Siehe Klein, Fixsternhimmel, S. 123.

1. und 2. Classe;	Entfernung	1·00
3. »	»	1·32
4. »	»	1·62
5. »	»	2·00
6. »	»	2·45
7. »	»	2·56

Nimmt man hingegen die wahre Helligkeit als gleich gross an, so erhält man

1. und 2. Classe;	Entfernung	1·00
3. »	»	1·89
4. »	»	2·76
5. »	»	4·00
6. »	»	5·78
7. »	»	8·32

Diese beiden Zahlenreihen lassen sich nicht vereinen, und infolge dessen können die beiden Annahmen über die gleiche Vertheilung der Fixsterne, sowohl der Helligkeit, als auch der Eigenbewegung nach nicht gleichzeitig bestehen.

In neuerer Zeit hat nun O. Stumpe in seiner Abhandlung »Untersuchungen über die Bewegung des Sonnensystems«¹ gezeigt, dass sich die gleichmässige Vertheilung der Eigenbewegungen der Fixsterne aufrecht erhalten lässt. Er vereinigt zu dem Zwecke die Sterne in vier Gruppen, wie folgt:

1. Gruppe.	Jährliche Eigenbewegung	0'16—0'32..551 Sterne
2. »	»	0'32—0'64..340 »
3. »	»	0'64—1'28..105 »
4. »	»	1'28—∞ .. 58 »

Stumpe folgert nun: »Da das Mittel der Eigenbewegungen für die vier Sterngruppen der Reihe nach

0'23, 0'43, 0'85, 2'39

ist, so erhält nicht nur die allerdings von vorneherein plausible Annahme, dass die Sterne mit grösserer Eigenbewegung uns

¹ Astr. Nachr. CXXV, S. 385 ff.

näher sind, als die mit geringerer, ihre volle Berechtigung, sondern es scheint sich sogar direct das Gesetz auszusprechen, dass die Entfernungen der Sterne umgekehrt proportional sind der Grösse ihrer Eigenbewegung.

Bemerkenswerth ist ferner, dass sich für die vier Sterngruppen ein Gang nach den Helligkeitsgruppen nicht zeigt. Es sind im Mittel die Helligkeiten der Sterne in den vier Gruppen

$$6.0^m, \quad 6.7^m, \quad 6.1^m, \quad 6.5^m.$$

Hieraus scheint hervorzugehen, dass die Grösse der Eigenbewegung ein sichereres Kriterium, die Entfernungsverhältnisse der Fixsterne zu bestimmen, bietet als die Helligkeit.

So sehen wir denn, dass sowohl die eine Annahme, die Eigenbewegungen seien für alle Sterne gleich gross, als auch die Annahme, die Leuchtstärke sei im Allgemeinen für alle Sterne dieselbe, während eine die andere ausschliesst, eine jede für sich wohl bestehen kann. Zweck der folgenden Untersuchung ist nun, diese beiden Annahmen so zu verallgemeinern, dass nicht nur jede für sich als Bild der wirklichen Verhältnisse gelten kann, sondern gleichzeitig die eine durch die andere bedingt wird.

Wir lassen die Voraussetzung, dass die Lichtstärke für alle Sterne dieselbe sei, fallen, jedoch wollen wir die Annahme beibehalten, dass die Sterne ein und derselben Leuchtkraft im Raume gleichmässig vertheilt seien. Die scheinbare Helligkeit lässt sich dann wiederum, wenn wir die K. v. Littrow'sche Bezeichnungsweise beibehalten, nach Gleichung (3) darstellen durch

$$H_m = \frac{c'}{r'_m r'_{m+1}} = \frac{c''}{r''_m r''_{m+1}} = \dots = \frac{c^{(n)}}{r^{(n)}_m r^{(n)}_{m+1}}.$$

Dabei sind also die verschiedenen c proportional der Lichtmenge, welche die entsprechenden Sterne in Wirklichkeit ausstrahlen. Es folgt weiter

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r'_m}{r'_{m+2}} = \frac{r''_m}{r''_{m+2}} = \dots = \frac{r^{(n)}_m}{r^{(n)}_{m+2}} = \delta.$$

Bezeichnen wir nun mit z'_m die Zahl jener Sterne, welche innerhalb des Kugelraumes vom Radius r_{m+1} liegen und in

ihrer wahren Leuchtstärke der Constanten c' entsprechen, in gleicher Weise mit z''_m die Zahl jener Sterne, welche sich auf c'' und r''_{m+1} beziehen u. s. f., so ergibt sich

$$z'_m = k' r'^3_{m+1}, z''_m = k'' r''^3_{m+1}, \dots z^{(n)}_m = k^{(n)} r^{(n)3}_{m+1}.$$

Hiebei sind die verschiedenen k Constanten, welche lediglich von der Zahl der Sterne einer jeden Classe in einem bestimmten Volumen abhängen.

Nennen wir nun die Zahl sämmtlicher Sterne, deren Helligkeit gleich oder grösser als H_m ist, z_m , so ist

$$z_m = z'_m + z''_m + \dots + z^{(n)}_m = k' r'^3_{m+1} + k'' r''^3_{m+1} + \dots + k^{(n)} r^{(n)3}_{m+1}.$$

Ferner erhalten wir

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \sqrt[3]{\frac{z'_{m-1}}{z'_{m+1}}} = \sqrt[3]{\frac{z''_{m-1}}{z''_{m+1}}} = \dots = \sqrt[3]{\frac{z^{(n)}_{m-1}}{z^{(n)}_{m+1}}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_{m+1}}} = \delta.$$

Das ist aber dieselbe Gleichung, wie Gleichung (4). Wir können daher auch hier dieselben Folgerungen machen, wie dort. Es ist ebenfalls

$$\sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_m}} = \sqrt{\delta}, \quad z_{m-1} = z_m \sqrt{\delta^3},$$

und es ist die Zahl der Sterne m^{ter} Grösse durch die Gleichung

$$Z_m = z_m - z_{m-1} = z_m (1 - \sqrt{\delta^3})$$

gegeben.

Wie wir schon erwähnt haben, entspricht diese Gleichung den thatsächlichen Verhältnissen. Es hindert uns also gar nichts anzunehmen, dass die Lichtmengen, welche die verschiedenen Sterne aussenden, innerhalb des Intervalls $0 - \infty$ variiren können. Bedingung ist nur, dass die Sterne verschiedener Lichtstärke über den ganzen Himmelsraum gleichmässig vertheilt sind, was nach dem Obigen für die Sterne erster bis zwölfter Grösse zutrifft.

Wiederum finde ich hier, wie ich schon seinerzeit auf anderem Wege in der Abhandlung »Folgerungen aus den Eigenbewegungen der Fixsterne«¹ gezeigt habe, die grosse Analogie

¹ Monatsh. für Math. und Phys. II.

zwischen dem gasförmigen und dem Zustande des Weltalls. Nur sind hier die Sterne das, was wir dort Molekeln nennen. In einem Gase können wir nicht annehmen, dass einer jeden Molekel dieselbe Temperatur zukommt, sondern das, was wir die Temperatur eines Gases nennen, ist nur das Mittel der Temperaturen der einzelnen Molekeln, welche, nach der absoluten Temperaturskala gemessen, zwischen 0 und ∞ variiren können. Es ergibt sich das unmittelbar aus dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Molekeln in einem Gase, indem ja die Temperatur einer Molekel von der jeweiligen Geschwindigkeit derselben abhängig ist.

In gleicher Weise fanden wir nun auch für die Himmelskörper, dass die Temperaturen derselben — denn nach diesen richten sich ja die ausgestrahlten Lichtmengen — nach einem bestimmten Gesetze vertheilt sein müssen. Welcher Art jedoch dieses Gesetz ist, können wir aus dem Bisherigen nicht erschliessen, indem ja zwischen den verschiedenen Werthen von c und k die willkürlichsten Beziehungen angenommen werden können, ohne dass dadurch das Resultat unserer Untersuchung gestört wird.

Desgleichen ist ersichtlich, dass, wenn die wahren Eigenbewegungen der Himmelskörper im Allgemeinen gleich und die scheinbaren nur durch die verschiedene Entfernung der Sterne bedingt wären, die gleich grossen scheinbaren Eigenbewegungen sich auf die verschiedensten Sternklassen vertheilen müssten, da ja aus ein und derselben Entfernung von den verschiedenen Sternen uns ganz verschiedene Lichtmengen zugesandt werden können.

Damit wäre eigentlich schon der Widerspruch gelöst, welcher sich in den eingangs erwähnten Annahmen zeigt. Doch wir wollen uns damit noch nicht begnügen, sondern es soll auch für die Eigenbewegungen nachgewiesen werden, dass eine jede Annahme bezüglich der Vertheilung der wahren Eigenbewegungen für das Resultat vollständig willkürlich ist, wenn nur wiederum das angenommene Vertheilungsgesetz auf den ganzen Himmelsraum ausgedehnt wird.

Die scheinbare Eigenbewegung eines Sternes rührt zum Theil von der wahren Eigenbewegung desselben, zum Theil

von der Eigenbewegung des Sonnensystems her. Wir wollen demnach unsere Untersuchung in zwei Theile zerlegen. Zuerst wollen wir annehmen, alle Sterne stehen still und die scheinbaren Eigenbewegungen rühren nur von der Bewegung des Sonnensystems her. Im zweiten Falle lassen wir das Sonnensystem stillstehen und nur die Sterne sich bewegen. Bewegt sich nur die Sonne in O (Fig. 1) in der Richtung OR mit der absoluten Geschwindigkeit v , so hat das für das Auge dieselbe Wirkung, als würde sich der Stern S mit derselben Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung bewegen. Die Entfernung des Sternes von der Sonne sei r , und es schliesse die Verbindungsgerade Sonne — Stern mit der Bewegungsrichtung der Sonne den Winkel α ein, so ist die scheinbare laterale Eigenbewegung c des Sternes durch die Gleichung

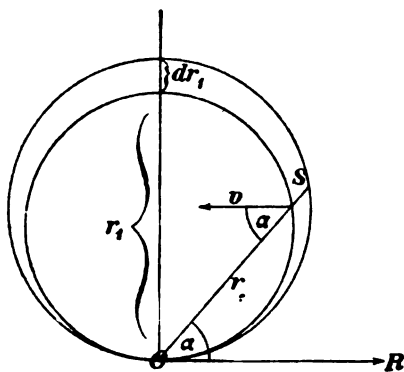


Fig. 1.

$$c = \frac{v \sin \alpha}{r}$$

gegeben. Das ist, wie Fig. 1 zeigt, die Gleichung eines Kreises, welcher von der OR -Achse tangirt wird. Lassen wir diesen Kreis um die Achse rotiren, so erhalten wir eine wulstförmige Fläche und es haben alle Sterne, welche sich auf dieser Fläche befinden, dieselbe Eigenbewegung. Daraus ist schon ersichtlich, dass die Eigenbewegung des Sternes nicht nur von seiner Entfernung, sondern auch von seiner Lage gegen das Sonnensystem abhängt. Es kann für ein und dieselbe Eigenbewegung c die Entfernung des Sternes von O bis r_1 wachsen, wenn wir mit r_1 den Durchmesser des Kreises bezeichnen, und zwar sei unter r_1 jener Durchmesser verstanden, welcher auf OR senkrecht steht.

Wächst r um dr bei constantem α , so nimmt r_1 um dr_1 zu und es ist $dr = dr_1 \sin \alpha$, da ja $r = r_1 \sin \alpha$. Lassen wir noch α um $d\alpha$ wachsen, so erhalten wir ein Volumelement der Wulstes von der Grösse

$$2 \pi r^2 \sin \alpha d\alpha dr = 2 \pi r_1^2 \sin^3 \alpha d\alpha dr_1.$$

Ist ferner die Zahl der Sterne in der Volumeinheit N , so resultirt für die Zahl der Sterne in unserem Volumelemente

$$2 \pi N r_1^2 dr_1 \sin^3 \alpha d\alpha. \quad (I)$$

Integriren wir diesen Ausdruck für die Variable α von 0 bis π , so erhalten wir die Zahl jener Sterne, welche die Eigenbewegung c besitzen. Dieselbe ist, da

$$\int_0^\pi \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{3}{8} \pi,$$

$$Z' = \frac{3}{4} \pi^2 N r_1^2 dr_1. \quad (7)$$

Bedenken wir nun, dass $c = \frac{v}{r_1}$, so ergibt sich in gleicher Weise für eine andere Eigenbewegung $c' = \frac{v}{r'_1}$, oder

$$r_1 = \frac{v}{c}, \quad r'_1 = \frac{v}{c'}.$$

Die Zahl Z sämtlicher Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen c und c' liegen, erhalten wir nun, wenn wir Gleichung (7) von r_1 bis r'_1 , d. i. von $\frac{v}{c}$ bis $\frac{v}{c'}$ integriren. Dies ergibt dann

$$Z = \frac{3}{4} \pi^2 N \int_{r_1}^{r'_1} r_1^2 dr_1 = \frac{\pi^2 N}{4} (r_1'^3 - r_1^3) = \frac{\pi^2 N v^3}{4} \left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right), \quad (8)$$

wobei natürlich $c > c'$ ist.

Wir wollen nun den zweiten Fall untersuchen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, sämtliche Sterne hätten dieselbe wahre Eigenbewegung, doch seien die Bewegungsrichtungen

regelmässig im Raume vertheilt, während das Sonnensystem still stehe. Wiederum erhalten wir für c , wie aus Fig. 1 ersichtlich,

$$c = \frac{u \sin \alpha}{r}.$$

Nur ist OR jetzt eine willkürlich gelegte Coordinatenachse, während u die wirkliche Geschwindigkeit der Sterne sein soll. In gleicher Weise gestaltet sich jede weitere Rechnung genau so, wie für den früheren Fall, so dass wir auch hier schliesslich für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen zwei bestimmten Grenzen liegen, die Gleichung (8) erhalten. Wir können also ohneweiters die Eigenbewegung der Sonne auf die Sterne und umgekehrt übertragen, ohne dass wir an der Erscheinung etwas ändern. Daraus folgt, dass, wenn sowohl die Sterne mit einer Geschwindigkeit u begabt sind, als auch die Sonne mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt, das wahre Resultat für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen c und c' liegt, durch die Gleichung

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\pi^2 N}{4} (r_1'^3 - r_1^3) = \frac{\pi^2 N (u+v)^3}{4} \left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right) = \\ &= \frac{\pi^2 N w^3}{4} \left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right) = k \left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

gefunden wird, wobei natürlich

$$c = \frac{u+v}{r_1}, \quad c' = \frac{u+v}{r_1'}$$

zu setzen ist.

Wir wollen nun die Annahme, dass w für alle Sterne gleich sei, fallen lassen, und wie seinerzeit für die Lichtstärken, soll jetzt für die Eigenbewegungen angenommen werden, dass dieselben nach einem bestimmten Gesetze vertheilt sind, welches für den ganzen Himmelsraum gilt. Die verschiedenen Geschwindigkeiten seien w_1, w_2, \dots, w_n , die verschiedenen Werthe von r_1 seien jetzt dargestellt durch $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, so dass

$$c_1 = \frac{w_1}{\rho_1} = \frac{w_2}{\rho_2} = \dots = \frac{w_n}{\rho_n}$$

wird. Sind die zugehörigen Zahlen der Sterne in der Volumeneinheit N_1, N_2, \dots, N_n , so erhalten wir nach Gleichung (8), indem wir $c' = c_1$, $c = \infty$ setzen, für die Zahl sämtlicher Sterne, deren Eigenbewegung grösser als c_1 ist,

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\pi^2}{4} (N_1 \rho_1^3 + N_2 \rho_2^3 + \dots + N_n \rho_n^3) = \\ &= \frac{\pi^2}{4 c_1^3} (N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \dots + N_n w_n^3). \end{aligned}$$

In gleicher Weise ergibt sich für die Zahl sämtlicher Sterne, deren Eigenbewegung grösser als c'_1 ist, da nun

$$c'_1 = \frac{w_1}{\rho'_1} = \frac{w_2}{\rho'_2} = \dots = \frac{w_n}{\rho'_n},$$

$$Z'_1 = \frac{\pi^2}{4 c'^3_1} (N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \dots + N_n w_n^3).$$

Daraus folgt für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen c und c' liegt,

$$\begin{aligned} Z &= Z'_1 - Z_1 = \frac{\pi^2}{4} (N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \dots + N_n w_n^3) \left(\frac{1}{c'^3_1} - \frac{1}{c^3_1} \right) = \\ &= k \left(\frac{1}{c'^3_1} - \frac{1}{c^3_1} \right). \end{aligned}$$

Indem wir nun

$$\frac{\pi^2}{4} (N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \dots + N_n w_n^3) = \frac{\pi^2 N w^3}{4} = k$$

setzen, erhalten wir wiederum die Gleichung (9), so dass wir auch bei der Annahme verschiedener Sternengeschwindigkeiten für die Vertheilung der scheinbaren Eigenbewegungen dasselbe Gesetz erhalten müssen, wie für die Annahme gleicher Geschwindigkeiten aller Sterne. Wiederum lässt sich über die Art des Gesetzes gar nichts aussagen, da eine jede Annahme zum selben Resultate führt.

Schon für den Fall, dass wir annehmen, Leuchtkraft und wahre Eigenbewegung sei für alle Sterne gleich gross, kommen

wegen der Gleichung $c = \frac{w \sin \alpha}{r}$ den Sternen gleicher scheinbarer Eigenbewegung ganz verschiedene Entfernungen zu. Wie vielmehr muss das der Fall sein, wenn wir Leuchtkraft und wahre Eigenbewegung nach willkürlichen Gesetzen vertheilt annehmen. Es nimmt daher gar nicht Wunder, dass die vier Gruppen, in welche Stumpe die Sterne nach ihrer Eigenbewegung eingetheilt hat, so ziemlich dieselbe mittlere Helligkeit besitzen, und dass umgekehrt die mittlere Eigenbewegung der verschiedenen Grössenklassen der Sterne viel weniger varriert, als man von vornherein erwartet hat.

Man kann natürlich auch nach unserer neuen Anschauungsweise von der mittleren Entfernung der Sterne 1., 2. . . . n . Grösse sprechen. Nur ist dabei zu überlegen, dass diese Grössenklassen sich jetzt nicht mehr in getrennten Kugelschichten vorfinden, sondern dass die Sterne einer jeden Grössenklasse über den ganzen Raum vertheilt sein können.

Um die mittlere Entfernung einer bestimmten Grössenklasse zu finden, haben wir die Summe sämmtlicher Entfernungen durch die Zahl der Sterne dieser Classe zu dividiren. Somit ist die mittlere Entfernung

$$r_m = \frac{N' r'_m + N'' r''_m + \dots + N^{(n)} r^{(n)}_m}{N},$$

wenn wir

$$N = N' + N'' + \dots + N^{(n)}$$

setzen. In gleicher Weise ist

$$r_{m+2} = \frac{N' r'_{m+2} + N'' r''_{m+2} + \dots + N^{(n)} r^{(n)}_{m+2}}{N}.$$

Da nun

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r'_m}{r'_{m+2}} = \frac{r''_m}{r''_{m+2}} = \dots = \frac{r^{(n)}_m}{r^{(n)}_{m+2}},$$

so ist auch

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{N' r'_m + N'' r''_m + \dots + N^{(n)} r^{(n)}_m}{N' r'_{m+2} + N'' r''_{m+2} + \dots + N^{(n)} r^{(n)}_{m+2}} = \frac{r_m}{r_{m+2}}.$$

Das heisst es stehen die mittleren Entfernungen der einzelnen Grössenklassen der Fixsterne im selben Verhältnisse, wie wir es nach Gleichung (4) erhalten haben, welche aus der Annahme gleicher wirklicher Helligkeit für alle Fixsterne entsprang.

Auf ganz analoge Weise lässt sich natürlich auch bei den Eigenbewegungen verfahren. Auch da ändert sich für das Verhältniss der mittleren Entfernung der Sterne verschiedener scheinbarer Eigenbewegung durch unsere erweiterte Annahme nichts.

Bei einem Vergleich von Zählung und Rechnung muss natürlich immer vorausgesetzt werden, dass die Zählung erschöpfend ist. Das ist bei den verschiedenen Grössenklassen der Sterne als sicher anzunehmen, da man es ja hier nur mit Sternen zu thun hat, die man auch thatsächlich sieht. Nicht so ist es bei den Eigenbewegungen, zumal wenn man zu kleineren Werthen derselben herabsteigt. Da ist es sehr wahrscheinlich, dass viele Sterne wegen ihrer geringen Helligkeit vollständig übersehen werden. Man hat ja die Bestimmung der Eigenbewegung nur etwa auf Sterne 1. bis 7. Grösse ausgedehnt. Das hat zur Folge, dass sich das Gesetz, welches durch Gleichung (8) dargestellt wird, nur für die grösseren Eigenbewegungen prüfen lässt, wie es Stumpe gethan hat. Hier dürfte die Zahl der Sterne, welche einer jeden Gruppe zukommt, ziemlich vollständig sein. Die Beschränkung auf grössere Eigenbewegungen führt aber wieder den Nachtheil mit sich, dass die Zahl der Sterne eine geringe wird. So beträgt dieselbe bei Stumpe z. B. nur 1055. Würde man sich bei der Prüfung des Helligkeitsgesetzes auf dieselbe Anzahl beschränken, so wäre die Übereinstimmung zwischen Zählung und Rechnung eine ungemein rohe. Es sei erwähnt, dass K. v. Littrow seine Untersuchungen über eine Zahl von fast 60.000 Sternen ausdehnte.

Wir wollen daher untersuchen, welche Vertheilung der scheinbaren Eigenbewegungen sich ergibt, wenn wir unsere Zählung nur auf einen bestimmten Raum beziehen. Wir stellen z. B. die ganz bestimmte Frage: Wie vertheilen sich die scheinbaren Eigenbewegungen über die Sterne 1. bis 4. Grösse? Beschränken wir uns bloss auf Verhältnisszahlen, so ist es für

die Rechnung, wie schon wiederholt gezeigt wurde, ganz gleichgiltig, welches Vertheilungsgesetz der wahren Helligkeiten und Eigenbewegungen wir annehmen. Wir setzen deshalb der Einfachheit halber voraus, die wahre Helligkeit und die wahre Eigenbewegung w sei für alle Sterne dieselbe. Unsere Aufgabe ist dann die, für eine bestimmte scheinbare Eigenbewegung c die Zahl der Sterne zu finden, welche innerhalb einer Kugel liegen, deren Radius ρ bis zur Grenze der Sterne 4. Grösse reicht. Es lässt sich dann der Ausdruck (I)

nicht ohneweiters über α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und über r_1 von 0 bis r_1 integrieren, sondern wir haben dann verschiedene Fälle zu unterscheiden, für welche verschiedene Integrationsgrenzen einzusetzen sind.

Ist $r_1 = \frac{w}{c}$ kleiner als ρ , so ist die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen 0 und c liegt, proportional dem Volumen, welches von der Kugel mit dem Radius ρ und von der Oberfläche des Wulstes begrenzt wird, welcher durch Rotation eines Kreises vom Durchmesser r_1 um die Achse OR als Tangente entsteht. In Fig. 2 ist dieser Raum durch Schraffen gekennzeichnet. Dieses Volumen entspricht dem Ausdrucke

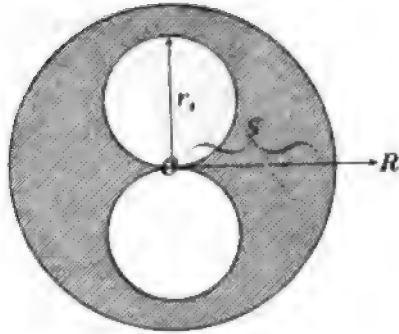


Fig. 2.

$$\frac{4\pi}{3} \rho^3 - \frac{\pi^2}{4} r_1^3.$$

Der zweite Fall ist derjenige, dass

$$\rho < r_1 < \sqrt{2} \rho.$$

Für diesen Fall haben wir an der erzeugenden Curve unseres Rotationskörpers, wie Fig. 3 zeigt, drei Stücke zu unterscheiden, nämlich OA , AB und BC . A ist der Durchschnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten, welche von B

auf OR gefällt wird. Ist OR die x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so wird unser Raum durch die yz -Ebene in zwei symmetrische Hälften geteilt, und wir erhalten unser Volumen, wenn wir von der Summe des durch OA und BC begrenzten Raumes jenen subtrahieren, welcher durch die Rotation von AB bestimmt wird. Dieses Resultat ist doppelt zu nehmen,

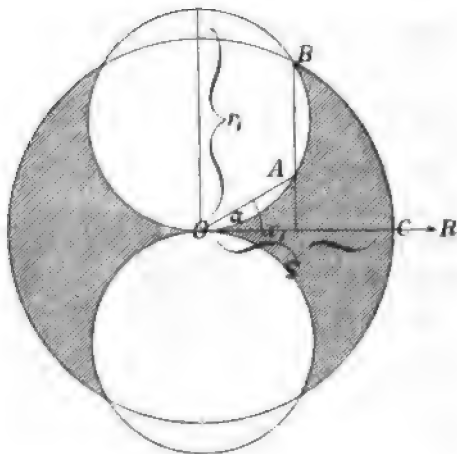


Fig. 3.

da wir ja für die linke Seite unseres symmetrischen Körpers dasselbe Volumen erhalten.

Für OA gilt die Gleichung

$$y^2 - r_1 y + x^2 = 0,$$

woraus folgt

$$y = \frac{r_1}{2} \pm \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2}.$$

Für das Volumen erhalten wir dann

$$\pi \int_0^{x_1} y^2 dx = \pi \int_0^{x_1} \left[\frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2 \right] dx,$$

wobei x_1 die Abscisse von A ist.

Für BC gilt die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

daher ist das zugehörige Volumen gleich

$$\pi \int_{x_1}^{\rho} (\rho^2 - x^2) dx.$$

Das Volumen, welches von dem Kreissegmente AB erzeugt wird, wollen wir nach dem Guldin'schen Theorem berechnen, indem wir die Fläche des Segments

$$2 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2} dx$$

mit 2π und der Ordinate des Schwerpunktes $\frac{r_1}{2}$ multipliciren, wodurch wir

$$2\pi r_1 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2} dx$$

erhalten.

Es ist somit das Volum, innerhalb dessen sich unsere Sterne befinden, gleich

$$2\pi \int_0^{x_1} \left(\frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2 \right) dx + \\ + 2\pi \int_{x_1}^{\rho} (\rho^2 - x^2) dx + 4\pi r_1 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2} dx.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit der Zahl der Sterne in der Volumeinheit N , so ergibt sich die Zahl jener Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen 0 und c liegen.

Der dritte Fall ist nun der, dass

$$r_1 > \sqrt{2}\rho$$

ist. Wir erhalten dann nach Analogie des Vorhergehenden, wie aus Fig. 4 zu ersehen ist, für das entsprechende Volumen

$$2\pi \int_0^{x_1} \left(\frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2 \right) dx + 2\pi \int_{x_1}^{\rho} (\rho^2 - x^2) dx.$$

Welcher von den drei Fällen bei einer bestimmten Aufgabe in Rechnung zu ziehen ist, muss sich aus der Art der

Aufgabe ergeben. Man sieht, dass man es dabei im Allgemeinen mit sehr verwickelten Rechnungen zu thun hat.

Für die Frage, welche wir uns oben stellten, die Vertheilung der Eigenbewegungen der Sterne 1. bis 4. Grösse zu bestimmen, genügt die Beziehung des ersten Falles. Es ist

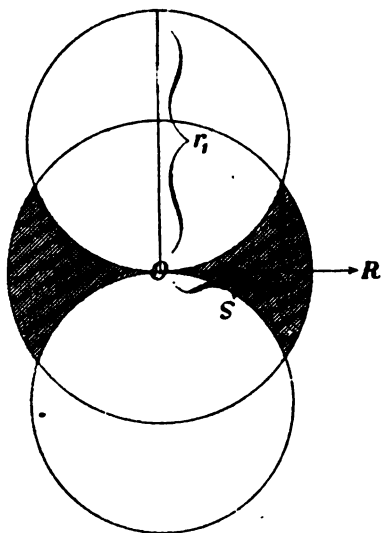


Fig. 4.

daher die Zahl der Sterne mit einer Eigenbewegung zwischen 0 und c gegeben durch

$$N\left(\frac{4\pi}{3}\rho^3 - \frac{\pi^2}{4}r_i^3\right) = \frac{4\pi}{3}N\rho^3 - \frac{\pi^2 N w^3}{4c^3} = a - \frac{b}{c^3},$$

wenn wir

$$\frac{4\pi}{3}N\rho^3 = a, \quad \frac{\pi^2 N w^3}{4} = b$$

setzen, wobei a und b Constanten sind.

In folgender Tabelle sind die Sterne 1. bis 4. Grösse, deren Eigenbewegungen zwischen 0 und c liegen, zusammengestellt, wie sie sich bei »Mädler, Untersuchungen über die Fixsternsysteme« vorfinden. Dabei ist c in Secunden für das Jahrhundert angegeben.

c	Zahl der Sterne
10	318
20	485
30	537
40	563

Setzen wir

$$a = 540, \quad b = 222000,$$

und berechnen wir daraus die verschiedenen Sternzahlen, so ergibt sich folgende Tabelle.

c	Zählung	Rechnung	Quotient
10	318	318	1·00
20	485	512	0·95
30	537	532	1·01
40	563	537	1·05

In der That stimmen Zählung und Rechnung so weit überein, wie man es bei der geringen Sternzahl erwarten kann.

Wenn wir für die Sterne 1. bis 4. Grösse die Annahme einer gleichen Vertheilung der Eigenbewegungen aufrecht halten können, so ist dies natürlich nicht massgebend für die übrigen Grössenklassen. Ja es dürfte mit Gewissheit anzunehmen sein, dass die lichtärmeren Sterne, d. h. die in Wahrheit kleineren Sterne im Durchschnitt eine grössere wahre Eigenbewegung haben, als die grösseren. Denn denkt man sich diese infolge der Vereinigung kleinerer Himmelskörper entstanden, so ist leicht einzusehen, dass wegen der Erhaltung des Schwerpunktes diese grösseren Massen sich langsamer fortbewegen müssen als die kleineren. Und darauf weisen ja auch thatsächlich die Beobachtungen hin.

Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind

(I. Theil)

von

Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Jänner 1894.)

Das vor mehr als zwei Jahrhunderten aufgestellte Hooke'sche¹ Gesetz: »Ut tensio, sic vis«, d. i. das Gesetz der Proportionalität der Spannungen und der gleichzeitigen Deformationen bildet noch heute die gewöhnliche Grundlage der Elasticitätstheorie, denn die innerhalb der Elasticitätsgrenzen gewöhnlich als allgemein gültig angenommenen Elasticitätsgrundgesetze, die bekanntlich für isotrope Substanzen zuerst von Navier,² Poisson,³ Cauchy⁴ aus der Wechselwirkung der Moleküle theoretisch deducirt worden sind, setzen voraus, dass die

¹ Robert Hooke, »Lectures de potentia restitutiva or of Spring« (Philosophical tracts and collections, 1678). Das bekannte Anagramm *ceiioossstlu* dieses Gesetzes findet sich schon in Hooke's »Decription of Helioscopes« (1676) vor.

² Navier, »Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques« (Mémoires de l'Académie des sciences, 1824, Tome VII, p. 375 e. s.).

³ Poisson, »Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques« (Mémoires de l'Académie des sciences, Tome VIII, 1828, p. 357 e. s.).

⁴ Cauchy, »Exercices de mathém.« Tome III, p. 188 (1828) und Tome IV, p. 129 (1829).

Spannungen lineare Functionen der Deformationsgrößen sind, indem Glieder, welche in Bezug auf die letzteren von höherer Ordnung sind, vernachlässigt werden. Nur das fragliche Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten, welches nach der Moleculartheorie sich für sämtliche isotrope Körper im Gegensatze zu den Beobachtungsergebnissen als constant ergab, war der Anlass von mannigfachen theoretischen und experimentellen Untersuchungen. Zwar wurde hie und da durch manche Beobachtungsergebnisse der Zweifel wachgerufen, ob das in den meisten Fällen wohl durch die Beobachtungen (von Wertheim, Edlund, Morin u. A.) bestätigte Proportionalitätsgesetz eine unbeschränkte Giltigkeit habe. Doch erst in neuerer Zeit ist durch genaue Beobachtungen von A. Miller¹ und von J. O. Thompson² festgestellt worden, dass selbst vollkommen elastische feste Körper das Proportionalitätsgesetz nicht genau befolgen, sondern dass dasselbe nur ein Näherungsgesetz ist und dass dementsprechend der sogenannte Elasticitätsmodul nicht als eine Elasticitätsconstante anzusehen ist, sondern dass derselbe mit zunehmender Belastung abnimmt. Diese Beobachtungsergebnisse und überdies gewisse theoretische, mit den Erfahrungsthatfachen nicht in Einklang zu bringende Folgerungen, zu welchen die Anwendung der derzeit herrschenden Elasticitätsgrundgesetze auf Untersuchungen aus dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie geführt haben, bewogen den Verfasser, auf theoretischem Wege die bei der Berechnung der Spannungen in isotropen Substanzen zu den bekannten linearen Gliedern hinzuzufügenden Glieder, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind, zu ermitteln, beziehungsweise das Potential der inneren Kräfte bis auf Glieder dritter Ordnung genau zu berechnen, und diese theoretischen Untersuchungen bilden den Gegenstand dieser Abhandlung.

¹ A. Miller, »Über die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elasticitätsmoduls« (Abhandlungen der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften, II. Classe, Bd. 16, Jahrg. 1888).

² Jos. Osgood Thompson, »Über das Gesetz der elastischen Dehnung« (Wiedemann's Annalen, Bd. 44, Jahrg. 1891, S. 555—576).

Ein Element irgend eines festen oder flüssigen Körpers werde unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte bei constant bleibender Temperatur deformirt. Infolge dieser Deformation erlangen die anfänglichen, zur Zeit t_0 bestehenden und auf ein an der Deformation des Körpers nicht theilnehmendes, orthogonales Axensystem sich beziehenden Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes m , welcher durch diese Deformation zur beliebigen Zeit t in die Lage M gelangt, zu dieser Zeit t die Werthe XYZ . Durch $\xi\eta\zeta$ seien die als einwerthige und stetige Functionen von xyz und t vorausgesetzten Coordinatenänderungen (Componenten der Verschiebung) bezeichnet, so dass

$$\left. \begin{aligned} X &= x + \xi \\ Y &= y + \eta \\ Z &= z + \zeta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ist.

Da in diesen Gleichungen die Grössen xyz von t unabhängig sind, während XYZ Functionen von xyz und t sind, so sind die Geschwindigkeitscomponenten $u_x u_y u_z$ des Punktes M zur Zeit t durch die partiellen Differentialquotienten

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

bestimmt, welche gleichfalls Functionen der vier von einander unabhängigen Variablen $xyz t$ sind. Die in der Elasticitätstheorie allgemein betrachteten Verschiebungsderivationen (shift-fluxions) für das dem Punkte M unmittelbar benachbarte, unendlich kleine Körperelement, dessen ursprüngliches Volum durch dv bezeichnet sei, sind zur Zeit t

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \lambda_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \mu_x &= \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \mu_y = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \mu_z = \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \nu_x &= \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \nu_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \nu_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Den Gleichungen (2) und (3) zufolge ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial \lambda_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial \lambda_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial \lambda_z}{\partial t} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial \mu_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial \mu_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial \mu_z}{\partial t} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \frac{\partial \nu_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial \nu_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial \nu_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Geschwindigkeitscomponenten eines dem Punkte m benachbarten Punktes m' , dessen anfänglichen Coordinaten $x+dx, y+dy, z+dz$ sind und welcher durch die stattgehabte Deformation zur Zeit t in die Lage M' gelangt, haben zu dieser Zeit t die Werthe

$$\left. \begin{aligned} u_x + du_x &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = \\ &= u_x + \frac{\partial \lambda_x}{\partial t} dx + \frac{\partial \nu_z}{\partial t} dy + \frac{\partial \mu_y}{\partial t} dz \\ u_y + du_y &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz = \\ &= u_y + \frac{\partial \mu_z}{\partial t} dx + \frac{\partial \lambda_y}{\partial t} dy + \frac{\partial \nu_x}{\partial t} dz \\ u_z + du_z &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz = \\ &= u_z + \frac{\partial \nu_y}{\partial t} dx + \frac{\partial \mu_x}{\partial t} dy + \frac{\partial \lambda_z}{\partial t} dz \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und die Coordinaten dieses Punktes M' zu derselben Zeit t sind $X+dx, Y+dy, Z+dz$, wo

$$\left. \begin{aligned} dX &= d(x + \xi) = (1 + \lambda_x) \cdot dx + \nu_z \cdot dy + \mu_y \cdot dz \\ dY &= d(y + \eta) = \mu_z \cdot dx + (1 + \lambda_y) \cdot dy + \nu_x \cdot dz \\ dZ &= d(z + \zeta) = \nu_y \cdot dx + \mu_x \cdot dy + (1 + \lambda_z) \cdot dz \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ist.

Da diese Gleichungen in Bezug auf $dx dy dz$ linear sind, so ist die Deformation eines unendlich kleinen Elementes eine homogene, und es müssen daher sämtliche unendlich nahe an M gelegenen Punkte M' , die ursprünglich innerhalb irgend eines Tetraëders dv gelegen sind, nach der Deformation in ihrer Gesammtheit ein zweites Tetraëder dV bilden.

Dasjenige elementare Tetraëder nun, dessen Eckpunkte $m_1 m_2 m_3$ ursprünglich die bezüglichen Coordinaten (x, y, z) , $(x+dx, y, z)$, $(x, y+dy, z)$, $(x, y, z+dz)$ besitzen und dessen anfängliches Volum $dv = \frac{1}{6} dx \cdot dy \cdot dz$ ist, erlangt durch die Deformation zur Zeit t eine durch die neue Lage $MM_1M_2M_3$ dieser Eckpunkte bestimmte Lage und Gestalt, für welche zufolge (6) die Coordinaten dieser vier Eckpunkte beziehungsweise $[X, Y, Z]$, $[X+(1+\lambda_x)dx, Y+\mu_x dx, Z+\nu_x dx]$, $[X+\nu_y dy, Y+(1+\lambda_y)dy, Z+\mu_y dy]$, $[X+\mu_z dz, Y+\nu_z dz, Z+(1+\lambda_z)dz]$ sind. Demgemäss ist das Volum dV des Tetraëders $MM_1M_2M_3$ bestimmt durch

$$dV = D \cdot dv, \quad (7)$$

wofern D die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1+\lambda_x & \mu_z & \nu_y \\ \nu_z & 1+\lambda_y & \mu_x \\ \mu_y & \nu_x & 1+\lambda_z \end{vmatrix} \quad (8)$$

bedeutet. Die Grösse der cubischen Dilatation ν in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M ist demnach

$$\nu = \frac{dV - dv}{dv} = D - 1. \quad (9)$$

Die Componenten jener im Punkte M herrschenden Spannung, die sich auf ein Flächenelement bezieht, welches zur Zeit t im deformirten Körperelemente zur x -Axe, beziehungsweise y -Axe, beziehungsweise z -Axe normal ist, seien $(X_x Y_x Z_x)$, beziehungsweise $(X_y Y_y Z_y)$, beziehungsweise $(X_z Y_z Z_z)$, während $p_x p_y p_z$ die Componenten der beschleunigenden äusseren Kraft zu derselben Zeit t bedeuten mögen. Die normalen Componenten $X_x Y_y Z_z$ der Spannungen seien positiv oder negativ

in Rechnung gezogen, je nachdem dieselben Druck- oder Zugspannungen sind. Es sei vorausgesetzt, dass zum mindesten in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M die Componenten $p_x p_y p_z$ und die cubische Dichtigkeit δ stetige Functionen der Punktcoordinaten und der Zeit t sind, so dass auch innerhalb desselben Bereiches die früher erwähnten Componenten der Spannung und die Glieder der Gleichungen (4) als stetige Functionen derselben Variablen angesehen werden können. Zur selben Zeit t ist dann den Gleichungen (4) zufolge beim Übergange von einem Punkte zum anderen das Differential der componentalen Beschleunigung der Bewegung parallel zu irgend einer Axe, etwa parallel zur x -Axe, nämlich

$$d \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} dy + \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial t^2} dz$$

jedenfalls unendlich klein, so dass die Annahme gerechtfertigt ist, dass diese Beschleunigung $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ innerhalb der ganzen Ausdehnung eines Parallelepipedes, dessen vom Punkte M ausgehende Kanten mit den drei Coordinatenaxen gleichgerichtet sind und die Längen $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ haben, dasselbe Qualitätszeichen besitzt, wofern diese Kanten entsprechend klein gewählt werden. Es hat sonach auch $P_x = \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t}$, d. i. die X -Componente der Resultanten sämmtlicher Kräfte, die auf irgend einen innerhalb dieses Parallelepipedes befindlichen materiellen Punkt von der Masse μ zur Zeit t einwirken, für alle Punkte des Parallelepipedes dasselbe Qualitätszeichen. Es kann demnach die auf alle diese Punkte sich erstreckende Summe $\Sigma[P_x \cdot u_x]$, d. i. der Gesamteffect der auf dieselben einwirkenden Kräftecomponenten P_x gleichgesetzt werden dem Producte aus ΣP_x und irgend einem Mittelwerthe der diesen einzelnen Punkten entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten, der durch v_x bezeichnet sei. Anderseits ist, wenn e_x den mittleren Effect dieser Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers bedeutet, dieser Gesamteffect auch durch $e_x \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z$ ausdrückbar, demnach

$$e_x \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z = \Sigma[P_x \cdot u_x] = v_x \cdot \Sigma P_x. \quad (10)$$

Für die zwischen den einzelnen materiellen Punkten μ des Parallelepipeds gegenseitig wirkenden, anziehenden, beziehungsweise abstossenden inneren Kräfte ist $\Sigma P_x = 0$, so dass bei der Bildung von ΣP_x bloss die X -Componenten der auf dieses Parallelepiped wirkenden äusseren Kräfte zu berücksichtigen sind, nämlich die auf die Masse $\bar{\delta} \cdot \Delta X \Delta Y \Delta Z$ des Parallelepipeds einwirkende äussere Kraft $\bar{\delta} \cdot \Delta X \Delta Y \Delta Z \cdot \bar{p}_x$ (wo durch die oberhalb einer Bezeichnung beigefügten Querstriche hier und in der Folge die Mittelwerthe angedeutet sein mögen), ferner die Druckkräfte, welche auf die zur x -Axe senkrechten Seitenflächen $\Delta Y \cdot \Delta Z$ seitens der das Parallelepiped umschliessenden Masse ausgeübt werden, nämlich

$$\bar{X}_x \cdot \Delta Y \Delta Z \quad \text{und} \quad -(\bar{X}_x + \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} \cdot \Delta X) \cdot \Delta Y \Delta Z,$$

ferner die auf die Seitenflächen $\Delta Z \Delta X$ wirkenden Schubkräfte

$$\bar{X}_y \cdot \Delta Z \Delta X \quad \text{und} \quad -(\bar{X}_y + \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} \cdot \Delta Y) \cdot \Delta Z \Delta X$$

und schliesslich die auf die Fläche $\Delta X \Delta Y$ entfallenden Schubkräfte

$$\bar{X}_z \cdot \Delta X \Delta Y \quad \text{und} \quad -(\bar{X}_z + \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z} \cdot \Delta Z) \cdot \Delta X \Delta Y.$$

Sonach ist der Gleichung (10) zufolge

$$e_x = v_x \left[\bar{\delta} \cdot \bar{p}_x - \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} - \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} - \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z} \right].$$

Um nun den auf die Volumeinheit des deformirten Körpers entfallenden Effect der inneren Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten des Parallelepipeds wirken, zu bestimmen, hat man zunächst den Effect der Kraft $\bar{\delta} \cdot \Delta X \Delta Y \Delta Z \cdot \bar{p}_x$ und die Effecte der oberwähnten, auf die Seitenflächen wirkenden sechs Kräfte, nämlich die Effecte $\bar{X}_x \cdot \Delta Y \Delta Z \cdot \bar{u}_x = \Delta Y \Delta Z \cdot (\bar{X}_x \bar{u}_x)$ und

$$-\Delta Y \Delta Z \cdot (\bar{X}_x \bar{u}_x + \frac{\Delta_x (\bar{X}_x \bar{u}_x)}{\Delta X} \cdot \Delta X)$$

u. s. w. von $e_x \cdot \Delta X \Delta Y \Delta Z$ in Abzug zu bringen und hierauf durch $\Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z$ zu dividiren, wodurch beim Übergange zu den Grenzwerten für $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$ nach Einsetzung von u_x statt v_x sich als Effect e_1 der X -Componenten der inneren Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M offenbar der Werth ergibt:

$$e_1 = \left[\frac{\partial (X_x u_x)}{\partial X} - u_x \frac{\partial X_x}{\partial X} \right] + \left[\frac{\partial (X_y u_x)}{\partial Y} - u_x \frac{\partial X_y}{\partial Y} \right] + \\ + \left[\frac{\partial (X_z u_x)}{\partial Z} - u_x \frac{\partial X_z}{\partial Z} \right] = X_x \frac{\partial u_x}{\partial X} + X_y \frac{\partial u_x}{\partial Y} + X_z \frac{\partial u_x}{\partial Z}. \quad (11)$$

Auf gleiche Art kann man für den Effect e_2 der Y -Componenten und den Effect e_3 der Z -Componenten der inneren Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers die Werthe bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= Y_x \frac{\partial u_y}{\partial X} + Y_y \frac{\partial u_y}{\partial Y} + Y_z \frac{\partial u_y}{\partial Z} \\ e_3 &= Z_x \frac{\partial u_z}{\partial X} + Z_y \frac{\partial u_z}{\partial Y} + Z_z \frac{\partial u_z}{\partial Z} \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Sonach ist der Gesamteffect dE der in dem dem Punkte M unmittelbar benachbarten unendlich kleinen Volumelemente dV zur Zeit t wirkenden inneren Kräfte bestimmt durch

$$dE = (e_1 + e_2 + e_3) dV. \quad (13)$$

Demgemäss ist die elementare mechanische Arbeit da_i dieser inneren Kräfte, die in dem der Zeit t unmittelbar angrenzenden Zeitelemente dt geleistet wird, bestimmbar aus der Gleichung

$$da_i = dE \cdot dt = (e_1 + e_2 + e_3) \cdot dV \cdot dt. \quad (14)$$

Da die Coordinatenänderungen $\xi \eta \zeta$ einwerthige Functionen der Variablen xyz und t sind, so können auch, wofern man die drei Gleichungen (1) berücksichtigt, auch xyz als Functionen von XYZ und t betrachtet werden, und es sind dann auch $\xi = X - x$, $\eta = Y - y$, $\zeta = Z - z$ und daher auch die

Geschwindigkeitscomponenten $u_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $u_y = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ als Functionen derselben Variablen XYZ und t anzusehen, wie dies die Glieder der Gleichungen (11) und (12) erheischen.

Ist also u irgend eine dieser drei Geschwindigkeitscomponenten, so ist, da u bei gleich bleibendem t bloss eine Function von XYZ ist, welche letzteren wiederum Functionen von xyz sind, die durch die Gleichungen (1) bestimmt sind,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Demnach ist den Gleichungen (1) und (3) zufolge

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot (1 + \lambda_x) + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \mu_z + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \nu_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \nu_z + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot (1 + \lambda_y) + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \mu_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \mu_y + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \nu_x + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot (1 + \lambda_z)$$

Bezeichnet man durch $l_x, m_z, n_y \dots$ die den einzelnen Gliedern $1 + \lambda_x, \mu_z, \nu_y \dots$ der durch (8) bestimmten Determinante D adjungirten Unterdeterminanten, so ist den letzten drei Gleichungen zufolge

$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial X} = l_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_z \frac{\partial u}{\partial y} + m_y \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial Y} = m_z \frac{\partial u}{\partial x} + l_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_x \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial Z} = n_y \frac{\partial u}{\partial x} + m_x \frac{\partial u}{\partial y} + l_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

Wendet man diese Gleichungen der Reihe nach auf die Geschwindigkeitscomponenten u_x, u_y, u_z an, so nehmen die Gleichungen (11) und (12) nach ihrer Multiplication mit D bei Beachtung von (4) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 e_1 \cdot D &= (l_x \cdot X_x + m_z \cdot X_y + n_y \cdot X_z) \cdot \frac{\partial \lambda_x}{\partial t} + (n_z \cdot X_x + l_y \cdot X_y + m_x \cdot X_z) \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} + \\
 &\quad + (m_y \cdot X_x + n_x \cdot X_y + l_z \cdot X_z) \cdot \frac{\partial \mu_y}{\partial t} \\
 e_2 \cdot D &= (l_x \cdot Y_x + m_z \cdot Y_y + n_y \cdot Y_z) \cdot \frac{\partial \mu_z}{\partial t} + (n_z \cdot Y_x + l_y \cdot Y_y + m_x \cdot Y_z) \cdot \frac{\partial \lambda_y}{\partial t} + \\
 &\quad + (m_y \cdot Y_x + n_x \cdot Y_y + l_z \cdot Y_z) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} \\
 e_3 \cdot D &= (l_x \cdot Z_x + m_z \cdot Z_y + n_y \cdot Z_z) \cdot \frac{\partial v_y}{\partial t} + (n_z \cdot Z_x + l_y \cdot Z_y + m_x \cdot Z_z) \cdot \frac{\partial \mu_x}{\partial t} + \\
 &\quad + (m_y \cdot Z_x + n_x \cdot Z_y + l_z \cdot Z_z) \cdot \frac{\partial \lambda_z}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Substituirt man nun die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von $e_1 e_2 e_3$ in die Gleichung (14), so nimmt dieselbe, da nach (7) $dV = D \cdot dv$ ist, die Form an:

$$da_i = [(L_x \cdot d\lambda_x + N_z \cdot dv_z + M_y \cdot d\mu_y) + (M_z \cdot d\mu_z + L_y \cdot d\lambda_y + N_x \cdot dv_x) + (N_y \cdot dv_y + M_x \cdot d\mu_x + L_z \cdot d\lambda_z)] \cdot dv, \tag{16}$$

wo

$$\begin{aligned}
 L_x &= l_x \cdot X_x + m_z \cdot X_y + n_y \cdot X_z & M_z &= l_x \cdot Y_x + m_z \cdot Y_y + n_y \cdot Y_z \\
 N_z &= n_z \cdot X_x + l_y \cdot X_y + m_x \cdot X_z & L_y &= n_z \cdot Y_x + l_y \cdot Y_y + m_x \cdot Y_z \\
 M_y &= m_y \cdot X_x + n_x \cdot X_y + l_z \cdot X_z & N_x &= m_y \cdot Y_x + n_x \cdot Y_y + l_z \cdot Y_z \\
 N_y &= l_x \cdot Z_x + m_z \cdot Z_y + n_y \cdot Z_z \\
 M_x &= n_z \cdot Z_x + l_y \cdot Z_y + m_x \cdot Z_z \\
 L_z &= m_y \cdot Z_x + n_x \cdot Z_y + l_z \cdot Z_z
 \end{aligned} \tag{17}$$

Setzt man nun für diese inneren Kräfte ein Potential dU voraus, (indem man etwa annimmt, dass die zwischen je zwei Massenpunkten des betrachteten Massenelementes wirkenden inneren Kräfte anziehende oder abstossende Kräfte sind, die von den constant bleibenden Massen dieser Massenpunkte oder überhaupt von gewissen, für jeden einzelnen Massenpunkt charakteristischen Constanten und überdies bloß von der variablen Entfernung der beiden auf einander einwirkenden Massenpunkte abhängen) und bezeichnet man durch f den Potential-

werth für die Volumeinheit des anfänglichen Volums dv des betrachteten Massenelementes, so ist

$$dU = f \cdot dv. \quad (18)$$

Für den ganzen Körper wäre das Potential durch das auf das ganze anfängliche (primitive) Volum v desselben auszu-
dehnende Integral $U = \int f \cdot dv$ bestimmt.

Da für ein gegebenes Körperelement das Potential dU blos von der veränderlichen relativen Lage der einzelnen Punkte dieses Elementes, sonach blos von den einzelnen relativen Coordinaten dX, dY, dZ dieser Punkte abhängig ist, und da ferner diese Grössen dX, dY, dZ den Gleichungen (6) zufolge bei einem gegebenen Körperelement (bei welchem die den einzelnen Punkten desselben ursprünglich zukommenden Werthe von dx, dy, dz , wie auch dv als constante Grössen anzusehen sind) lediglich Functionen der 9 Verschiebungsderivationen $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \mu_x \dots$ sind, so ist nothwendigerweise auch das Potential dU und der Gleichung (18) gemäss auch f blos eine Function dieser 9 variablen, von einander unabhängigen Verschiebungsderivationen.

Dem Begriffe des Potentials entsprechend muss aber das dem Zeitelemente dt entsprechende Differential dieser Function dU , nämlich $df \cdot dv$, der elementaren Arbeit da_i der inneren Kräfte, die durch (16) bestimmt ist, stets gleich¹ sein, was, wie aus der Form des Ausdruckes (16) ersichtlich ist, nur dann möglich ist, wenn

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda_x} &= L_x, & \frac{\partial f}{\partial \mu_z} &= M_z, & \frac{\partial f}{\partial v_y} &= N_y \\ \frac{\partial f}{\partial v_z} &= N_z, & \frac{\partial f}{\partial \lambda_y} &= L_y, & \frac{\partial f}{\partial \mu_x} &= M_x \\ \frac{\partial f}{\partial \mu_y} &= M_y, & \frac{\partial f}{\partial v_x} &= N_x, & \frac{\partial f}{\partial \lambda_z} &= L_z \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ist. Setzt man diese Werthe von $L_x N_z \dots$ in (17) ein und bestimmt aus diesen linearen Gleichungen die unbekannten Span-

¹ Identificirt man, was häufig geschieht, das Potential mit der potenziellen Energie, so muss es hier heissen: „entgegengesetzt gleich“. Es ist in diesem Falle, wenn man nämlich diesen letzteren Begriff des Potentials festhalten will, in der ganzen Abhandlung nur statt f durchwegs zu setzen ($-f$).

nungscomponenten $X_x X_y \dots$, so findet man das folgende für unsere Zwecke wichtige System von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} D.X_x &= (1+\lambda_x) \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_x} + \nu_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_z} + \mu_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_y} \\ D.X_y &= \mu_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_x} + (1+\lambda_y) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_z} + \nu_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_y} \\ D.X_z &= \nu_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_x} + \mu_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_z} + (1+\lambda_z) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_y} \\ D.Y_x &= (1+\lambda_x) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_z} + \nu_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_y} + \mu_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_x} \\ D.Y_y &= \mu_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_z} + (1+\lambda_y) \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_y} + \nu_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_x} \\ D.Y_z &= \nu_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_z} + \mu_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_y} + (1+\lambda_z) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_x} \\ D.Z_x &= (1+\lambda_x) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_y} + \nu_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_x} + \mu_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_z} \\ D.Z_y &= \mu_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_y} + (1+\lambda_y) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_x} + \nu_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_z} \\ D.Z_z &= \nu_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_y} + \mu_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_x} + (1+\lambda_z) \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_z} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Aus diesen streng richtigen Gleichungen ist zu ersehen, dass die allgemein übliche Identificirung der Spannungscomponenten $X_x X_y \dots$ mit den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial \lambda_x}, \frac{\partial f}{\partial \nu_z} \dots$ strenge genommen unstatthaft ist und nur dann gestattet ist, wenn man in erster Annäherung bei der Bestimmung der Spannungscomponenten von allen Gliedern, welche irgend ein Product aus diesen Differentialquotienten und den Verschiebungsderivationen $\lambda_x \nu_z \dots$ enthalten, absieht.

Die hier mit f bezeichnete, auf die Volumeinheit bezogene Potentialfunction f wird allgemein in allen den vielen Hand- und Lehrbüchern, welche die Theorie elastischer Körper behandeln, wie auch bei sämtlichen für die Praxis so überaus wichtigen technischen Anwendungen als eine bezüglich der Verschiebungsderivationen $\lambda_x \mu_z \nu_y \dots$ rationale homogene Function zweiten Grades angenommen, die lediglich Glieder zweiter

Ordnung enthält. Diese willkürliche Annahme ist nicht vollkommen gerechtfertigt. Zunächst liegt nach der Ansicht des Verfassers kein zwingender Grund vor, von den linearen Gliedern ganz abzusehen oder, was dasselbe besagt, anzunehmen, dass in jenem als deformationslos angenommenen anfänglichen Zustande, von welchem aus die in Rechnung gebrachte Deformation in Betracht gezogen wird, absolut keine Spannung im Innern eines Körpers vorhanden ist, — eine Annahme, die umsoweniger gerechtfertigt ist, als dieser Zustand nicht stets derselbe ist, sondern wesentlich von der Temperatur des Körpers abhängt, deren Änderung stets eine Deformation zur Folge hat (ausser man würde, was gewöhnlich nicht geschieht, die Deformation auf jenen Nullpunkt der Temperatur, für welchen eine jegliche Spannung den Werth Null hat, als Ausgangspunkt einer jeden in Betracht gezogenen Deformation beziehen). Für manche Untersuchungen ist es überdies nicht gestattet, die höheren Potenzen der Verschiebungsderivationen $\lambda_x \mu_z \dots$ zu vernachlässigen, da diese letzteren von demselben Grade sind, wie das Verhältniss der Deformationen zu den ursprünglichen Raumgrössen, das, wenn auch die Dimensionen eines unendlich kleinen Körperelementes nach der Deformation unendlich klein bleiben, dennoch in manchen Fällen nicht so klein ist, dass von höheren Potenzen desselben abgesehen werden kann.

Es soll demnach der im Vorworte gestellten Aufgabe gemäss in dieser Abhandlung die Potentialfunction f als eine ganze rationale Function dritter Ordnung vorausgesetzt werden, und zwar soll von nun an die Betrachtung sich bloß auf ein im anfänglichen Zustande elastisch isotropes Körperelement dv beschränken.

Die bedungene elastische Isotropie soll lediglich die Bedeutung haben, dass die mechanische Arbeit der inneren Kräfte bei denselben Coordinatenänderungen von der Lage des als orthogonal vorausgesetzten Coordinatensystems zum Körperelemente unabhängig ist, so zwar, dass, wenn man in dem früher betrachteten elementaren Tetraëder $mm_1m_2m_3$, welches durch die Deformation die Gestalt $MM_1M_2M_3$ erlangt, die senkrechten Kanten mm_1 , mm_2 und mm_3 als gleich voraussetzt, die mechanische Arbeit der inneren Kräfte bei dieser Deformation,

daher auch das Potential $dU = f \cdot dv$ denselben Werth beibehält, wie in dem Falle, in welchem das Tetraëder $m_1 m_2 m_3$ durch die Deformation im Körper jene Lage und Gestalt erhält, die sich durch Drehung des Tetraëders $M_1 M_2 M_3$ etwa um die gegen alle drei Coordinatenachsen gleichgeneigte, von M ausgehende Mittellinie, sei es in einem oder dem anderen Sinne bei einer Amplitude von 120° als Schlusslage ergeben würde, durch welche Drehung die Axen xyz in die Lage yzx , beziehungsweise zxy gelangen und die durch (6) bestimmten Grössen dX, dY, dZ die Werthe dY, dZ, dX , beziehungsweise dZ, dX, dY annehmen würden. Mit anderen Worten, durch die Isotropie ist hier vorausgesetzt, dass die Potentialfunction f ihren Werth nicht ändert, wenn man die Indices der beliebig angenommenen Verschiebungsderivationen (3) cyclisch permutirt. Wenn man demgemäss diese Function f der Variabeln $\lambda_x \mu_y \nu_z \dots$ in eine Reihe von der Form einer ganzen rationalen Function der letzteren entwickelt, so müssen die Coëfficienten $A, B, C \dots$ jener Glieder, die sich in ihrem variablen Theile nur dadurch von einander unterscheiden, dass die Indices xyz der Verschiebungsderivationen (3) cyclisch permutirt sind, einander gleich sein, so dass diese Function f , wofern man von Gliedern höherer Ordnung als der dritten absieht, folgende Form annehmen muss:

$$f = A_0 + [A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3] + \\ + [B_1 \beta_1 + B_2 \beta_2 + B_3 \beta_3 + C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2 + C_3 \gamma_3 + D_1 \delta_1 + D_2 \delta_2 + D_3 \delta_3 + E_1 \varepsilon_1 + E_2 \varepsilon_2 + E_3 \varepsilon_3] + \\ + [A'_1 \alpha'_1 + A'_2 \alpha'_2 + A'_3 \alpha'_3 + B'_1 \beta'_1 + B'_2 \beta'_2 + B'_3 \beta'_3 + C'_1 \gamma'_1 + C'_2 \gamma'_2 + C'_3 \gamma'_3 + D'_1 \delta'_1 + D'_2 \delta'_2 + D'_3 \delta'_3 + E'_1 \varepsilon'_1 + E'_2 \varepsilon'_2 + E'_3 \varepsilon'_3 + \\ + A_{12} \alpha_{12} + A_{21} \alpha_{21} + A_{23} \alpha_{23} + A_{32} \alpha_{32} + A_{31} \alpha_{31} + A_{13} \alpha_{13} + B_{12} \beta_{12} + B_{21} \beta_{21} + B_{23} \beta_{23} + B_{32} \beta_{32} + B_{31} \beta_{31} + B_{13} \beta_{13} + \\ + C_{12} \gamma_{12} + C_{21} \gamma_{21} + C_{23} \gamma_{23} + C_{32} \gamma_{32} + C_{31} \gamma_{31} + D_{12} \delta_{12} + D_{21} \delta_{21} + D_{23} \delta_{23} + D_{32} \delta_{32} + D_{31} \delta_{31} + D_{13} \delta_{13}] \quad (21)$$

wo die Coëfficienten A, B, C, D, \dots von den Verschiebungsderivationen und von der Wahl der Axenrichtungen xyz unabhängig sind und die 54 variablen Factoren $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ folgende Werthe haben:

(22)

$$\alpha_1 = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z, \quad \alpha_2 = \mu_x + \mu_y + \mu_z, \quad \alpha_3 = v_x + v_y + v_z$$

$$\beta_1 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2, \quad \beta_2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2, \quad \beta_3 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\gamma_1 = \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y, \quad \gamma_2 = \mu_y \mu_z + \mu_z \mu_x + \mu_x \mu_y, \quad \gamma_3 = v_y v_z + v_z v_x + v_x v_y$$

$$\delta_1 = \mu_x v_x + \mu_y v_y + \mu_z v_z, \quad \delta_2 = v_x \lambda_x + v_y \lambda_y + v_z \lambda_z, \quad \delta_3 = \lambda_x \mu_x + \lambda_y \mu_y + \lambda_z \mu_z$$

$$\varepsilon_1 = \mu_x (v_y + v_z) + \mu_y (v_z + v_x) + \mu_z (v_x + v_y), \quad \varepsilon_2 = v_x (\lambda_y + \lambda_z) + v_y (\lambda_z + \lambda_x) + v_z (\lambda_x + \lambda_y),$$

$$\varepsilon_3 = \lambda_x (\mu_y + \mu_z) + \lambda_y (\mu_z + \mu_x) + \lambda_z (\mu_x + \mu_y)$$

$$\alpha'_1 = \lambda_x^3 + \lambda_y^3 + \lambda_z^3, \quad \alpha'_2 = \mu_x^3 + \mu_y^3 + \mu_z^3, \quad \alpha'_3 = v_x^3 + v_y^3 + v_z^3$$

$$\beta'_1 = \lambda_x^2 (\lambda_y + \lambda_z) + \lambda_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + \lambda_z^2 (\lambda_x + \lambda_y), \quad \beta'_2 = \mu_x^2 (\mu_y + \mu_z) + \mu_y^2 (\mu_z + \mu_x) + \mu_z^2 (\mu_x + \mu_y),$$

$$\beta'_3 = v_x^2 (v_y + v_z) + v_y^2 (v_z + v_x) + v_z^2 (v_x + v_y)$$

$$\gamma'_1 = \lambda_x \lambda_y \lambda_z, \quad \gamma'_2 = \mu_x \mu_y \mu_z, \quad \gamma'_3 = v_x v_y v_z$$

$$\gamma' = \lambda_x \mu_x v_x + \lambda_y \mu_y v_y + \lambda_z \mu_z v_z$$

$$\varepsilon = \mu_x v_x (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_y v_y (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_z v_z (\lambda_x + \lambda_y), \quad \varepsilon' = \lambda_x \mu_x v_x + \lambda_y \mu_y v_y + \lambda_z \mu_z v_z + \lambda_x \lambda_z (\mu_x + \mu_y),$$

$$\varepsilon'_1 = \lambda_x \mu_x (v_y + v_z) + \lambda_y \mu_y (v_z + v_x) + \lambda_z \mu_z (v_x + v_y)$$

$$\alpha_{12} = \lambda_x^2 \mu_x + \lambda_y^2 \mu_y + \lambda_z^2 \mu_z, \quad \alpha_{23} = \mu_x^2 v_x + \mu_y^2 v_y + \mu_z^2 v_z, \quad \alpha_{31} = v_x^2 \lambda_x + v_y^2 \lambda_y + v_z^2 \lambda_z$$

$$\alpha_{21} = \mu_x^2 \lambda_x + \mu_y^2 \lambda_y + \mu_z^2 \lambda_z, \quad \alpha_{32} = v_x^2 \mu_x + v_y^2 \mu_y + v_z^2 \mu_z, \quad \alpha_{13} = \lambda_x^2 v_x + \lambda_y^2 v_y + \lambda_z^2 v_z$$

$$\beta_{12} = \lambda_x^2 (\mu_y + \mu_z) + \lambda_y^2 (\mu_z + \mu_x) + \lambda_z^2 (\mu_x + \mu_y), \quad \beta_{23} = \mu_x^2 (v_y + v_z) + \mu_y^2 (v_z + v_x) + \mu_z^2 (v_x + v_y),$$

$$\beta_{31} = v_x^2 (\lambda_y + \lambda_z) + v_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + v_z^2 (\lambda_x + \lambda_y)$$

$$\beta_{21} = \mu_x^2 (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_z^2 (\lambda_x + \lambda_y), \quad \beta_{32} = v_x^2 (\mu_y + \mu_z) + v_y^2 (\mu_z + \mu_x) + v_z^2 (\mu_x + \mu_y),$$

$$\beta_{13} = \lambda_x^2 (v_y + v_z) + \lambda_y^2 (v_z + v_x) + \lambda_z^2 (v_x + v_y)$$

$$\gamma_{12} = \lambda_y \lambda_z \mu_x + \lambda_z \lambda_x \mu_y + \lambda_x \lambda_y \mu_z, \quad \gamma_{23} = \mu_y \mu_z v_x + \mu_z \mu_x v_y + \mu_x \mu_y v_z, \quad \gamma_{31} = v_y v_z \lambda_x + v_z v_x \lambda_y + v_x v_y \lambda_z$$

$$\gamma_{21} = \mu_y \mu_z \lambda_x + \mu_z \mu_x \lambda_y + \mu_x \mu_y \lambda_z, \quad \gamma_{32} = v_y v_z \mu_x + v_z v_x \mu_y + v_x v_y \mu_z, \quad \gamma_{13} = \lambda_y \lambda_z v_x + \lambda_z \lambda_x v_y + \lambda_x \lambda_y v_z$$

$$\delta_{12} = \lambda_y \lambda_z (\mu_y + \mu_z) + \lambda_z \lambda_x (\mu_z + \mu_x) + \lambda_x \lambda_y (\mu_x + \mu_y), \quad \delta_{23} = \mu_y \mu_z (v_y + v_z) + \mu_z \mu_x (v_z + v_x) + \mu_x \mu_y (v_x + v_y),$$

$$\delta_{31} = v_y v_z (\lambda_y + \lambda_z) + v_z v_x (\lambda_z + \lambda_x) + v_x v_y (\lambda_x + \lambda_y)$$

$$\delta_{21} = \mu_y \mu_z (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_z \mu_x (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_x \mu_y (\lambda_x + \lambda_y), \quad \delta_{32} = v_y v_z (\mu_y + \mu_z) + v_z v_x (\mu_z + \mu_x) + v_x v_y (\mu_x + \mu_y),$$

$$\delta_{13} = \lambda_y \lambda_z (v_y + v_z) + \lambda_z \lambda_x (v_z + v_x) + \lambda_x \lambda_y (v_x + v_y)$$

Nun bestehen bekanntlich, da die Spannungen den ursprünglichen Annahmen zufolge stetige Functionen der Coordinaten sind, zwischen den Schubspannungen die von der Constitution des Körpers, von der Art der Bewegung und von der Form der Potentialfunction f vollkommen unabhängigen, allgemein giltigen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} Y_z - Z_y &= 0 \\ Z_x - X_z &= 0 \\ X_y - Y_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit der Determinante D und substituirt hierauf die Werthe aus (20), nachdem man die in (20) vorkommenden partiellen Derivationen der Function f mit Hilfe der Gleichungen (21) und (22) bestimmt hat, so ergeben sich nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten zwischen den letzteren folgende Beziehungen:

Zunächst verschwinden die Coëfficienten:

$$A_2 = A_3 = C_2 = C_3 = D_2 = D_3 = E_1 = E_2 = E_3 = 0. \quad (24)$$

Ferner bestehen folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} B_3 &= B_2, \quad A_{32} = A_{23} \\ A'_3 &= A'_2 = \frac{1}{3} A_{32} = \frac{1}{3} A_{23} \\ B'_3 &= B'_2 = \frac{1}{2} D_{23} = \frac{1}{2} D_{32} = B_{32} = B_{23} \\ A_{13} &= A_{12}, \quad B_{13} = B_{12}, \quad C_{13} = C_{12}, \quad D_{13} = D_{12} \\ D_1 &= 2B_2 - A_1, \quad C_{32} = C_{23}, \quad A_{31} = A_{21}, \quad B_{31} = B_{21} \\ C'_3 &= C'_2 = C_{32} - D_1 = C_{23} - (2B_2 - A_1) \\ B_1 &= B_2 + \frac{1}{2} (C_1 + D_1) = 2B_2 + \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2} A_1 \\ E &= E' = C_{31} = C_{21} \\ E'_3 &= E'_2 = D_{31} = D_{21} \\ C' &= 2A_{21} - C_1 \\ E'_1 &= 2(B_{21} - B_1 + B_2) = 2B_{21} - C_1 - 2B_2 + A_1 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Aus dem Umstande, dass die erstgenannten Coëfficienten A_2 und A_3 verschwinden, muss, wie aus (20), (21) und (22)

sofort zu ersehen ist, gefolgert werden, dass, wenn die durch (3) bestimmten Deformationselemente sämmtlich den Werth Null haben, auch alle Schubspannungen den Werth Null annehmen und dass überdies $X_x = Y_y = Z_z = A_1$ ist, d. h. die im anfänglichen (primitiven) Zustande vorausgesetzte Isotropie bedingt die Abwesenheit jeglicher Schubspannung und die Gleichheit der normalen Spannungen nach allen Richtungen des Raumes im Elemente dv vor der betrachteten Deformation.

Drückt man mittelst der Gleichungen (24) und (25) alle Coëfficienten in (21) durch die 18 Coëfficienten $A_0, A_1, C_1, B_2, A'_1, B'_1, C'_1, A_{12}, B_{12}, C_{12}, D_{12}, A_{21}, B_{21}, C_{21}, D_{21}, A_{23}, B_{23}, C_{23}$ aus, substituirt man hierauf diese Werthe in (21) und berechnet schliesslich mit Hilfe der Gleichungen (20) die Componenten der Spannungen, so gelangt man bei Berücksichtigung der Werthe (22), wenn kürzshalber durch $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die Summen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \mu_x + \nu_x = \frac{\partial \zeta}{\partial y'} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \\ \varepsilon_y &= \mu_y + \nu_y = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \mu_z + \nu_z = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y'} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

bezeichnet werden, zu folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} D \cdot X_x &= A_1 + 4B_2 \cdot \lambda_x + C_1(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \\ &\quad + 2B_2 \cdot (\mu_y^2 + \nu_z^2) - C_1(\mu_x \nu_x + \mu_y \nu_y + \mu_z \nu_z) \\ &\quad + (4B_2 + C_1 - A_1 + 3A'_1) \cdot \lambda_x^2 + B'_1(\lambda_y^2 + \lambda_z^2) \\ &\quad + C'_1 \cdot \lambda_y \lambda_z + (C_1 + 2B'_1) \cdot \lambda_x(\lambda_y + \lambda_z) \\ &\quad + 2A_{12} \cdot \lambda_x \varepsilon_x + 2B_{12} \cdot \lambda_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z) + C_{12} \cdot (\lambda_y \varepsilon_z + \lambda_z \varepsilon_y) \\ &\quad + D_{12} \cdot [\lambda_y \varepsilon_y + \lambda_z \varepsilon_z + (\lambda_y + \lambda_z) \varepsilon_x] \\ &\quad + A_{21} \cdot \varepsilon_x^2 + B_{21} \cdot (\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + C_{21} \cdot \varepsilon_y \varepsilon_z + D_{21} \cdot \varepsilon_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ D \cdot Y_z &= 2B_2 \cdot \varepsilon_x + 2B_2 \cdot (\mu_x \lambda_y + \nu_x \lambda_z + \nu_y \mu_z) \\ &\quad + A_{12} \cdot \lambda_x^2 + B_{12} \cdot (\lambda_y^2 + \lambda_z^2) + C_{12} \cdot \lambda_y \lambda_z + D_{12} \cdot \lambda_x(\lambda_y + \lambda_z) \\ &\quad + 2A_{21} \cdot \lambda_x \varepsilon_x + 2B_{21} \cdot (\lambda_y + \lambda_z) \varepsilon_x + C_{21}(\lambda_y \varepsilon_z + \lambda_z \varepsilon_y) \\ &\quad + D_{21} \cdot [\lambda_y \varepsilon_y + \lambda_z \varepsilon_z + \lambda_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\ &\quad + A_{23} \cdot \varepsilon_x^2 + B_{23}[\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] + C_{23} \cdot \varepsilon_y \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Die anderen Spannungscomponenten ergeben sich durch cyclische Permutation von xyz und von XYZ .

Wie aus diesen Gleichungen zu ersehen ist, sind die Longitudinalspannungen $X_x Y_y Z_z$ von dem Werthe der Coëfficienten A_{23} , B_{23} und C_{23} , dagegen die Schubspannungen $Y_z Z_x X_y$ von den Coëfficienten $A_1 C_1 A'_1 B'_1 C'_1$ vollkommen unabhängig.

Nun lässt sich bekanntlich in allen Fällen die durch die Gleichungen (6) bestimmte räumliche Änderung (Deformation) des betrachteten Körperelementes dv , wenn man von der translatorischen Verschiebung (ξ, η, ζ) absieht, als zusammengesetzt ansehen aus einer reinen (rotationslosen) Deformation, bei welcher drei zu einander senkrechte Axen — die Deformationshauptaxen — ihre Lage im Raume nicht ändern, und aus einer Rotation dieses Körperelementes um den Punkt M .

Sind nun $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$, $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die Richtungscosinus der Deformationshauptaxen abc vor dieser Rotation, dagegen $(\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z)$, $(\beta'_x \beta'_y \beta'_z)$, $(\gamma'_x \gamma'_y \gamma'_z)$ die schliesslichen Richtungscosinus derselben Axen nach erfolgter Rotation, durch welche sie die Lagen $a'b'c'$ erlangen, sind ferner durch $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ die linearen Dilatationen (Elongationen) in der Richtung dieser drei Axen, d. i. die Hauptdilatationen (Hauptelongationen) bezeichnet, so dass die Halbaxen jenes Ellipsoids — des Deformationsellipsoids —, in welches eine Kugel vom Radius dl infolge der Deformation des Elementes dv übergeht, die Längen

$$\left. \begin{aligned} a &= \mu_1 \cdot dl = (1 + \lambda_1) \cdot dl \\ b &= \mu_2 \cdot dl = (1 + \lambda_2) \cdot dl \\ c &= \mu_3 \cdot dl = (1 + \lambda_3) \cdot dl \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

erhalten, so bestehen bekanntlich stets folgende, aus (6) leicht deducirbare Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \lambda_x &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_x \alpha'_x + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_x \beta'_x + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_x \gamma'_x \\ \nu_z &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_z \alpha'_x + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_z \beta'_x + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_z \gamma'_x \\ \mu_y &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_z \alpha'_y + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_z \beta'_y + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_z \gamma'_y \\ \mu_z &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_x \alpha'_y + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_x \beta'_y + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_x \gamma'_y \\ 1 + \lambda_y &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_y \alpha'_y + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_y \beta'_y + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_y \gamma'_y \\ \nu_x &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_z \alpha'_y + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_z \beta'_y + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_z \gamma'_y \\ \nu_y &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_x \alpha'_z + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_x \beta'_z + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_x \gamma'_z \\ \mu_x &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_y \alpha'_z + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_y \beta'_z + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_y \gamma'_z \\ 1 + \lambda_z &= (1 + \lambda_1) \cdot \alpha_z \alpha'_z + (1 + \lambda_2) \cdot \beta_z \beta'_z + (1 + \lambda_3) \cdot \gamma_z \gamma'_z \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Wenn durch $\varphi\chi\psi$ die auf die ursprünglichen Lagen abc der Deformationshauptaxen bezogenen Richtungscosinus jener Rotationsaxe A bezeichnet sind, um welche das Körperelement dv rotiren muss, damit abc in die Lage $a'b'c'$ nach der Drehung um den Winkel ϑ gelangt, und wenn $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(\alpha''\beta''\gamma'')$ die auf dieselben Axen abc bezogenen Richtungscosinus der Axen $a'b'c'$ bedeuten, so ist ¹

$$\begin{aligned}\alpha &= \varphi^2 (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta \\ \beta &= \varphi\chi(1 - \cos \vartheta) + \psi \sin \vartheta \\ \gamma &= \varphi\psi(1 - \cos \vartheta) - \chi \sin \vartheta \\ \alpha' &= \chi\varphi(1 - \cos \vartheta) - \psi \sin \vartheta \\ \beta' &= \chi^2 (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta \\ \gamma' &= \chi\psi(1 - \cos \vartheta) + \varphi \sin \vartheta \\ \alpha'' &= \psi\varphi(1 - \cos \vartheta) + \chi \sin \vartheta \\ \beta'' &= \psi\chi(1 - \cos \vartheta) - \varphi \sin \vartheta \\ \gamma'' &= \psi^2 (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta\end{aligned}$$

Sind sonach $\varphi_x\varphi_y\varphi_z$ die auf die ursprünglichen Coordinatenaxen xyz bezogenen Richtungscosinus der Rotationsaxe A , so ist

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_x\alpha_x + \varphi_y\alpha_y + \varphi_z\alpha_z = \varphi_x\alpha'_x + \varphi_y\alpha'_y + \varphi_z\alpha'_z \\ \chi &= \varphi_x\beta_x + \varphi_y\beta_y + \varphi_z\beta_z = \varphi_x\beta'_x + \varphi_y\beta'_y + \varphi_z\beta'_z \\ \psi &= \varphi_x\gamma_x + \varphi_y\gamma_y + \varphi_z\gamma_z = \varphi_x\gamma'_x + \varphi_y\gamma'_y + \varphi_z\gamma'_z\end{aligned}$$

und

$$\left. \begin{aligned}\alpha_x &= \alpha'_x + \alpha'\beta'_x + \alpha''\gamma'_x = (\varphi_x\alpha'_x + \varphi_y\alpha'_y + \varphi_z\alpha'_z) \cdot \varphi_x \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \alpha'_x \cdot \cos \vartheta + (\varphi_z\alpha'_y - \varphi_y\alpha'_z) \cdot \sin \vartheta \\ \alpha_y &= \alpha'_y + \alpha'\beta'_y + \alpha''\gamma'_y = (\varphi_x\alpha'_x + \varphi_y\alpha'_y + \varphi_z\alpha'_z) \cdot \varphi_y \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \alpha'_y \cdot \cos \vartheta + (\varphi_x\alpha'_z - \varphi_z\alpha'_x) \cdot \sin \vartheta \\ \alpha_z &= \alpha'_z + \alpha'\beta'_z + \alpha''\gamma'_z = (\varphi_x\alpha'_x + \varphi_y\alpha'_y + \varphi_z\alpha'_z) \cdot \varphi_z \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \alpha'_z \cdot \cos \vartheta + (\varphi_y\alpha'_x - \varphi_x\alpha'_y) \cdot \sin \vartheta \\ \beta_x &= \beta'_x + \beta'\beta'_x + \beta''\gamma'_x = (\varphi_x\beta'_x + \varphi_y\beta'_y + \varphi_z\beta'_z) \cdot \varphi_x \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \beta'_x \cdot \cos \vartheta + (\varphi_z\beta'_y - \varphi_y\beta'_z) \cdot \sin \vartheta \\ \beta_y &= \beta'_y + \beta'\beta'_y + \beta''\gamma'_y = (\varphi_x\beta'_x + \varphi_y\beta'_y + \varphi_z\beta'_z) \cdot \varphi_y \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \beta'_y \cdot \cos \vartheta + (\varphi_x\beta'_z - \varphi_z\beta'_x) \cdot \sin \vartheta \\ \beta_z &= \beta'_z + \beta'\beta'_z + \beta''\gamma'_z = (\varphi_x\beta'_x + \varphi_y\beta'_y + \varphi_z\beta'_z) \cdot \varphi_z \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\ &\quad + \beta'_z \cdot \cos \vartheta + (\varphi_y\beta'_x - \varphi_x\beta'_y) \cdot \sin \vartheta\end{aligned} \right\} (30)$$

¹ Siehe Jacobi, »Euleri formulae de transformatione coordinatum (Crelle's Journal, II. Bd., II. Heft. S. 188).

$$\begin{aligned}
 \gamma_x &= \gamma \alpha'_x + \gamma' \beta'_x + \gamma'' \gamma'_x = (\varphi_x \gamma'_x + \varphi_y \gamma'_y + \varphi_z \gamma'_z) \cdot \varphi_x \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
 &\quad + \gamma'_x \cdot \cos \vartheta + (\varphi_x \gamma'_y - \varphi_y \gamma'_x) \cdot \sin \vartheta \\
 \gamma_y &= \gamma \alpha'_y + \gamma' \beta'_y + \gamma'' \gamma'_y = (\varphi_x \gamma'_x + \varphi_y \gamma'_y + \varphi_z \gamma'_z) \cdot \varphi_y \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
 &\quad + \gamma'_y \cdot \cos \vartheta + (\varphi_x \gamma'_z - \varphi_z \gamma'_x) \cdot \sin \vartheta \\
 \gamma_z &= \gamma \alpha'_z + \gamma' \beta'_z + \gamma'' \gamma'_z = (\varphi_x \gamma'_x + \varphi_y \gamma'_y + \varphi_z \gamma'_z) \cdot \varphi_z \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
 &\quad + \gamma'_z \cdot \cos \vartheta + (\varphi_y \gamma'_x - \varphi_x \gamma'_y) \cdot \sin \vartheta
 \end{aligned} \quad (30)$$

Durch Substitution dieser Werthe in (29) ergeben sich, wenn kürzshalber durch $\alpha_x \alpha_y \alpha_z \tau_x \tau_y \tau_z$ die mit den Dilatationen gleichartigen Grössen

$$\begin{aligned}
 \alpha_x &= \lambda_1 \alpha'^2_x + \lambda_2 \beta'^2_x + \lambda_3 \gamma'^2_x \\
 \alpha_y &= \lambda_1 \alpha'^2_y + \lambda_2 \beta'^2_y + \lambda_3 \gamma'^2_y \\
 \alpha_z &= \lambda_1 \alpha'^2_z + \lambda_2 \beta'^2_z + \lambda_3 \gamma'^2_z \\
 \tau_x &= \lambda_1 \alpha'_y \alpha'_z + \lambda_2 \beta'_y \beta'_z + \lambda_3 \gamma'_y \gamma'_z \\
 \tau_y &= \lambda_1 \alpha'_z \alpha'_x + \lambda_2 \beta'_z \beta'_x + \lambda_3 \gamma'_z \gamma'_x \\
 \tau_z &= \lambda_1 \alpha'_x \alpha'_y + \lambda_2 \beta'_x \beta'_y + \lambda_3 \gamma'_x \gamma'_y
 \end{aligned} \quad (31)$$

bezeichnet werden, folgende Gleichungen für die Derivationen der Verschiebungen $\xi \eta \zeta$

$$\begin{aligned}
 \lambda_x &= \alpha_x + \sin \vartheta \cdot [\tau_z \varphi_z - \tau_y \varphi_y] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot [1 - \varphi_x^2 + \alpha_x - \varphi_x (\alpha_x \varphi_x + \tau_z \varphi_y + \tau_y \varphi_z)] \\
 \nu_z &= \tau_z - \sin \vartheta [\varphi_z + \alpha_x \varphi_z - \tau_y \varphi_x] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_x \varphi_y + \tau_z - \varphi_y (\alpha_x \varphi_x + \tau_z \varphi_y + \tau_y \varphi_z)] \\
 \mu_y &= \tau_y + \sin \vartheta (\varphi_y + \alpha_x \varphi_y - \tau_z \varphi_x) \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_x \varphi_z + \tau_y - \varphi_z (\alpha_x \varphi_x + \tau_z \varphi_y + \tau_y \varphi_z)] \\
 \mu_z &= \tau_z + \sin \vartheta [\varphi_z + \alpha_y \varphi_z - \tau_x \varphi_y] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_y \varphi_x + \tau_z - \varphi_x (\tau_z \varphi_x + \alpha_y \varphi_y + \tau_x \varphi_z)] \\
 \lambda_y &= \alpha_y + \sin \vartheta [\tau_x \varphi_x - \tau_z \varphi_z] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [1 - \varphi_y^2 + \alpha_y - \varphi_y (\tau_z \varphi_x + \alpha_y \varphi_y + \tau_x \varphi_z)] \\
 \nu_x &= \tau_x - \sin \vartheta [\varphi_x + \alpha_y \varphi_x - \tau_z \varphi_y] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_y \varphi_z + \tau_x - \varphi_z (\tau_z \varphi_x + \alpha_y \varphi_y + \tau_x \varphi_z)]
 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \nu_y &= \tau_y - \sin \vartheta [\varphi_y + \tau_z \varphi_x - \tau_x \varphi_z] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_z \varphi_x + \tau_y - \varphi_x (\tau_y \varphi_x + \tau_x \varphi_y + \tau_z \varphi_z)] \\
 \mu_x &= \tau_x + \sin \vartheta [\varphi_x + \tau_z \varphi_y - \tau_y \varphi_z] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_z \varphi_y + \tau_x - \varphi_y (\tau_y \varphi_x + \tau_x \varphi_y + \tau_z \varphi_z)] \\
 \lambda_z &= \tau_z + \sin \vartheta [\tau_y \varphi_y - \tau_x \varphi_x] \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [1 - \varphi_z^2 + \tau_z - \varphi_z (\tau_y \varphi_x + \tau_x \varphi_y + \tau_z \varphi_z)]
 \end{aligned} \right\} (32)$$

Für die Verschiebungsderivationen in den schliesslichen Richtungen $a'b'c'$ der Deformationshauptaxen ist in den Gleichungen (31) und (32) zu setzen $\alpha'_x = \beta'_y = \gamma'_z = 1$ und $\alpha_y = \alpha'_z = \beta'_x = \beta'_z = \gamma'_x = \gamma'_y = 0$, und es ist sonach für dieselben $\tau_x = \lambda_1$, $\tau_y = \lambda_2$, $\tau_z = \lambda_3$, $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ und

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_x &= \lambda_1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_1) (1 - \varphi_x^2) \\
 \nu_z &= -\sin \vartheta (1 + \lambda_1) \varphi_z + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_1) \varphi_x \varphi_y \\
 \mu_y &= \sin \vartheta (1 + \lambda_1) \varphi_y + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_1) \varphi_x \varphi_z \\
 \mu_z &= \sin \vartheta (1 + \lambda_2) \varphi_z + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_2) \varphi_y \varphi_x \\
 \lambda_y &= \lambda_2 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_2) (1 - \varphi_y^2) \\
 \nu_x &= -\sin \vartheta (1 + \lambda_2) \varphi_x + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_2) \varphi_y \varphi_z \\
 \nu_y &= -\sin \vartheta (1 + \lambda_3) \varphi_y + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_3) \varphi_z \varphi_x \\
 \mu_x &= \sin \vartheta (1 + \lambda_3) \varphi_x + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_3) \varphi_z \varphi_y \\
 \lambda_z &= \lambda_3 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_3) (1 - \varphi_z^2)
 \end{aligned} \right\} (33)$$

Setzt man in diesen Gleichungen, da bei der Berechnung der Componenten der Spannungen Potenzen von $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ und ϑ , welche höher sind, als die zweite, zu vernachlässigen sind,

$\sin \vartheta = \vartheta$ und $\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2}$ und substituirt die Werthe aus (33) und (26) in (27), so findet man folgende bis auf Glieder zweiter Ordnung genaue Relationen für die zu den Axen $a'b'c'$ parallelen Componenten $(S_1 T_3 T_2), (T_3 S_2 T_1), (T_2 T_1 S_3)$ der Spannungen in den zu den Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ in ihrer schliesslichen Lage senkrechten Flächenelementen, wenn kürzehlalber

$$D'_1 = 4B_2 + C_1 - A_1 + 3A'_1 \quad (34)$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} D \cdot S_1 &= A_1 + 4B_2 \lambda_1 + C_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D'_1 \lambda_1^2 + \\ &\quad + B'_1 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + C'_1 \lambda_2 \lambda_3 + (C_1 + 2B'_1) \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_3) \\ D \cdot T_1 &= A_{12} \lambda_1^2 + B_{12} (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + C_{12} \lambda_2 \lambda_3 + D_{12} \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_3) \\ D \cdot S_2 &= A_1 + 4B_2 \lambda_2 + C_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D'_1 \lambda_2^2 + \\ &\quad + B'_1 (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + C'_1 \lambda_3 \lambda_1 + (C_1 + 2B'_1) \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_1) \\ D \cdot T_2 &= A_{12} \lambda_2^2 + B_{12} (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + C_{12} \lambda_3 \lambda_1 + D_{12} \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_1) \\ D \cdot S_3 &= A_1 + 4B_2 \lambda_3 + C_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D'_1 \lambda_3^2 + \\ &\quad + B'_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + C'_1 \lambda_1 \lambda_2 + (C_1 + 2B'_1) \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2) \\ D \cdot T_3 &= A_{12} \lambda_3^2 + B_{12} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + C_{12} \lambda_1 \lambda_2 + D_{12} \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Da nun die Determinante D , wie dies die Substitution von (29) in (8) sofort lehrt, auch in der Form

$$\begin{aligned} D &= (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_x \beta_x \gamma_x \\ \alpha_y \beta_y \gamma_y \\ \alpha_z \beta_z \gamma_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha'_x \beta'_x \gamma'_x \\ \alpha'_y \beta'_y \gamma'_y \\ \alpha'_z \beta'_z \gamma'_z \end{vmatrix} = \\ &= (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \quad (36) \end{aligned}$$

ausdrückbar ist, so ist aus (35) zu entnehmen, dass die Spannungen $S_1 S_2 S_3 T_1 T_2 T_3$ bei einem gegebenen ursprünglich elastisch isotropen Körper von dem Rotationswinkel ϑ und den Richtungscosinus $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$ der Rotationsaxe nicht abhängen, sondern lediglich Functionen der drei Hauptdilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ sind.

Da sich aus diesen sechs Spannungen und aus den auf die Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ bezogenen Richtungscosinus $\alpha'_x \beta'_x \gamma'_x$ der beliebig gewählten Richtung x in bekannter Weise die Spannungscomponenten $X_x Y_x Z_x$ berechnen lassen, so besteht

diese Unabhängigkeit von $\vartheta, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ auch für die letzteren Kräfte. Übrigens zeigt dies auch die Substitution von (32) in (27), welche, wenn man abermals Glieder von höherer Ordnung als der zweiten vernachlässigt, bei Beachtung von (34) und (26) zu folgendem Werthe von $D \cdot X_x$ führt:

$$\begin{aligned}
 D \cdot X_x = & A_1 + 4B_2 \cdot \tau_x + C_1(\tau_x + \tau_y + \tau_z) \\
 & + 2B_2 \cdot (\tau_y^2 + \tau_z^2) - C_1(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \\
 & + D'_1 \cdot \tau_x^3 + B'_1 \cdot (\tau_y^3 + \tau_z^3) + C'_1 \cdot \tau_y \tau_z + \\
 & \quad + (C_1 + 2B'_1) \cdot \tau_x(\tau_y + \tau_z) \\
 & + 4A_{12} \cdot \tau_x \tau_y + 4B_{12} \cdot \tau_x(\tau_y + \tau_z) + 2C_{12}(\tau_y \tau_z + \tau_z \tau_y) + \\
 & \quad + 2D_{12}[\tau_y \tau_y + \tau_z \tau_z + (\tau_y + \tau_z) \tau_x] \\
 & + 4A_{21} \cdot \tau_x^2 + 4B_{21} \cdot (\tau_y^2 + \tau_z^2) + 4C_{21} \cdot \tau_y \tau_z + \\
 & \quad + 4D_{21} \cdot \tau_x(\tau_y + \tau_z)
 \end{aligned} \quad (37)$$

worin für $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \tau_x \tau_y, \tau_x \tau_z$ die Werthe aus (31) einzusetzen sind.

Andererseits ist bekanntlich die normale Spannung für die Richtung x , da $\alpha'_x \beta'_x \gamma'_x$ die Richtungs-cosinus derselben in Bezug auf die Axen $a' b' c'$ sind, aus der allgemein giltigen Gleichung bestimmbar:

$$X_x = S_1 \alpha_x'^2 + S_2 \beta_x'^2 + S_3 \gamma_x'^2 + 2T_1 \beta'_x \gamma'_x + 2T_2 \gamma'_x \alpha'_x + 2T_3 \alpha'_x \beta'_x.$$

Sonach ist den Gleichungen (35) zufolge auch

$$\begin{aligned}
 D \cdot X_x = & A_1 + 4B_2(\lambda_1 \alpha_x'^2 + \lambda_2 \beta_x'^2 + \lambda_3 \gamma_x'^2) + C_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\
 & + D'_1(\lambda_1^3 \alpha_x'^2 + \lambda_2^3 \beta_x'^2 + \lambda_3^3 \gamma_x'^2) + \\
 & \quad + B'_1[(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \alpha_x'^2 + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) \beta_x'^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \gamma_x'^2] \\
 & + C'_1(\lambda_2 \lambda_3 \alpha_x'^2 + \lambda_3 \lambda_1 \beta_x'^2 + \lambda_1 \lambda_2 \gamma_x'^2) + \\
 & \quad + (C_1 + 2B'_1)[\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) \alpha_x'^2 + \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1) \beta_x'^2 + \\
 & \quad \quad + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) \gamma_x'^2] \\
 & + 2A_{12}(\lambda_1^2 \beta'_x \gamma'_x + \lambda_2^2 \gamma'_x \alpha'_x + \lambda_3^2 \alpha'_x \beta'_x) + \\
 & \quad + 2B_{12}[(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \beta'_x \gamma'_x + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) \gamma'_x \alpha'_x + \\
 & \quad \quad + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \alpha'_x \beta'_x] \\
 & + 2C_{12}(\lambda_2 \lambda_3 \beta'_x \gamma'_x + \lambda_3 \lambda_1 \gamma'_x \alpha'_x + \lambda_1 \lambda_2 \alpha'_x \beta'_x) + \\
 & \quad + 2D_{12}[\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) \beta'_x \gamma'_x + \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1) \gamma'_x \alpha'_x + \\
 & \quad \quad + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) \alpha'_x \beta'_x]
 \end{aligned} \quad (38)$$

Da die Gleichheit der Ausdrücke (37) und (38) für jede Lage der Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ und für alle Werthe der Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ besteht, so muss sicher auch der Coëfficient von λ_1^2 in (37) jenem in (38) gleich sein, also ihre Differenz verschwinden, so dass sich nach Einsetzung der Werthe (31) in (37) und entsprechender Reduction folgende für alle möglichen Werthe der Richtungscosinus $\alpha'_x\alpha'_y\alpha'_z\beta'_x\ldots$ gültige Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & [2B_2 - D'_1 + B'_1 + 4B_{21}] \alpha'^2_x (\alpha'^2_y + \alpha'^2_z) \\ & + [-C_1 - 2B'_1 + C'_1 + 4A_{21}] \cdot \alpha'^2_y \alpha'^2_z + 2A_{12} \cdot (2\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z - \beta'_x \gamma'_x) \Big| \\ & + 2B_{12} \cdot \alpha'_x [2\alpha'^2_x (\alpha'_y + \alpha'_z) - \beta'_x - \gamma'_x] + 2C_{12} \cdot \alpha'_x (\alpha'^3_y + \alpha'^3_z) \quad (39) \\ & + 2D_{12} \cdot \alpha'_y \alpha'_z [\alpha'^2_y + \alpha'^2_z + \alpha'_x (\alpha'_y + \alpha'_z)] + 4C_{21} \cdot \alpha'^2_x \alpha'_y \alpha'_z + \\ & \qquad \qquad \qquad + 4D_{21} \cdot \alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z (\alpha'_y + \alpha'_z) = 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle möglichen Richtungen der drei zu einander senkrechten Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ erfüllt werden muss und da die Coëfficienten dieser Gleichung von diesen Axenrichtungen unabhängig sind, so müssen alle diese Coëfficienten verschwinden, wie dies etwa aus folgender Schlussfolgerung hervorgeht: Nimmt man etwa a' parallel zur z -Axe und b' , beziehungsweise c' parallel zu jener Lage an, in welche die Axe x , beziehungsweise y durch eine Drehung in ihrer Ebene um den beliebigen Winkel φ gelangt, so ist $\alpha'_z = 1$, $\alpha'_x = \alpha'_y = \beta'_z = \gamma'_z = 0$, $\beta'_x = \gamma'_y = \cos \varphi$, $\beta'_y = -\gamma'_x = \sin \varphi$ zu setzen, wodurch die Gleichung (39) sich auf $A_{12} \cdot \sin 2\varphi = 0$ reducirt, so dass $A_{12} = 0$ ist. Setzt man diesen Werth in (39) ein und nimmt nunmehr etwa $\alpha'_x = 0$, also $\alpha'^2_y + \alpha'^2_z = 1$ an, so erhält man eine bezüglich $\alpha'_y\alpha'_z$ quadratische Gleichung, deren Coëfficienten verschwinden müssen, da $\alpha'_y\alpha'_z$ jeden zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ gelegenen Werth annehmen kann, und es ist sonach $D_{12} = 0$ und ebenso der Coëfficient von $\alpha'^2_y \alpha'^2_z$ in (39). Dividirt man die derart reducirte Gleichung (39) durch α'_x und setzt wie früher $\alpha'_z = 1$, $\beta'_x = \cos \varphi$ u. s. w., so wird $2B_{12} \cdot (\sin \varphi - \cos \varphi) + 2C_{12} = 0$, also, da φ beliebig ist, $B_{12} = C_{12} = 0$. Nimmt man nun abermals $\alpha'_x = 0$ an, so findet man $D_{21} = 0$ und wenn man die übrig bleibende Gleichung durch α'_x dividirt

und hierauf $\alpha'_x = 0$, $\alpha'_y = \cos \varphi$, $\alpha'_z = \sin \varphi$ setzt, so ersieht man, dass auch die übrig gebliebenen Coëfficienten verschwinden müssen. Zu genau denselben Folgerungen würde man durch Gleichsetzung etwa der Coëfficienten von $\lambda_2 \lambda_3$ in (37) und (38) gelangen.

Da sonach alle Coëfficienten der Gleichung (39) sich auf Null reduciren müssen, so ist nach Einführung des Werthes von D'_1 aus (34)

$$\left. \begin{aligned} B'_1 &= -A_1 + C_1 + 2B_2 + 3A'_1 - 4B_{21} \\ C'_1 &= C_1 + 2B'_1 - 4A_{21} = -2A_1 + 3C_1 + 4B_2 + \\ &\quad + 6A'_1 - 8B_{21} - 4A_{21} \\ A_{12} &= B_{12} = C_{12} = D_{12} = C_{21} = D_{21} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Aus dem Verschwinden der letztgenannten Coëfficienten muss zunächst zufolge (35) gefolgert werden, dass $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ ist, d. h. dass keine Schubspannungen in den zu den Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ senkrechten Flächenelementen vorhanden sind, oder mit anderen Worten, dass die Dilatationshauptaxen in ihrer schliesslichen Lage zugleich auch die Hauptdruckaxen (Reactionshauptaxen) und $S_1 S_2 S_3$ die Hauptdruckspannungen sind. Es besteht demnach für die Schubspannung Y_z , indem $(\alpha'_y \beta'_y \gamma'_y)$ die auf die Hauptdruckaxen $a'b'c'$ bezogenen Richtungscosinus der Axe y und $(\alpha'_z \beta'_z \gamma'_z)$ jene der Axe z sind, die bekannte allgemein giltige Beziehung

$$Y_z = S_1 \cdot \alpha'_y \alpha'_z + S_2 \cdot \beta'_y \beta'_z + S_3 \cdot \gamma'_y \gamma'_z. \quad (41)$$

Setzt man nun in den in (27) ausgedrückten Werth von Y_z die Werthe aus (26), (32) und (40) ein, so findet man bei Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} D \cdot Y_z &= 4B_2 \cdot \tau_x + 2B_2 \cdot [\tau_y \tau_z + (\tau_y + \tau_z) \tau_x] \\ &\quad + 4A_{21} \cdot \tau_x \tau_x + 4B_{21} \cdot (\tau_y + \tau_z) \tau_x \\ &\quad + 4A_{22} \cdot \tau_x^2 + 4B_{23} \cdot [\tau_y^2 + \tau_z^2 + 2\tau_x (\tau_y + \tau_z)] + 4C_{23} \cdot \tau_y \tau_z \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Anderseits ergibt die Substitution der Werthe (40) und des aus (40) und (34) resultirenden Werthes $D'_1 = 2B_2 + B'_1 + 4B_{21}$ in die Gleichungen (35)

$$\begin{aligned}
 D.S_1 &= A_1 + 4B_2 \cdot \lambda_1 + C_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\
 &\quad + (2B_2 + 4B_{21}) \cdot \lambda_1^2 + B'_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4A_{21} \cdot \lambda_2 \lambda_3 + \\
 &\quad + (C_1 + 2B'_1)(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \\
 D.S_2 &= A_1 + 4B_2 \cdot \lambda_2 + C_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\
 &\quad + (2B_2 + 4B_{21}) \cdot \lambda_2^2 + B'_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4A_{21} \cdot \lambda_3 \lambda_1 + \\
 &\quad + (C_1 + 2B'_1)(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \\
 D.S_3 &= A_1 + 4B_2 \cdot \lambda_3 + C_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\
 &\quad + (2B_2 + 4B_{21}) \cdot \lambda_3^2 + B'_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4A_{21} \cdot \lambda_1 \lambda_2 + \\
 &\quad + (C_1 + 2B'_1)(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2)
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} D.S_1 \\ D.S_2 \\ D.S_3 \end{aligned}} \right\} (43)$$

Aus den Gleichungen (31) lassen sich nun leicht folgende Beziehungen ableiten:

$$\begin{aligned}
 \tau_z \tau_y + \tau_y \tau_x + \tau_x \tau_z &= \lambda_1^2 \cdot \alpha'_y \alpha'_z + \lambda_2^2 \cdot \beta'_y \beta'_z + \lambda_3^2 \cdot \gamma'_y \gamma'_z \\
 \tau_y \tau_z - \tau_x \tau_x &= \lambda_2 \lambda_3 \cdot \alpha'_y \alpha'_z + \lambda_3 \lambda_1 \cdot \beta'_y \beta'_z + \lambda_1 \lambda_2 \cdot \gamma'_y \gamma'_z \\
 \sigma_x^2 + \tau_z^2 + \tau_y^2 &= \lambda_1^2 \cdot \alpha'^2_x + \lambda_2^2 \cdot \beta'^2_x + \lambda_3^2 \cdot \gamma'^2_x \\
 \tau_y \tau_z - \tau_x^2 &= \lambda_2 \lambda_3 \cdot \alpha'^2_x + \lambda_3 \lambda_1 \cdot \beta'^2_x + \lambda_1 \lambda_2 \cdot \gamma'^2_x \\
 \tau_x \tau_y \tau_z + 2\tau_x \tau_y \tau_z - (\tau_x \tau_x^2 + \sigma_y \tau_y^2 + \tau_z \tau_z^2) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3
 \end{aligned} \quad (44)$$

Setzt man nunmehr die Werthe aus (43) in die Gleichung (41) ein und beachtet ausser (33) auch die zwei ersten Gleichungen in (44), so ergibt sich für $D.Y_z$ ausser dem Werthe (42) auch folgender zweiter Werth:

$$\begin{aligned}
 D.Y_z &= 4B_2 \cdot \tau_x + (2B_2 + 4B_{21}) \cdot [\tau_y \tau_z + (\tau_y + \tau_z) \tau_x] \\
 &\quad + 4A_{21}(\tau_x \tau_x - \tau_y \tau_z)
 \end{aligned} \quad (45)$$

Da demgemäss die rechten Glieder dieser Gleichung und der Gleichung (42) für jeden beliebigen Werth der sechs Grössen $\tau_x \tau_y \tau_z \tau_x \tau_y \tau_z$, durch welche den Gleichungen (31) zufolge die Hauptdilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ und die Lagen der Hauptdruckachsen eindeutig bestimmt sind, einander gleich sein müssen, so folgt aus (42) und (45) nothwendigerweise

$$\begin{aligned}
 C_{23} &= B_{21} - A_{21} \\
 A_{23} &= B_{23} = 0
 \end{aligned} \quad (46)$$

Substituirt man die gefundenen Werthe (46), (40), (25) und (24) in (21), so wird

$$\begin{aligned}
 f = & A_0 + A_1 \alpha_1 + A_1 \left(-\frac{1}{2} \beta_1 - \delta_1 \right) + 2B_2 \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 + \beta_3}{2} + \delta_1 \right) \\
 & + \frac{1}{2} C_1 (\beta_1 + 2\gamma_1) + A'_1 (\alpha'_1 + 3\beta'_1 + 6\gamma'_1) \\
 & + (A_1 - 2B_2) (-\beta'_1 - 2\gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \varepsilon'_1) + C_1 (\beta'_1 + 3\gamma'_1 - \gamma' - \varepsilon'_1) \\
 & + A_{21} (\alpha_{21} + \alpha_{31} + 2\gamma'_1 - \gamma'_2 - \gamma'_3 - \gamma'_{23} - \gamma'_{32} - 4\gamma'_1) \\
 & + B_{21} (\beta_{21} + \beta_{31} + 2\varepsilon'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_{23} + \gamma'_{32} - 4\beta'_1 - 8\gamma'_1).
 \end{aligned}$$

Setzt man hierin die Werthe aus (22) und (26) ein und beachtet, dass $\beta_1 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 - 2\gamma_1$ ist, so findet man für die gesuchte Potentialfunction f folgenden Werth:

$$\begin{aligned}
 f = & A_0 + A_1 (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) + \frac{C_1 - A_1}{2} \cdot (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 \\
 & + A_1 (\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) \\
 & + 2B_2 [\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2)] \\
 & + A'_1 (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^3 + (A_1 - 2B_2) \cdot [-(\lambda_y + \lambda_z) (\lambda_z + \lambda_x) (\lambda_x + \lambda_y) + \mu_x \mu_y \mu_z + \nu_x \nu_y \nu_z + \mu_x \nu_x (\lambda_y + \lambda_z) + \\
 & + C_1 (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) (\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) \\
 & + A_{21} (\lambda_x \varepsilon_x^2 + \lambda_y \varepsilon_y^2 + \lambda_z \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - 4\lambda_x \lambda_y \lambda_z) \\
 & + B_{21} [(\lambda_y + \lambda_z) \varepsilon_x^2 + (\lambda_z + \lambda_x) \varepsilon_y^2 + (\lambda_x + \lambda_y) \varepsilon_z^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - 4(\lambda_y + \lambda_z) (\lambda_z + \lambda_x) (\lambda_x + \lambda_y)] \quad (47)
 \end{aligned}$$

In die Augen springend ist der Zusammenhang der Glieder dieses Ausdruckes mit den vier Determinanten

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \begin{vmatrix} \lambda_x, \mu_z, \nu_y \\ \nu_z, \lambda_y, \mu_x \\ \mu_y, \nu_x, \lambda_z \end{vmatrix}, & \beta &= \begin{vmatrix} \lambda_x, & \frac{\mu_z + \nu_z}{2}, & \frac{\mu_y + \nu_y}{2} \\ \frac{\mu_z + \nu_z}{2}, & \lambda_y, & \frac{\mu_x + \nu_x}{2} \\ \frac{\mu_y + \nu_y}{2}, & \frac{\mu_x + \nu_x}{2}, & \lambda_z \end{vmatrix}, \\ \gamma &= \begin{vmatrix} -(\lambda_y + \lambda_z), & \mu_z, & \nu_y \\ \nu_z, & -(\lambda_z + \lambda_x), & \mu_x \\ \mu_y, & \nu_x, & -(\lambda_x + \lambda_y) \end{vmatrix}, & \delta &= \begin{vmatrix} -(\lambda_y + \lambda_z), & \frac{\mu_z + \nu_z}{2}, & \frac{\mu_y + \nu_y}{2} \\ \frac{\mu_z + \nu_z}{2}, & -(\lambda_z + \lambda_x), & \frac{\mu_x + \nu_x}{2} \\ \frac{\mu_y + \nu_y}{2}, & \frac{\mu_x + \nu_x}{2}, & -(\lambda_x + \lambda_y) \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

J. Finger,

Bezeichnet man nämlich durch α' , beziehungsweise β' die Summe der zu $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$ adjungirten Unterdeterminanten der Determinante α , beziehungsweise β , durch β'' die Summe der Quadrate sämtlicher Glieder der Determinante β und durch λ die Summe aus $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$, also

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z \\ \alpha' &= (\lambda_y \lambda_z - \mu_x \nu_x) + (\lambda_z \lambda_x - \mu_y \nu_y) + (\lambda_x \lambda_y - \mu_z \nu_z) \\ \beta' &= \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \frac{1}{4} [(\mu_x + \nu_x)^2 + (\mu_y + \nu_y)^2 + (\mu_z + \nu_z)^2] \\ \beta'' &= \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{2} [(\mu_x + \nu_x)^2 + (\mu_y + \nu_y)^2 + (\mu_z + \nu_z)^2] = \lambda^2 - 2\beta' \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

so ist den Gleichungen (47) und (26) gemäss

$$\left. \begin{aligned} f = A_0 + A_1 \lambda + \frac{C_1 - A_1}{2} \lambda^2 + A_1 \alpha' + 2 B_2 \beta'' \\ + A_1' \lambda^3 + (A_1 - 2 B_2) \gamma + C_1 \lambda \alpha' - 4 A_{21} \beta + 4 B_{21} \delta \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

wo auch $\gamma = -\lambda \alpha' + \alpha$ und $\delta = -\lambda \beta' + \beta$ gesetzt werden kann.

Der Ausdruck (47), beziehungsweise (50) für die Potentialfunction f ist bis auf Glieder dritter Ordnung genau.

Die Werthe der Spannungscomponenten ergeben sich entweder aus (47) mit Zuhilfenahme der Gleichungen (20) oder durch Einsetzung der Werthe aus (46) und (40) in die Gleichungen (27). Man erhält so nach entsprechender Reduction und nach Einführung der Werthe (26) und bei Beachtung des Werthes von B_1' in (40) folgende Gleichungen, die bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig sind:

$$\left. \begin{aligned} D.X_x &= A_1 + 4 B_2 \lambda_x + C_1 (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \\ &+ B_1' (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 + 2 B_2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2) \\ &+ C_1 (\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) \\ &- 4 A_{21} \left[\lambda_y \lambda_z - \left(\frac{\mu_x + \nu_x}{2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + 4 B_{21} \left[\lambda_x^2 + \left(\frac{\mu_z + \nu_z}{2} \right)^2 + \left(\frac{\mu_y + \nu_y}{2} \right)^2 \right] \\ D.Y_z &= 2 B_2 (\mu_x + \nu_x) + 2 B_2 [\mu_z \nu_y + \lambda_y \mu_x + \nu_x \lambda_z] \\ &- 4 A_{21} \left[\frac{\mu_y + \nu_y}{2} \cdot \frac{\mu_z + \nu_z}{2} - \lambda_x \cdot \frac{\mu_x + \nu_x}{2} \right] \\ &+ 4 B_{21} \left[\frac{\mu_z + \nu_z}{2} \cdot \frac{\mu_y + \nu_y}{2} + \lambda_y \cdot \frac{\mu_x + \nu_x}{2} + \frac{\mu_x + \nu_x}{2} \lambda_z \right] \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Der innige Zusammenhang der Factoren von $2 B_2$ und C_1 mit den entsprechenden Gliedern der Determinante α in (48) und der Factoren von $4 A_{21}$ und $4 B_{21}$ mit den entsprechenden Gliedern der Determinante β ist derart ersichtlich, dass er einer näheren Auseinandersetzung nicht bedarf.

Da nach (8) die cubische Dilatation

$$\left. \begin{aligned} D-1 &= \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z + \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z \\ &+ \lambda_x \lambda_y \lambda_z + \mu_x \mu_y \mu_z + \nu_x \nu_y \nu_z \\ &- \lambda_x \mu_x \nu_x - \lambda_y \mu_y \nu_y - \lambda_z \mu_z \nu_z = \lambda + \alpha' + \alpha \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

so ist, wenn man Glieder dritter Ordnung vernachlässigt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{D} &= 1 - (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) + (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 - \\ &\quad - (\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) = 1 - \lambda + \lambda^2 - \alpha' \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

sonach zufolge (51) und (40) bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\left. \begin{aligned} X_x &= A_1 + 4B_2 \lambda_x + (C_1 - A_1)(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \\ &\quad + (3A'_1 - 4B_{21})(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 + 2B_2[(\lambda_y + \lambda_z)^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2] \\ &\quad + (C_1 - A_1)(\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) \\ &\quad - 4A_{21} \left[\lambda_y \lambda_z - \left(\frac{\mu_x + \nu_x}{2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + 4B_{21} \left[\lambda_x^2 + \left(\frac{\mu_z + \nu_z}{2} \right)^2 + \left(\frac{\mu_y + \nu_y}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_z &= 2B_2(\mu_x + \nu_x) + 2B_2[\mu_z \nu_y - (\lambda_z + \lambda_x)\mu_x - \nu_x(\lambda_x + \lambda_y)] \\ &\quad - 4A_{21} \left[\frac{\mu_y + \nu_y}{2} \cdot \frac{\mu_z + \nu_z}{2} - \lambda_x \cdot \frac{\mu_x + \nu_x}{2} \right] \\ &\quad + 4B_{21} \left[\frac{\mu_z + \nu_z}{2} \cdot \frac{\mu_y + \nu_y}{2} + \lambda_y \cdot \frac{\mu_x + \nu_x}{2} + \frac{\mu_x + \nu_x}{2} \cdot \lambda_z \right] \end{aligned} \right\}$$

Die Factoren von $2B_2$ entsprechen in diesen beiden für unsere Zwecke wichtigsten Schlussgleichungen nicht mehr wie in (51) den Gliedern der Determinante α , sondern den analogen Gliedern der Determinante γ in (48). Der Factor von $C_1 - A_1$ in (54), nämlich $\lambda + \alpha'$, ist zufolge (52) der cubischen Dilatation ($D-1$) gleich, während in derselben Gleichung der Factor von $3A'_1 - 4B_{21}$, nämlich $(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2$, dem Quadrate dieser cubischen Dilatation gleichgesetzt werden kann.

Durch cyclische Permutation von XYZ , beziehungsweise xyz ergeben sich aus (54) die Werthe aller übrigen Spannungscomponenten.

Wie aus den gefundenen Hauptgleichungen (47) und (54) zu ersehen ist, hat man, wenn bei der Berechnung des Potentials der inneren Kräfte Glieder dritter, sonach bei der Bestimmung der Spannungen (54) Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden sollen, ausser der Integrationsconstanten A_0 der Potentialfunction und der ursprünglichen, von der herrschenden Temperatur abhängigen Spannung A_1 fünf Elasticitätsconstanten

— die jedoch keineswegs nothwendigerweise von einander unabhängig sein müssen und deren eventuelle Beziehungen zu einander festzustellen eine (im folgenden zweiten Theile zu behandelnde) Aufgabe der Moleculartheorie und experimenteller Untersuchungen ist — in Betrachtung zu ziehen, und zwar sind dies, wenn die zu Grunde gelegten Gleichungen die Form (47) und (54) haben sollen, die Constanten B_2, C_1, A'_1, A_{21} und B_{21} , sonach ausser den bisher in der Elasticitätstheorie stets zur Betrachtung kommenden Constanten B_2 und C_1 noch die drei Constanten A'_1, A_{21} und B_{21} . Würde man etwa in ähnlicher Weise, wie dies in dieser Untersuchung geschehen ist, auch Glieder der nächst höheren Ordnung in die Rechnung einführen, so müsste man vier weitere Elasticitätsconstanten in die Rechnung einbeziehen. Begnügt man sich, wie dies allgemein geschieht, bei der Berechnung des Potentials der inneren Kräfte mit Gliedern zweiter Ordnung, so dass die Spannungen als lineare Functionen der Verschiebungsderivationen angesehen werden dürfen und setzt überdies in den Gleichungen (47) und (54) $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ und etwa $2B_2 = -K$ und $C_1 = -2K\Theta$, wo dann K den sogenannten Modulus der Starrheit (Schubspannungsmodul) und $E = 2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta}$ den sogenannten Elasticitätsmodulus, beziehungsweise $W = \frac{2}{3} K(1+3\Theta)$ den sogenannten Compressionswiderstand bedeutet, so nehmen die Gleichungen (47) und (54) die bekannte gebräuchliche Form (nach Kirchhoff) an:

$$f = -K[\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \Theta(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2]$$

$$X_x = -2K[\lambda_x + \Theta(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)]$$

$$Y_z = -K(\mu_x + \nu_x)$$

Setzt man in (47) die Werthe (32) und (31) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} f = & A_0 + A_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{C_1 - A_1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ & + A_1(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + 2B_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \\ & + A'_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 - (A_1 - 2B_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2) \\ & + C_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) - 4A_{21}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ & - 4B_{21}(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

und für die Hauptspannungen ergeben sich aus (35) oder (54) die Werthe

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= A_1 + 4B_2\lambda_1 + (C_1 - A_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ &\quad + (3A'_1 - 4B_{21})(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + 2B_2(\lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ &\quad + (C_1 - A_1)(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) - 4A_{21}\lambda_2\lambda_3 + 4B_{21}\lambda_1^2 \\ S_2 &= A_1 + 4B_2\lambda_2 + (C_1 - A_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\ &\quad + (3A'_1 - 4B_{21})(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ &\quad + 2B_2(\lambda_3 + \lambda_1)^2 + (C_1 - A_1)(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) - \\ &\quad - 4A_{21}\lambda_3\lambda_1 + 4B_{21}\lambda_2^2 \\ S_3 &= A_1 + 4B_2\lambda_3 + (C_1 - A_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\ &\quad + (3A'_1 - 4B_{21})(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ &\quad + 2B_2(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (C_1 - A_1)(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) - \\ &\quad - 4A_{21}\lambda_1\lambda_2 + 4B_{21}\lambda_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Die Gleichungen (47) und (54) lassen sich in mannigfacher Weise umformen. Nicht ohne Interesse ist folgende in einfacher Weise deducirbare Form dieser Gleichungen: Bezeichnet man durch ν die cubische Dilatation $\nu = D - 1 = \lambda + \alpha' + \alpha$, durch τ die um 3 verminderte Summe der Quadrate sämmtlicher Glieder der ursprünglichen Determinante (8), so dass

$$\tau = (1 + \lambda_x)^2 + (1 + \lambda_y)^2 + (1 + \lambda_z)^2 + \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 + \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2 - 3$$

von derselben Dimension ist wie die Dilatationen, so ist, wenn $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z C_{23} \beta \beta''$ und λ die in (26), (46), (48) und (49) angeführten Werthe bedeuten und wenn kürzshalber

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= A_0 + (A_1 - 2B_2)\nu + \left(\frac{C_1 - A_1}{2} + B_2\right)\nu^2 + (A'_1 - 2B_{21})\nu^3 \\ f_2 &= 4(B_{21} - A_{21})\beta + 2B_{21}\lambda\beta'' = 4C_{23}\beta + 2B_{21}\nu\beta'' \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

gesetzt wird,

$$\left. \begin{aligned} f &= f_1 + f_2 + B_2\tau \\ X_x &= \frac{\partial f_1}{\partial \nu} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_x} + 2B_2 \frac{(1 + \lambda_x)^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2}{D} \\ Y_z &= \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_x} + 2B_2 \frac{\mu_z \nu_y + (1 + \lambda_y)\mu_x + \nu_x(1 + \lambda_z)}{D} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

wodurch ein verhältnissmässig einfacher Zusammenhang mit der ursprünglichen Determinante D und der Determinante β ausgedrückt ist.

Die geometrische Bedeutung der Zähler der beiden letzten Brüche in den Ausdrücken (58) für X_x und Y_z lässt sich aus folgender Betrachtung entnehmen:

Jene Punkte m' , die anfangs in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt m , deren Radius dl und deren Gleichung $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dl^2$ ist, liegen zur Zeit t bekanntlich, wie sofort aus (6) zu entnehmen ist, wenn man aus diesen Gleichungen dx , dy , dz bestimmt und diese Werthe in die Gleichung der Kugelfläche einsetzt, in jenem Ellipsoid — dem Deformationsellipsoid (Dilatationsellipsoid, Verschiebungsellipsoid) —, dessen Halbachsen $(1 + \lambda_1)dl$, $(1 + \lambda_2)dl$, $(1 + \lambda_3)dl$ die Richtungen $a'b'c'$ der Dilatationshauptachsen haben, und dessen Gleichung, wenn man wieder, wie früher, durch $l_x m_z n_y \dots$ die Subdeterminanten der Determinante (8) bezeichnet, lautet:

$$(l_x \cdot dX + m_z \cdot dY + n_y \cdot dZ)^2 + (n_z \cdot dX + l_y \cdot dY + m_x \cdot dZ)^2 + (m_y \cdot dX + n_x \cdot dY + l_z \cdot dZ)^2 = D^2 \cdot dl^2.$$

Die Kanten MM_1 , MM_2 , MM_3 des früher betrachteten Tetraëders (7) sind conjugirte Radien dieses Ellipsoids, wofern die zu einander senkrechten, dem ursprünglichen Tetraëder dV angehörigen Kanten $mm_1 = mm_2 = mm_3 = dl$ gewählt werden.

Jenes dem Deformationsellipsoid adjungirte Ellipsoid, dessen Halbachsen mit den Halbachsen des ersteren gleichgerichtet und diesen invers proportional sind, also etwa die Längen

$\frac{dl}{1 + \lambda_1}$, $\frac{dl}{1 + \lambda_2}$, $\frac{dl}{1 + \lambda_3}$ haben, hat die Gleichung¹

$$[(1 + \lambda_x) \cdot x + \mu_z \cdot y + \nu_z \cdot z]^2 + [\nu_z x + (1 + \lambda_y) y + \mu_x z]^2 + [\mu_y x + \nu_x y + (1 + \lambda_z) z]^2 = dl^2.$$

Die zu den Seitenflächen $f_1 = \overline{M_2 M M_3}$, $f_2 = \overline{M_3 M M_1}$ und $f_3 = \overline{M_1 M M_2}$ des Tetraëders dV senkrechten Radien dieses

¹ Siehe Finger, »Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser, in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung, nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik«. Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, Abth. II. a, S. 1108 und 1112.

Ellipsoids sind conjugirte Radien desselben und deren Längen sind den mit diesen gleichgerichteten Höhen des Tetraëders dV invers, also den Dreiecksflächen $f_1 f_2 f_3$ direct proportional.¹

Bringt man die letzte Gleichung auf die Form $a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2 + 2b_x yz + 2b_y zx + 2b_z xy = dl^2$, so ersieht man sofort, dass $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ die gesuchten Zähler in den durch (58) ausgedrückten Werthen von $X_x Y_y Z_z Y_z Z_x X_y$ sind.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, dass sich nicht nur der erste und letzte Summand von f in der Gleichung (58), sondern auch der mittlere Summand f_2 als Function von v und σ ausdrücken lässt, wofern nur noch ausser der cubischen Dilatation $v = D - 1$ und der Summe $(\sigma + 3)$ der Quadrate sämtlicher Glieder der Determinante D auch die Summe der Quadrate sämtlicher Subdeterminanten $l_x m_z n_y \dots$ von D in die Rechnung einbezogen wird. Ist nämlich s die um 3 verminderte letztere Summe, also $s = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 + m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 3$, so ist, wie aus (48) und (49) leicht zu deduciren ist,

$$\beta = \frac{1}{4} v + \frac{1}{8} (\sigma - s + v^2)$$

$$\lambda \beta'' = (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \beta'' = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2}{4} - v^2 + v^3 \right],$$

so dass, wenn man diese Werthe in (57) und (58) einsetzt, sich auch die Potentialfunction f als Function der drei Variablen v , σ und s darstellen lässt.

Um Missdeutungen zu verhüten, sei schliesslich bemerkt, dass zwar, wenn man von Gliedern höheren Grades als des ersten absieht, die sogenannten Deformationsgrössen durch $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \varepsilon_x = \mu_x + v_x, \varepsilon_y = \mu_y + v_y, \varepsilon_z = \mu_z + v_z$ bestimmt sind, und zwar bekanntlich durch $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$ die linearen Dilatationen parallel zu den Coordinatenaxen und durch $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ die Grössen der Schiebungen in den zu den drei Coordinatenebenen parallelen Ebenen, dass dies jedoch bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung nicht der Fall ist. Es lässt sich nämlich leicht einsehen, dass bei Vernachlässigung von Gliedern

¹ L. c.

höherer Ordnung als der zweiten die linearen Dilatationen $\Lambda_x \Lambda_y \Lambda_z$ parallel zu den Coordinatenaxen den Gleichungen

$$\Lambda_x = \lambda_x + \frac{1}{2} (\mu_z^2 + \nu_y^2)$$

$$\Lambda_y = \lambda_y + \frac{1}{2} (\mu_x^2 + \nu_z^2)$$

$$\Lambda_z = \lambda_z + \frac{1}{2} (\mu_y^2 + \nu_x^2)$$

entsprechen müssen, dass ferner unter derselben Voraussetzung, wenn durch $E_x E_y E_z$ die Änderungen der Kantenwinkel des ursprünglichen Tetraëders dv bezeichnet sind, also der Winkel $(M_2 M M_3) = \frac{\pi}{2} + E_x$, $(M_3 M M_1) = \frac{\pi}{2} + E_y$, $(M_1 M M_2) = \frac{\pi}{2} + E_z$ ist,

$$-E_x = \varepsilon_x + \mu_y \nu_z - \lambda_y \mu_x - \lambda_z \nu_x$$

$$-E_y = \varepsilon_y + \mu_z \nu_x - \lambda_z \mu_y - \lambda_x \nu_y$$

$$-E_z = \varepsilon_z + \mu_x \nu_y - \lambda_x \mu_z - \lambda_y \nu_z$$

während, wenn $H_x H_y H_z$ die Änderungen der Seitenwinkel der Ecke M des Tetraëders bedeuten, so dass, wenn $N_1 N_2 N_3$ die von $M_1 M_2 M_3$ auf die Gegenflächen $M_2 M M_3$, $M_3 M M_1$, $M_1 M M_2$ gefällten Höhen bedeuten, die Winkel $(N_2 N_3) = \frac{\pi}{2} + H_x$, $(N_3 N_1) = \frac{\pi}{2} + H_y$, $(N_1 N_2) = \frac{\pi}{2} + H_z$ sind,

$$H_x = \varepsilon_x - \mu_z \nu_y - \lambda_y \mu_x - \lambda_z \nu_x - \mu_y \mu_z - \nu_y \nu_z$$

$$H_y = \varepsilon_y - \mu_x \nu_z - \lambda_z \mu_y - \lambda_x \nu_y - \mu_z \mu_x - \nu_z \nu_x$$

$$H_z = \varepsilon_z - \mu_y \nu_x - \lambda_x \mu_z - \lambda_y \nu_z - \mu_x \mu_y - \nu_x \nu_y$$

also z. B. $-E_x - H_x = (\mu_y + \nu_y)(\mu_z + \nu_z) = \varepsilon_y \varepsilon_z$ u. s. w. ist.

Nach Abschluss dieser Abhandlung ist mir eine in der Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 8. Juli 1893 vorgelegte Abhandlung von Prof.

W. Voigt,¹ welche zufälligerweise denselben Gegenstand behandelt, in die Hand gekommen. Nichtsdestoweniger habe ich mich bestimmt gefunden, meine Untersuchungen zu publiciren, da Prof. Voigt, der gleichfalls durch die Beobachtungsergebnisse O. Thompson's zu dieser Arbeit veranlasst wurde, durch seine theoretischen Untersuchungen zu Ergebnissen gelangt ist, die von den meinen verschieden sind. Setzt man nämlich, um den Zusammenhang zwischen meiner Bezeichnungsweise und jener Voigt's herzustellen, $f = -F$, ferner $\lambda_x = x_x$, $\lambda_y = y_y$, $\lambda_z = z_z$, $\varepsilon_x = \mu_x + \nu_x = y_z$, $\varepsilon_y = z_x$ und $\varepsilon_z = x_y$,* und bezeichnet kürzshalber durch δ und ϑ die Ausdrücke $\delta = x_x + y_y + z_z$, $\vartheta = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$, so lauten die von Prof. Voigt gefundenen Formeln:

$$\begin{aligned} 2F &= c_1 \delta^2 + c_2 \vartheta + \frac{2c'_1}{3} \delta^3 + c'_2 \cdot \delta \vartheta \\ -X_x &= c_1 \delta + c_2 x_x + c'_1 \delta^2 + c'_2 \cdot \delta \vartheta \\ -Y_z &= \frac{c_2}{2} y_z + \frac{c'_2}{2} y_z \delta, \end{aligned}$$

welche anders lauten als die von mir gefundenen Formeln (47) und (54). Prof. Voigt wendet dann diese bloß zwei neue Elasticitätsconstanten c'_1 und c'_2 enthaltenden Formeln auf verschiedene besondere Fälle, nämlich die Dehnung, Torsion und Biegung eines cylindrischen isotropen Körpers an. Leider kann ich jedoch nicht die Bemerkung unterdrücken, dass nach meiner Überzeugung die zwei Voraussetzungen, von welchen Prof. Voigt bei der Ableitung seiner Formeln ausgeht, nicht stich-

¹ W. Voigt, »Über eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität.« Göttinger Nachrichten Nr. 13 (vom 2. August 1893), S. 534—552.

* Trotzdem ich diese von Kirchhoff gewählte Bezeichnungsweise als sehr zweckentsprechend ansehe und ich daher auch ursprünglich beabsichtigte, die Verschiebungsderivationen $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \mu_x \mu_y \mu_z \nu_x \nu_y \nu_z$ entsprechend ihren Werthen (3) durch $x_x y_y z_z z_y x_x y_x y_z z_x x_y$ zu bezeichnen, so bin ich doch von dieser Absicht abgekommen, um Missverständnissen vorzubeugen, die durch den Umstand leicht hätten herbeigeführt werden können, dass man fast allgemein z. B. durch ν nicht $\frac{\partial \eta}{\partial z}$, sondern die Summe $\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ zu bezeichnen pflegt.

hältig sind. Zunächst sind die nach meinem Dafürhalten viel zu willkürlichen Annahmen nicht begründet, dass die Spannungen bloß Functionen der Grössen $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ sind (in dem besonderen Falle, dass die Deformation eine reine, von keiner Rotation begleitete, also etwa eine Potentialdeformation, sonach

$$\mu_x = \nu_x = \frac{1}{2} \varepsilon_x, \mu_y = \nu_y = \frac{1}{2} \varepsilon_y \text{ und } \mu_z = \nu_z = \frac{1}{2} \varepsilon_z \text{ ist, ist diese}$$

Annahme wohl streng richtig) ebensowenig wie die Annahme, dass die Potentialfunction f bloß eine Function von δ und ϑ ist.

Dass diese Annahmen nothwendige »Folgerungen der Grundannahme seien, derzufolge die elastischen Drucke an einer Stelle nur von dem Zustande in der unmittelbaren Umgebung des Punktes abhängen« ist nicht einzusehen, da ja die Deformation in dem unmittelbar angrenzenden Körperelement, wofern auch Glieder zweiter Ordnung in Rechnung gezogen werden, nicht nur, wie früher gezeigt wurde, von $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$, sondern auch von $\mu_x \nu_x \mu_y \dots$ abhängig sind. Die Potentialfunction F , die Prof. Voigt als eine Function der zwei Grössen δ und ϑ annimmt, lässt sich in dem betrachteten Falle nach meiner Überzeugung nicht als eine Function von zwei Variabeln, wohl aber, wie ich gezeigt habe, als Function von drei Variabeln darstellen. Und ebenso ist die weitere Voraussetzung, dass auch bei Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung »die Formeln bestehen bleiben, welche die Druckcomponenten mit

dem elastischen Potential F verbinden, nämlich $X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}$, $X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}$ u. s. w.«, nicht gerechtfertigt, wie dies die streng-

giltigen Gleichungen (20) lehren. So dürfte auch der »Widerspruch« zu erklären sein, »in welchem«, wie Prof. Voigt selbst gesteht, »scheinbar die von O. Thompson bei Längsdehnung gefundenen Resultate mit den von mir (Prof. Voigt) bei Biegung und Torsion erhaltenen stehen«. Dass die Berücksichtigung der in der bisherigen Elasticitätstheorie nicht berücksichtigten Glieder höherer Ordnung auch nach der Meinung des Prof. Voigt (der sich durch seine Arbeiten um die Ausgestaltung der Theorie der Elasticität, besonders jener der krystallinischen Substanzen, unbestrittene Verdienste erworben hat) in manchen

Fällen von Wichtigkeit ist, ist aus folgender Bemerkung des Prof. Voigt in der citirten Abhandlung zu entnehmen: »Die von mir (Voigt) gefundenen Resultate zeigen, dass der Einfluss, den die nicht genaue Giltigkeit des gewöhnlichen elastischen Potentials auf die verschiedenen beobachteten Deformationen hat, eine ganz verschiedene Grössenordnung besitzt, z. B. bei Längsdehnung in einem Gliede erster, bei Biegung und Drillung in einem Gliede zweiter Ordnung auftritt, im ersten Falle also unter Umständen sehr merklich sein kann, wo er in den letzteren kaum nachweisbar ist«.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

VII. SITZUNG VOM 1. MÄRZ 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I (Jänner 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie, ferner das Register zum 14. Bande (Jahrgang 1893) dieser Monatshefte vor.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. I. Klemenčič: »Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Weiss in Prag übersendet eine Arbeit von Dr. A. Nestler, Assistenten am pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität daselbst, unter dem Titel: »Über Ringfasciation«.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs übersendet eine Abhandlung: »Über von der österreichischen Tiefsee-Expedition S. M. Schiffes „Pola“ in bedeutenden Tiefen gedrehte *Cylindrites*-ähnliche Körper und deren Verwandtschaft mit *Gyrolithes*«.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Assistenten am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Das Skelet der *Lacerta Simonyi* Steind. und der Lacertidenfamilie überhaupt«.

Das w. M. Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Herrn Hans Meyer ausgeführte Untersuchung: »Über einige Derivate

der Picolinsäure und die Überführung derselben in α -Amidopyridin«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn Adolf Stengel über die Krystallformen einiger neuen organischen Verbindungen, und zwar von Picolinsäureamid; Jodäthylpicolinsäureäthylester; Äthylpyridinchloridchloroplatinat; Amidopyridinchloroplatinat; Mesoweinsäurenitril; Bromlacton, Dibromid, Amid und Baryumsalz der Oxypropilidenbuttersäure.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Statistischer Bericht über die volkswirtschaftlichen Zustände des Erzherzogthums Österreich unter der Enns im Jahre 1890, erstattet an das k. k. Handelsministerium von der Handels- und Gewerbekammer in Wien. I. Bd. Gewerbestatistik. Wien, 1893.

Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

In neuerer Zeit ist von verschiedenen Beobachtern festgestellt worden, dass elektrische Schwingungen in Eisendrähten viel stärker gedämpft werden, als in anderen nicht magnetisierbaren Metallen. Die stärkere Dämpfung erklärt sich aus der circularen oder transversalen Magnetisirung, infolge welcher die elektrischen Schwingungen noch viel mehr wie bei anderen Drähten in die Oberflächenschichten zusammengedrängt werden. Der Widerstand eines magnetisierbaren Leiters ist daher für Oscillationen viel grösser als der eines anderen Drahtes von gleicher Leitungsfähigkeit. Die Wärmeentwicklung in einem Leiter ist proportional dem Widerstand; man kann daher aus der Wärmeentwicklung beim Durchleiten elektrischer Schwingungen einen Schluss auf die Grösse des Widerstandes ziehen und hieraus mit Hilfe der von Lord Rayleigh¹ und Stefan² entwickelten Formeln den Werth der Permeabilität für diesen Fall berechnen. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde die Wärmeentwicklung in den Eisen- und Nickeldrähten so wie bei früheren Messungen durch ein in der Nähe des Versuchsdrahtes aufgestelltes Thermoelement bestimmt und mit der

¹ Phil. Mag. Vol. 21, Jahrg. 1886.

² Diese Sitzungsber., Bd. XCIX, Jahrg. 1890.

Wärmeentwicklung in einem ebenso dicken Messingdrahte verglichen, welcher in dieselbe Leitung eingeschaltet war. Die Versuche ergaben folgende Werthe für die Permeabilität μ : Weiches Eisen 118, Stahl (Klaviersaitendraht) weich 106, hart 115, Bessemerstahl weich 77, hart 74, Nickel 27.

Diese Werthe stimmen ganz gut mit jenen, welche Baur¹ und Lord Rayleigh² für sehr schwache magnetisirende Kräfte gefunden haben. Wie die Versuche der beiden genannten Forscher lehren, ist die Permeabilität bis zu gewissen Werthen der magnetisirenden Kraft eine constante Grösse, während sie dann rasch ansteigt.

Die vorliegenden Beobachtungen zeigen, dass wir uns bei diesen Versuchen in einem Gebiete constanter μ bewegen. Diese Thatsache kann nun so gedeutet werden, dass die hier verwendeten magnetisirenden Kräfte sehr schwach sind und der Grössenordnung nach in den Bereich jener Feldstärken fallen, bei welchen μ wirklich constant ist, oder auch so, dass wir es hier zwar mit viel grösseren magnetisirenden Kräften zu thun haben, dass aber die Magnetisirung dem raschen Wechsel derselben nicht so schnell folgen kann, um hiebei je den Theil der Magnetisirungscurve zu erreichen, welcher den variablen und viel grösseren Werthen von μ entspricht. Man hat ja sogar ursprünglich bezweifelt, ob sehr rasche elektrische Schwingungen überhaupt magnetisirend wirken könnten. Eine bei-läufige Schätzung der hier in Betracht kommenden Feldstärken aus den bei den Schwingungen auftretenden Maximalstromstärken ergibt nun wenigstens für die Oberfläche der Drähte und für den Beginn der Oscillationen Werthe der magnetisirenden Kräfte, welche jene Grenze, innerhalb welcher μ constant ist, mehr als hundertmal überschreiten. Darnach würde hier thatsächlich ein Fall des Zurückbleibens der Magnetisirung³ vorliegen. Hiebei muss freilich vorausgesetzt werden, dass die Resultate der Beobachtungen Baur's und Lord Rayleigh's,

¹ Wied. Ann., 11, 1880.

² Phil. Mag. Vol. 23, 1887.

³ Dieses Zurückbleiben darf mit der Hysteresis nicht verwechselt werden.

welche sich auf die longitudinale Magnetisirung beziehen, auch auf die circulare anwendbar sind.

In den Grenzen, innerhalb welcher μ constant ist, gibt es keinen remanenten Magnetismus; die Magnetisirung in diesem Gebiete ist den Deformationen eines Körpers innerhalb der Elasticitätsgrenze ähnlich, während die weiteren Stadien der Magnetisirung mit dauernden Deformationen zu vergleichen sind, ein Analogon, auf welches schon Maxwell hingewiesen hat.

Der technisch verwendbare Theil der Magnetisirung liegt in dem Gebiete, welches den dauernden Deformationen entspricht; es ist nun sehr wahrscheinlich, und diese Annahme wird auch durch die Erfahrung gestützt, dass die Magnetisirung bei schnellen Feldwechseln dieses Gebiet nicht mehr erreicht, während die Moleküle innerhalb der Grenzen der constanten μ noch viel rascheren Schwingungen folgen können, wie die hier verwendeten. Weitere Versuche, welche vielleicht am besten mit Condensatorentladungen bei directer Beobachtung der Schwingungsdauer und der Dämpfung anzustellen wären, müssen darüber entscheiden.

Die Versuchsanordnung.

Bezüglich der Versuchsanordnung verweise ich auf eine frühere Abhandlung.¹ Der Primär- und Secundärinductor hatten dieselbe Grösse wie bei früheren Messungen und die Wärmeentwicklung wurde ebenfalls mit Hilfe eines in der Nähe des Versuchsdrahtes angebrachten feinen Thermoelements (Eisen-Constanten) gemessen; nur waren die beiden Drähte, in denen die Wärmeentwicklung verglichen werden sollte, nicht in einem Gehäuse befestigt, sondern es war jeder Versuchsdraht separat montirt. Die Länge der untersuchten Drähte betrug in allen Fällen 6cm, ihre Dicke wechselte zwischen 0·45 und 0·18mm, doch hatten die beiden Vergleichsdrähte immer gleiche Dicke. Der Secundärinductor war auf diese Weise aus mehreren Stücken zusammengesetzt; die aneinanderstossenden Stellen waren behufs besseren Contacts gut amalgamirt.

¹ Diese Sitzungsber., Bd. CII, 1893, und Wied. Ann., Bd. 50.

Die Resultate.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

α den Ausschlag des Thomson-Carpentier-Galvanometers, durch welchen die Wärmeentwicklung im Versuchsdraht gemessen wird;

β den Ausschlag des Galvanometers, welches mit dem Standardinductor verbunden war;

$\bar{\alpha}$ den auf $\beta = 100$ reducirten Werth von α ;

ψ die Ablenkung des Thomson-Carpentier-Galvanometers, durch welche die Wärmeentwicklung im Versuchsdrahte beim Durchgange eines constanten Stromes gemessen wird. Die Stärke des Stromes war immer für beide Drähte gleich und ist bei jeder Tabelle angegeben.

C Die in dieser Rubrik angeführten Zahlen geben die Empfindlichkeit des Thomson-Carpentier-Galvanometers an. Bei dem hier verwendeten Instrument ändert sich die Empfindlichkeit im Verlaufe des Tages, vermuthlich infolge von Temperaturschwankungen, ziemlich beträchtlich. Zur Controle konnte in den Galvanometerkreis eine schwache elektromotorische Kraft von $0.052/50000 \times 1.438$ Volt eingeschaltet werden. Die hierauf beobachtete Doppelablenkung ist unter *C* eingetragen. Der Widerstand im Galvanometerkreise betrug 6.8 Ohm.

D bedeutet die Entfernung des Primär- vom Secundärinductor in *cm* und

V das Verhältniss der Wärmeentwicklung in den Vergleichsdrähten durch die elektrischen Schwingungen.

Jeder Werth von α ist das Mittel aus vier Beobachtungen, wovon zwei bei einer und zwei bei entgegengesetzter Richtung des Primärstromes im Inductorium erhalten wurden. Auch hier konnte man die Beobachtung machen, dass die Primärfunken manchmal bei einer Richtung viel activer waren, als bei der entgegengesetzten.

Die Erwärmung mit constantem Strom geschah durch Einschaltung der Versuchsdrähte in einen Stromkreis, in welchem sich ein Accumulator und ein passender Widerstand befand. In manchen Fällen war die Erwärmung des Eisens durch die

elektrischen Schwingungen sehr stark und es musste bei der Beobachtung derselben in den Kreis des Thomson-Carpen-
tier-Galvanometers ein Widerstand eingeschaltet werden,
welcher bei der Beobachtung an dem Vergleichsdraht wieder
entfernt wurde. Die entsprechenden, für Eisen erhaltenen
Zahlen müssen daher mit einem constanten Factor F multipli-
cirt werden; F ist bei jeder Tabelle angegeben; die Werthe
von $\bar{\alpha}$ sind schon mit F multiplicirt.

Zum Vergleiche wurde immer ein Messingdraht ver-
wendet.

Eisen—Messing.

Diese Combination wurde bei zwei verschiedenen Dicken
untersucht. Das Eisen war ausgeglüht.

1.

Eisen- und Messingdraht 0·452 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit $\left\{ \begin{array}{l} \text{Eisen} = 0\cdot0082 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0\cdot0053 \end{array} \right.$

Verhältniss der spec. Wid. = 1·55.

Constanter Strom = 0·135 Amp.; $F = 3\cdot15$ für $D = 20$
und 40.

Tabelle I.

D	C	Eisen				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	78·4	57·2	373	82	1447	40·0	97	77	126	11·5
	70·3	53·6	297	74	1269	35·0	72	85	108	11·9
40			220	86	815		53	86	62	13·2
			245	108	758		53	57	57	13·4
60			386	67	577		23	53	44	13·0
			450	89	508		34	92	36	13·9

Mittel 12·9

Das Verhältniss von $\psi = 1\cdot48$.

2.

Eisen- und Messingdraht 0·175 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit $\left\{ \begin{array}{l} \text{Eisen} = 0\cdot055 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0\cdot036 \end{array} \right.$

Verhältniss der spec. Wid. = 1·51.

Constanter Strom = 0·066 Amp.; $F = 5\cdot2$ für die oberen Werthe von α und 8·1 für die unteren, und zwar diesmal für alle drei Distanzen.

Tabelle II.

D	C	Eisen				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	73·8	239	674	48	7332	160	499	54	914	8·0
	70·7	235	344	39	7250	159	234	29	805	9·0
40			413	57	3791		354	88	400	9·5
			260	51	4148		168	43	387	10·5
60			445	78	2960		194	67	291	10·2
			203	52	3142		165	55	297	10·5

Mittel 9·6

Das Verhältniss von $\psi = 1\cdot49$.

Stahl (Klaviersaitendraht)—Messing.

1.

Der Draht wurde von 0·5 *mm* auf 0·45 *mm* ausgezogen und dann untersucht.

Stahl- und Messingdraht 0·452 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stahl} = 0\cdot0083 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0\cdot0053 \end{array} \right.$

Verhältniss der spec. Widerstände = 1·57.

Constanter Strom = 0·135 Amp.; $F = 3\cdot2$ für $D = 20$ und 40.

Tabelle III.

D	C	Stahl (weich)				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	74·0	59·5	265	68	1253	38·6	60	58	103	12·1
	73 0	55·0	182	52	1107	35·3	45	46	97	11·4
40			125	54	749		31	61	51	14·6
			92	42	694		35	67	53	13·2
60			248	45	546		20	48	41	13·2
			331	62	534		27	63	42	12·6

Mittel 12·8

Das Verhältniss von $\phi = 1·54$.

2.

Der Draht wurde bis zur Rothgluth erhitzt und hierauf in Wasser abgelöscht. Er war hart, doch nicht glashart.

Die Dicke wie vorher.

Widerstand pro Längeneinheit $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stahl} = 0·0098 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0·0053 \end{array} \right.$

Verhältniss der spec. Widerstände = 1·85; $F = 3 \ 2$ für $D = 20$ und 40. Constanter Strom = 0·135 Amp.

Tabelle IV.

D	C	Stahl (hart)				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	76	71	300	66	1480	39	78	71	111	13·4
	72	66	307	67	1486	36	69	68	101	14·7
40			183	71	842		44	79	56	15 0
			161	68	771		35	65	53	14 5
60			454	77	590		31	77	40	14·6
			436	74	593		28	73	38	15·5

Mittel 14·6

Das Verhältniss von $\phi = 1·83$.

Bessemerstahl—Messing.

1.

Weicher Draht in dem Zustande, wie er den Zug verlässt.
Stahl- und Messingdraht 0·396 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stahl} = 0\cdot0152 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0\cdot0064 \text{ „} \end{array} \right.$

Verhältniss der spec. Widerstände = 2·37; $F = 3\cdot15$ für alle D .

Constanter Strom = 0·135 Amp.

Tabelle V.

D	C	Bessemerstahl (weich)				Messing				\bar{r}
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	68·8	146	251	32	2495	54	55	27	168	14·8
	76·5	154	568	66	2709	57	124	63	196	13·8
40			150	34	1399		29	33	87	16·1
			180	36	1588		50	52	97	16·0
60			128	37	1087		23	34	66	16·3
			137	37	1175		27	36	75	15·7

Mittel 15·4

Das Verhältniss von $\psi = 2\cdot70$.

2.

Bessemerstahldraht, glashart.

Dicke wie vorhergehend.

Widerstand pro Längeneinheit $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stahl} = 0\cdot0252 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0\cdot0064 \text{ „} \end{array} \right.$

Verhältniss der spec. Widerstände = 3·94; $F = 3\cdot15$ für $D = 20$ und 40.

Constanter Strom = 0·135 Amp.

Tabelle VI.

D	C	Bessemerstahl (hart)				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	75	208	498	82	1915	54	96	78	122	15·7
	69	189	407	51	2535	52	79	47	167	15·1
40			332	100	1046		62	101	62	16·9
			262	62	1327		38	45	85	15·7
60			600	77	780		46	112	41	18·9
			677	67	1014		32	50	64	15·8

Mittel 16·3

Das Verhältniss von $\psi = 3·75$.**Nickel—Messing.**

Der Nickeldraht wurde von 0·5 *mm* auf 0·452 *mm* ausgezogen und dann untersucht. Der Vergleichsdraht aus Messing hatte ebenfalls diesen Durchmesser.

Widerstand pro Längeneinheit $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nickel} = 0·0109 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0·0052 \end{array} \right.$

Verhältniss der spec. Widerstände = 2·10.

Constanter Strom = 0·135 Amp.

Tabelle VII.

D	C	Nickel				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	74	81	603	50	1201	37	64	43	148	8·1
	73	81	484	42	1160	37	63	43	144	8·1
40			388	59	653		50	62	81	8·1
			284	45	635		43	54	79	8·0
40			149	32	462		28	46	61	7·6
			124	28	442		25	42	60	7·4

Mittel 7·9

Das Verhältniss von $\psi = 2·20$.

Von diesen Beobachtungen sind nicht alle bei gleicher Empfindlichkeit des Standardinductors gemacht worden. Bei einer Gelegenheit wurde dieser durch einen Stoss stark erschüttert und dadurch seine Empfindlichkeit geändert, da die Drähte des Thermoelements nach einem früher angewandten Verfahren nur gekreuzt und nicht verlöthet waren. Tabelle VI zeigt den Einfluss dieses Unfalls, indem die oberen Werthe von $\bar{\alpha}$ durchwegs viel grösser sind, als die unteren, ein Unterschied, der nur durch eine Änderung im Standardinductor erklärt werden kann. Nebst den unteren Zahlen der Tabelle VI gehören hieher auch die Werthe der Tabelle V und VII.

Berechnung von μ .

Lord Rayleigh und Stefan (l. c.) haben für den Widerstand w' eines Drahtes gegen schnelle elektrische Schwingungen folgende Formel berechnet

$$w' = w\pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}}. \quad 1)$$

Darin bedeutet w den Widerstand für constante Ströme, a den Radius, σ den specifischen Widerstand, μ die Permeabilität des Drahtes und n die Zahl der Schwingungen pro Secunde. Über den Werth von μ bei verschiedenen Eisensorten sind bekanntlich schon viele ausführliche Untersuchungen gemacht worden; μ ist keine constante Grösse, sondern eine Function der magnetisirenden Kraft und kann für weiches Eisen Werthe annehmen, die zwischen 100 und 3000 liegen. Nur bei den allerschwächsten Feldstärken ist μ constant, wie das die Untersuchungen von Lord Rayleigh und Baur (l. c.) lehren. Alle bisherigen Messungen von μ beziehen sich auf eine longitudinale Magnetisirung.

Der Verlauf von μ bei circularer oder transversaler Magnetisirung ist mit Ausnahme einer Untersuchung von Herwig über die circulare Magnetisirung von Eisenröhren bisher nicht studirt worden.

Als Grundlage der hier gezogenen Schlüsse wird nun angenommen, dass der Verlauf der Magnetisirung in circularer Richtung nahezu der nämliche ist, wie in der longitudinalen.

Die Wärmeentwicklung in einem von elektrischen Schwingungen durchflossenen Drahte ist proportional dem entsprechenden Widerstande und hängt also bei magnetisirbaren Drähten von μ ab. Wenn wir nun die Resultate unserer Beobachtungen ansehen, so finden wir, dass der Werth von V für dieselbe Drahtsorte bei allen Werthen von D nahezu gleich ist; die Stärke der inducirten Schwingung und hiemit die Grösse der magnetisirenden Kraft nimmt jedoch mit zunehmendem D sicher ab, was ja die auf Messing bezüglichen Zahlenangaben bestätigen.¹ Zwar ist in einigen Tabellen der Werth von V für $D = 20$ etwas kleiner wie die beiden anderen, doch geht dieser Unterschied kaum über die Beobachtungsfehler hinaus.

Aber auch bei demselben D war die Stärke der inducirten Schwingung manchmal sehr verschieden je nach der Activität der Primärfunken, und doch ergab die Beobachtung beinahe immer gleiche Werthe von V .

Allerdings sind bei diesen Versuchen die Grenzen, innerhalb welcher die magnetisirende Kraft schwankt, nicht gross, doch müssten wir auch bei diesen Schwankungen viel grössere Differenzen in den Werthen von V bekommen, wenn sich die Magnetisirung in unserem Falle auf einem Theile der Magnetisirungscurve bewegen würde, welcher steil ansteigt und den rasch veränderlichen Werthen von μ entspricht. Dass wir uns bei unseren Versuchen in einem Gebiete constanter μ bewegen, wird auch durch die absoluten Werthe von μ bekräftigt, welche wir mit Hilfe der Formel 1 aus den vorliegenden Beobachtungen berechnen können. Obige Formel habe ich schon in einer früheren Arbeit nach einer Richtung geprüft und mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung gefunden; aber auch die Versuche von Bjerknes, wovon später die Rede sein wird, sprechen sehr dafür, dass die den Formeln zu Grunde gelegten Annahmen vollkommen zutreffend sind.

¹ Es sei bemerkt, dass die Werthe von $\bar{\alpha}$ für Messing dem Werthe von D nahezu verkehrt proportional sind, doch drückt sich in den Zahlen auch der Einfluss der Umgebung aus; es waren nämlich in der Nähe der Inductoren mehrere ausgedehnte Metallmassen vorhanden.

Werden zwei gleich dicke Drähte von denselben elektrischen Schwingungen durchflossen, so ist das Verhältniss der Wärmeentwicklung

$$V = \frac{w}{w_1} \sqrt{\frac{\mu \sigma_1}{\mu_1 \sigma}}.$$

Setze ich $\mu_1 = 1$ und führe auch für w und w_1 die spec. Widerstände ein, so ist

$$V = \sqrt{\frac{\mu \sigma}{\sigma_1}}.$$

Daraus könnte man sogleich μ berechnen, wenn die beiden Thermoelemente, welche uns ein Maass der Wärmeentwicklung angeben sollen, gleich wirksam, respective empfindlich wären. Um diesen Umstand zu controliren, wurden die Drähte auch durch einen constanten Strom erwärmt, bei welchem es ja bekannt ist, dass die Wärmeentwicklung proportional dem spec. Widerstande geschehen muss. In den meisten Fällen stimmt das Verhältniss von ϕ mit jenem der spec. Widerstände nahe überein; in anderen Fällen ist an V eine kleine Correction anzubringen; wir schreiben also

$$qV = \sqrt{\frac{\mu \sigma}{\sigma_1}},$$

wo $q = \frac{\sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{\phi_1}{\phi}$ ist.

Wir haben also

$$\mu = q^2 V^2 \frac{\sigma_1}{\sigma}.$$

Bei dieser Berechnung wollen wir die Resultate der Tabelle II ausschliessen, weil die dort verwendeten Drähte nur 0.175 mm dick waren und die Formel 1 vielleicht für diese feinen Drähte nicht anwendbar ist.

In der nachfolgenden Tabelle sind die beobachteten (V) und die corrigirten Werthe (qV) des Verhältnisses der Wärmeentwicklung, sowie die absoluten Werthe von μ eingetragen.

Tabelle VIII.

Drahtsorte		V	qV	μ
Eisen weich		12·9	13·5	118
Stahl (Klaviersaite)	weich	12·8	13·1	106
	hart	14·6	14·7	115
Bessemerstahl	weich	15·4	13·5	77
	hart	16·3	17·1	74
Nickel		7·9	7·5	27

Bemerkungen über die Stärke der magnetisirenden Kräfte.

Um eine Schätzung der im Eisendrahte beim Durchgange elektrischer Schwingungen erregten magnetisirenden Kräfte zu erhalten, muss man vor Allem einen Überblick über die während der Oscillationen herrschenden Stromstärkeverhältnisse erlangen. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Wärmeentwicklung durch den constanten Strom und durch die Schwingungen. Bedeuten J und i die entsprechenden Stromstärken in einem bestimmten Zeitmoment, so ist die im Zeitelement dt entwickelte Wärmemenge gegeben durch MnJ^2dt und $Mn'i^2dt$, und während des Verlaufes einer ganzen Entladung ist sie $= Mn' \int_0^\infty i^2 dt$. Man kann annehmen, dass die

Schwingungen einer Entladung vollkommen ablaufen, bevor die nächste beginnt. Die Wärmeentwicklung pro Secunde ist N -mal so gross, wenn N Entladungen in der Zeiteinheit auftreten und wenn man annimmt, dass sich die Wärmewirkungen einfach superponiren.

Wir wollen als concretes Beispiel die Daten über den Messingdraht aus Tabelle I nehmen. Da ist $\phi = 37.5$ und $\alpha = 94.5$ für $D = 20$; also die Wärmeentwicklung durch die Schwingungen ungefähr 2.5 mal so gross, als durch den constanten Strom; doch nehmen wir an, da es sich nur um eine Schätzung handelt, sie wäre gleich, so ist zu setzen

$$nJ^2 = Nn' \int_0^\infty i^2 dt. \quad 2)$$

Bei der Schätzung der magnetisirenden Kräfte kommen die Maximalstromstärken der Oscillation in Betracht. Wir wollen nun den Verlauf einer Oscillation in der Form einer gedämpften Pendelschwingung annehmen, was ja angenähert richtig sein dürfte. Der erste maximale Ausschlag des Pendels, welches mit einer gewissen Geschwindigkeit die Ruhelage verlässt, repräsentirt uns hier die erste maximale Stromstärke i_m . Wir schreiben daher

$$i = Ai_m e^{-\frac{\lambda t}{T}} \sin \frac{\pi t}{T}, \quad 3)$$

wo

$$A = e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{\pi^2}.$$

λ bedeutet auch hier das logarithmische Decrement und T die Schwingungsdauer. Setzen wir diesen Werth in 2 ein, so ist

$$nJ^2 = Nn'A^2 i_m^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2\lambda t}{T}} \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt$$

und daher

$$nJ^2 = Nn'A^2 i_m^2 \frac{T}{4} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda^2 + \pi^2} \right).$$

• Wir können λ^2 gegen π^2 und ebenso $\frac{1}{\pi}$ gegen $\frac{1}{\lambda}$ vernachlässigen und haben also

$$nJ^2 = Nn'A^2 i_m^2 \frac{T}{4\lambda}.$$

Setzen wir für n' den Werth aus 1) ein, so ist

$$\frac{i_m^2}{J^2} = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{n\sigma}{\mu}} \frac{4\lambda}{NA^2}. \quad 4)$$

Je grösser die Dämpfung, desto stärker muss die Oscillation einsetzen, damit dieselbe Wärmewirkung erzeugt wird wie beim constanten Strom. Für Werthe von λ , welche sich der Null nähern, verliert die Gleichung ihre Richtigkeit; sie entspricht aber dann auch nicht mehr den Bedingungen, unter welchen wir sie aufgestellt haben. Wir machen den Vergleich an dem Messingdrahte; es ist $a = 0.0226 \text{ cm}$, $\sigma = 8000$, $N = 23$, $n = 9 \times 10^7$ (nach einer früheren Bestimmung), $\mu = 1$.

Für die Beurtheilung der Dämpfung der Schwingungen im Secundärinductor muss der Umstand massgebend sein, dass hier ein Eisendraht eingeschaltet ist; eine theoretische Schätzung von λ aus Selbstinduction und Widerstand des Secundärinductors führt nahe auf den Werth $\lambda = 0.03$, welchen wir in unsere Berechnung einführen wollen.

Unter Zugrundelegung obiger Daten ergibt sich

$$\frac{i_m^2}{J^2} = 58000.$$

Wird ein Draht von einem constanten Strome durchflossen, so ist die circular wirkende magnetisirende Kraft H im Drahte und in einem Abstände a von der Axe desselben nach Kirchhoff¹

$$H = 2\pi n a,$$

wo n die Stromdichtigkeit bedeutet.

Die gleiche Formel wurde später auch von H. Streintz² und Lorenz³ aufgestellt. In jedem Punkte tragen zur magnetisirenden Kraft nur jene Stromfäden bei, welche innerhalb des Kreises liegen, auf dessen Peripherie sich der Punkt befindet, und zwar ist die Wirkung so, als wenn alle Stromfäden in der

¹ Pogg. Ann., Ergänzungsbd. V.

² Diese Sitzungsber., Bd. 76, 1877.

³ Wied. Ann., Bd. VII.

Axe vereinigt wären. Man kann also obige Formel auch so schreiben

$$H = \frac{2i}{a},$$

wo i ganz einfach die Stromstärke innerhalb des Kreises vom Radius a bedeutet. Ist r der Radius des Drahtes, so kann man für einen Punkt der Oberfläche

$$H = \frac{2i}{r}$$

setzen. In unserem Falle ist zwar der Strom nicht gleichmässig über den ganzen Querschnitt, wohl aber symmetrisch um die Axe vertheilt, also die Formel noch anwendbar. Dabei ist noch ein Umstand zu berücksichtigen. Die Strömung, welche ohnehin nur in einer dünnen Schichte nahe an der Oberfläche auftritt, besitzt gegen die Tiefe zu eine Phasenverschiebung. Die magnetisirende Kraft der oberen Schichten erfährt also eine Gegenkraft durch die unteren Schichten. Diese Gegenwirkung ist allerdings sehr klein.

Nach den Berechnungen von Stefan (l. c.) ist in einem Eisendrahte unter der Annahme von $\mu = 150$ bei 50×10^6 Schwingungen in der Secunde die Amplitude in einer Tiefe von 0.0058 mm in der Phase um eine halbe Schwingungsdauer gegen die Amplitude an der Oberfläche verzögert. Die Amplitude ist in dieser Tiefe 23mal kleiner als an der Oberfläche. Es ist bemerkenswerth, dass die Versuche von Bjerknes¹ mit den Berechnungen Stefan's sehr gut übereinstimmen. Nach Bjerknes verleiht eine auf Kupferdraht aufgetragene Eischichte von 0.006 mm dem Draht ganz den Charakter eines Eisendrahtes.

Mit Rücksicht auf diese Umstände ist also die Darstellung der Stromschwankungen durch Gleichung 3) auch nicht

¹ Wied. Ann., Bd. 48. In der betreffenden Tabelle ist für die Dicke der Eischichte von 0.0124 mm ein Werth für den Elektrometerausschlag eingetragen, der sich von dem für die Schichtdicke von 0.0057 mm nur sehr wenig unterscheidet. Die Beobachtungen von Bjerknes beziehen sich auf Drähte von 0.5 mm Durchmesser.

ganz correct und es ist zur Bestimmung von i_m nicht ohne Weiteres die Quadratwurzel aus 4 zu ziehen; mit Rücksicht auf die sehr starke Dämpfung der nach der Tiefe verlaufenden Strömung können wir uns jedoch erlauben

$$i_m = J \sqrt{58000} = 240 J$$

zu nehmen. Nun ist $J = 0.135$ Amp., also $i_m = 32$ Amp. Mit dieser Stärke muss die Strömung ihr erstes Maximum erreichen;¹ für diesen Moment und für die Oberfläche ergibt sich also

$$H = 290 \text{ abs. E.}$$

Diese Zahl gibt allerdings nur den grössten möglichen Werth an; es nimmt H sowohl nach der Tiefe als auch im Verlaufe der Schwingung ab. Wenn man jedoch berücksichtigt dass μ auch mit abnehmender magnetisirender Kraft einen endlichen Werth beibehält, dann muss man wohl zugeben, dass sich diese extremen Werthe der magnetisirenden Kräfte bemerkbar machen müssten, wenn die Moleküle oder Molekülgruppen im Stande wären, ihrem raschem Wechsel zu folgen. Es liegt nahe anzunehmen, dass die Magnetisirung eines Körpers bei sehr rasch wechselndem Felde überhaupt nicht über jene Grenzen hinausgeht, innerhalb welcher μ constant ist und welche ihr Analogon in den elastischen Deformationen eines Körpers hat. Eine stärkere Magnetisirung über dieses Gebiet hinaus nimmt wahrscheinlich mit zunehmender Wechselzahl rasch ab, wenigstens scheint die Erfahrung dafür zu sprechen.

Beobachtungen in dieser Richtung wären gewiss von Interesse.

Vielleicht würde sich eine solche Untersuchung direct mit Condensatorentladungen führen lassen. Legt man Eisendrähte in eine Rolle und schickt durch diese eine Condensatorentladung, welche oscillatorisch verläuft, so werden die Oscillationen in doppelter Weise durch die Eisendrähte beeinflusst.

¹ Man muss dabei bedenken, dass diese hohe Stromstärke nur eine ausserordentlich kurze Zeit anhält.

Erstens wird die Dauer der Oscillation verlängert, da die Eisendrähte den Selbstinductionscoëfficienten des Entladungskreises erhöhen, und zweitens wird auch die Dämpfung der Schwingungen vermehrt, insoferne als in den Eisendrähten infolge der Hysteresis ein Theil der Schwingungsenergie absorbirt wird.¹ Mit Hilfe des von Hiecke² construirten Apparates kann die Schwingungsdauer einer Entladung ziemlich genau bestimmt werden und man kann dabei auch die Dämpfung messen. Auf diese Weise könnte man einigen Aufschluss über das Verhalten des Eisens bei Schwingungen erhalten, deren Zahl zwischen 500 und 10000 liegt.

¹ Die Foucault'schen Ströme müssten eliminirt werden.

² Diese Sitzungsber., Bd. 96, 1887.

VIII. SITZUNG VOM 8. MÄRZ 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX und X (November und December 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. Skraup in Graz übersendet zwei im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchungen:

1. »Über propionylirte Schleimsäureester«, von P. Fortner und Zd. H. Skraup.
2. »Über die Umwandlung der Citraconsäure in Mesaconsäure«, von Dr. R. Franz.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine von Dr. J. Weidenfeld im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Untersuchung, die den Titel trägt: »Versuche über die respiratorische Function der Intercostalmuskeln. II. Abhandlung. Sind die Intercostalmuskeln bei der Athmung thätig?«

Herr Dr. Gustav Jäger, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über die innere Reibung der Lösungen«.



SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

**ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.**

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILL.

1900

1900

IX. SITZUNG VOM 5. APRIL 1894.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 17. März l. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Regierungsrath Prof. Dr. Gustav Adolph Weiss in Prag.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1893), Abtheilung I, und das Heft IX—X (November und December 1893), Abtheilung II. a., des 102. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das Heft II (Februar 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Der Magistrat der k. k. Reichshaupt- und Residenzstadt Wien spricht der kaiserl. Akademie den Dank aus für das demselben übermittelte Gutachten über den neuesten Stand der Blitzableiterfrage.

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz dankt für die ihm zu einer zweiten geologischen Forschungsreise nach Thessalien und Macedonien bewilligte Subvention; desgleichen dankt Herr Custos Dr. Günther Ritter Beck v. Mannagetta für die ihm bewilligte Reisesubvention zur Durchführung seiner botanischen Forschungen im nordwestlichen Theile der Balkanhalbinsel.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettlinghausen übersendet eine Arbeit aus dem phyto-paläontologi-

schen Institute der k. k. Universität in Graz: »Über atavistische Blattformen des Tulpenbaumes«, von Adolf Noé v. Archenegg.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind« (II. Theil), von Prof. Dr. J. Finger an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
2. »Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten« (II. Mittheilung), von Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz.
3. »Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung«, von Prof. Em. Czuber an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
4. »Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung«, von A. J. Stodolkie-witz, Gymnasialprofessor in Plotzk (Polen).

Ferner legt der Secretär zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

1. Von Herrn Franz Müller in Siegenfeld, mit der Aufschrift: »Neuerung an Verkehrsmitteln«;
2. von Prof. Dr. A. Wassmuth in Graz mit der Aufschrift: »Über die Anwendung des Principis des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium im IV. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung: »Eine neue Phytoptiden-Gattung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine von Herrn Prof. Dr. R. Přibram übersandte Arbeit aus dem

chemischen Laboratorium der Universität zu Czernowitz: »Zur Kenntniss des Resacetophenons«, von A. Wechsler.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben zwei von Herrn Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über einige Derivate der Veratrumsäure und des Veratrols«, von Dr. Wilhelm Heinisch.
2. »Über die trockene Destillation des Kalksalzes der Diäthylprotocatechusäure«, von Dr. Wilhelm Heinisch.

Endlich überreicht Herr Hofrath Lieben eine von dem Director der Versuchsanstalt für Photographie, Herrn J. M. Eder, eingesandte Arbeit des Herrn Eduard Valenta: »Über die Löslichkeit des Chlor-, Brom- und Jodsilbers in verschiedenen anorganischen und organischen Lösungsmitteln«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn Adolf Stengel: »Über die Krystallform des Tetramethylbrasilin $[C_{16}H_{10}O_5(CH_3)_4]$ «.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Die Formbildung des menschlichen Blinddarmes und die *Valvula coli*«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung des Herrn F. Hasenöhr: »Über das quadratische Reciprocitätsgesetz«

Herr Dr. Eduard Freiherr v. Haerdtl, Professor an der k. k. Universität zu Innsbruck, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Entdeckung der Ursache der Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtungen des Mondes«

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Adamkiewicz, A., Tafeln zur Orientirung an der Gehirnoberfläche des lebenden Menschen bei chirurgischen Operationen und klinischen Vorlesungen. (Mit deutschem, französischem und englischem Text.) Zweite unveränderte Auflage. Wien, 1894; Folio.

Staggemeier, A., First Part of the General-Maps for the Illustration of Physical Geography. (Contain five tables marked: I—V.) Copenhagen, 1893; Folio.

Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind

(II. Theil)

von

Dr. Jos. Finger.

In dem ersten Theile dieser Abhandlung¹ wurden die Beziehungen zwischen den Componenten der Spannung und den Deformationen, sowie auch der Ausdruck für das Potential der elastischen Kräfte lediglich aus zwei Grundannahmen deducirt. Es wurde nämlich vorausgesetzt, dass erstens das in Betracht gezogene Körperelement vor der betrachteten Deformation isotrop ist, und zweitens, dass für die inneren Kräfte, die innerhalb dieses Körperelements wirksam sind, ein Potential existirt, ohne dass jedoch über die Art der zwischen den einzelnen materiellen Punkten dieses Elements wirkenden Kräfte irgend eine Annahme gemacht worden wäre.

Es ergab sich hiedurch, wofern man bei der Bestimmung des Potentials, beziehungsweise der Spannungen von Gliedern absieht, die in Bezug auf die 9 Verschiebungsderivationen von höherer als der dritten, beziehungsweise zweiten Ordnung sind, die Nothwendigkeit, bei jeder isotropen Substanz ausser der Integrationsconstanten A_0 der Potentialfunction noch 6 constante, bloss von dem anfänglichen Zustande des betrachteten

Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII., Abth. II a., Jänner 1894.

Körperelements abhängige Coëfficienten, also 6 Elasticitätsconstanten in Rechnung zu ziehen. In aller Kürze wurde jedoch bemerkt, dass diese 6 Constanten nicht von einander unabhängig sein müssen, sondern dass zwischen denselben noch gewisse Beziehungen stattfinden können, deren Ermittlung eine Aufgabe der Moleculartheorie ist.

Es soll nunmehr gezeigt werden, dass in der That bei der Beschränkung auf die oberwähnten Glieder sich diese 6 Coëfficienten durch bloss drei Elasticitätsconstanten ausdrücken lassen, wofern man von der üblichen besonderen Annahme ausgeht, dass die zwischen je zwei materiellen Punkten m und μ wirkenden inneren Kräfte entweder attractiv oder repulsiv wirken und lediglich Functionen der variablen Entfernung R dieser Punkte, also auch bestimmte Functionen des Quadrats R^2 dieser Entfernung sind, so dass jedenfalls für diese gegenseitige Einwirkung der beiden materiellen Punkte m und μ ein Potential u existirt, welches sich zudem in der Form

$$u = m\mu F(R^2) \quad (1)$$

ausdrücken lässt, wo F irgend eine, wenn auch unbekannte continuirliche Function und m und μ die Massen der beiden materiellen Punkte bedeuten.

Um dies nachzuweisen, sei vorläufig ein Körper vorausgesetzt, der in seinem anfänglichen Zustande, in welchem Isotropie in jedem Körperelemente stattfindet, in seiner ganzen Ausdehnung homogen ist und dessen Punkte durch irgend welche Ursachen eine endliche homogene Lagenänderung (eine homogene Deformation) erfahren haben. Dieser Annahme zufolge ist, wenn $x'y'z'$ die zur beliebigen Zeit t stattfindenden Coordinaten des Punktes μ , und $\xi\eta\zeta$ die gleichzeitigen Coordinaten des Punktes m in Bezug auf ein an der Bewegung der einzelnen Punkte des Körpers nicht theilnehmendes orthogonales Axensystem, und wenn ferner xyz die anfänglichen Werthe der relativen Coordinaten $x' - \xi, y' - \eta, z' - \zeta$ des Punktes μ bezeichnen,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \xi + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ y' &= \eta + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ z' &= \zeta + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo $a_{11}a_{21}\dots a_{33}$ gewisse vorläufig unbestimmt gelassene Grössen bedeuten, die von xyz unabhängig sind.

Durch D sei die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

und durch $A_{11}A_{21}A_{31}\dots$ die zu $a_{11}a_{21}a_{31}\dots$ adjungirten Unterdeterminanten bezeichnet.

Jenes Tetraëder, dessen eine Spitze stets der seine Lage stetig ändernde Punkt m bildet und dessen zu den Axen xyz parallelen, von m ausgehenden Kanten in der anfänglichen Lage die Länge 1 haben, erlangt durch die homogene Deformation (2) zur Zeit t die Lage und Gestalt jenes Tetraëders, dessen Eckpunkte m, μ_1, μ_2, μ_3 in Bezug auf das zu xyz parallele bewegliche Axensystem, dessen Anfangspunkt m ist, die Coordinaten $(000), (a_{11}a_{12}a_{13}), (a_{21}a_{22}a_{23}), (a_{31}a_{32}a_{33})$ haben, und dessen sechsfaches Volum der Determinante (3) gleicht, und zwar sind die Kanten $m\mu_1 = R_1, m\mu_2 = R_2, m\mu_3 = R_3$ und ihre gegenseitige Lage durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} R_1^2 &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = a_x \\ R_2^2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = a_y \\ R_3^2 &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a_z \\ R_2R_3 \cos(R_2R_3) &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = b_x \\ R_3R_1 \cos(R_3R_1) &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = b_y \\ R_1R_2 \cos(R_1R_2) &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = b_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

bestimmt.

Jene Punkte μ , welche zur Zeit t in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt der bewegliche Punkt m und deren Radius 1 ist, bilden in der primitiven Lage zufolge (2) ein Ellipsoid, dessen Gleichung in Bezug auf ein zu den früheren Coordinatenaxen paralleles Axensystem mit dem Anfangspunkte m

$$\begin{aligned} (a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^2 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^2 + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^2 = \\ = a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2 + 2b_x yz + 2b_y zx + 2b_z xy = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

ist. Dieses Ellipsoid ist den Gleichungen (4) zufolge bloss von der Gestalt, nicht auch von der Lage des Tetraëders $m\mu_1\mu_2\mu_3$ abhängig. Sind ferner abc die reciproken Werthe der Halbaxen dieses Ellipsoids und $F_1F_2F_3$ die drei in m zusammenstossenden Grenzflächen jenes Parallelopipeds, dessen Kanten $m\mu_1$, $m\mu_2$, $m\mu_3$ sind und dessen Volum D ist, so ist, wenn σ und s die Summen $a^2 + b^2 + c^2 - 3$ und $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 3$ bedeuten,

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= a^2 + b^2 + c^2 - 3 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - 3 = a_x + a_y + a_z - 3 = \\ &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - 3 \\ s &= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 3 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - 3 = \\ &= (a_y a_z - b_x^2) + (a_z a_x - b_y^2) + (a_x a_y - b_z^2) - 3 = \\ &= A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 + A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2 + A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2 - 3 \end{aligned} \right\} (6)^1$$

$$D = 1 + v = abc$$

wofern v die cubische Dilatation bezeichnet.

Das der Fläche (5) congruente und derselben conjugirte¹ Ellipsoid, dessen Gleichung in Bezug auf dasselbe Axensystem

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 = 1 \quad (7)$$

und dessen Mittelpunkt gleichfalls der Punkt m ist, hängt wesentlich von der Lage des Triëders $m\mu_1\mu_2\mu_3$ ab. Es sind nämlich die mit den drei Höhen N_1, N_2, N_3 dieses Triëders parallelen Kanten $\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_2}, \frac{1}{N_3}$ des demselben adjungirten¹ Triëders conjugirte Radien des Ellipsoids (7).

Das mit der letzten Fläche (7) coaxiale, derselben adjungirte¹ Ellipsoid, dessen Gleichung bezüglich desselben Axensystems

$$(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z)^2 + (A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z)^2 + (A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z)^2 = D^2 \quad (8)$$

¹ Siehe Finger: Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik. Diese Sitzungsber., Bd. CI, S. 1105—1142 (1892).

lautet, ist zugleich zufolge (2) jenes Deformationsellipsoid, in welches zur Zeit t jene Kugelfläche übergeht, deren Mittelpunkt in der primitiven Lage der Punkt m und deren Radius 1 ist. Die Halbaxen dieser Fläche (8) sind abc und die Kanten $R_1 R_2 R_3$ des Triäders $M\mu_1\mu_2\mu_3$ sind conjugirte Radien derselben.

Die durch (2) charakterisirte homogene Deformation lässt sich bekanntlich — abgesehen von der durch $\xi\eta\zeta$ bestimmten fortschreitenden Bewegung, die durch die Bewegung des Mittelpunktes m der Flächen (5), (7), (8) bedingt ist — als zusammengesetzt ansehen *a)* aus einer reinen Deformation, d. i. aus einer Ausdehnung nach den Richtungen der drei Axen der Fläche (5) — den Dilatationshauptaxen — deren Richtungen vorläufig von nun an als die bisher unbestimmt gelassenen Axenrichtungen xyz angenommen seien, und *b)* aus einer Rotation des Körpers um den Punkt m , durch welche nach einer Drehung ϑ das Ellipsoid (5) in die Lage des conjugirten Ellipsoids (7) gelangt, dessen mit dem Deformationsellipsoid (8) gleichgerichteten Axen durch XYZ bezeichnet seien. Sind demgemäss nunmehr durch xyz die anfänglichen Coordinaten des Punktes μ in Bezug auf die Axen des Ellipsoids (5) und durch XYZ die Coordinaten der Lage desselben Punktes μ zur Zeit t in Bezug auf die Axen des Ellipsoids (7) oder (8) bezeichnet und bedeuten $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ die Hauptdilatationen, so ist

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + \lambda_1 \\ b &= 1 + \lambda_2 \\ c &= 1 + \lambda_3 \\ \sigma &= (1 + \lambda_1)^2 + (1 + \lambda_2)^2 + (1 + \lambda_3)^2 - 3 \\ s &= (1 + \lambda_2)^2(1 + \lambda_3)^2 + (1 + \lambda_3)^2(1 + \lambda_1)^2 + (1 + \lambda_1)^2(1 + \lambda_2)^2 - 3 \\ v &= D - 1 = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und es reduciren sich die Gleichungen (2) auf folgende einfache Relationen:

$$\left. \begin{aligned} X &= ax = (1 + \lambda_1)x \\ Y &= by = (1 + \lambda_2)y \\ Z &= cz = (1 + \lambda_3)z \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Da nun $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die anfängliche und $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ die schliessliche Entfernung der beiden Punkte m und μ ist, so muss, wenn durch ρ die Differenz

$$\rho = R^2 - r^2 \quad (11)$$

und durch ABC die Grössen

$$\left. \begin{aligned} A &= a^2 - 1 = 2\lambda_1 + \lambda_1^2 \\ B &= b^2 - 1 = 2\lambda_2 + \lambda_2^2 \\ C &= c^2 - 1 = 2\lambda_3 + \lambda_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

welche von derselben Grössenordnung sind, wie die Dilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, bezeichnet werden, der Gleichung (10) zufolge

$$\rho = Ax^2 + By^2 + Cz^2 \quad (13)$$

sein.

Ferner ersieht man aus den Gleichungen (12) und aus den durch (9) dargestellten Werthen von σ , s und v sofort, dass zwischen diesen drei Grössen und den Grössen ABC folgende Beziehungen stattfinden:

$$\left. \begin{aligned} A+B+C &= \sigma \\ A^2+B^2+C^2 &= \sigma^2 + 4\sigma - 2s \\ BC+CA+AB &= -2\sigma + s \\ A^3+B^3+C^3 &= \sigma^3 + 6\sigma^2 - 3s\sigma + 3v^2 + 3\sigma - 3s + 6v \\ A^2(B+C)+B^2(C+A)+C^2(A+B) &= \\ &= -2\sigma^2 + s\sigma - 3v^2 - 3\sigma + 3s - 6v \\ ABC &= v^2 + \sigma - s + 2v \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Das Potential der gesammten zur Zeit t auf das Massenelement m einwirkenden inneren Kräfte ist zufolge (1) und (11)

$$\Sigma u = m \cdot \Sigma_{\mu} F(R^2) = m \cdot \Sigma_{\mu} F(r^2 + \rho) \quad (15)$$

wobei sich die Summe Σ auf sämmtliche Massentheilchen μ des Körpers erstreckt, die auf m — sei es eine anziehende oder eine abstossende Wirkung ausüben.

Da den Gleichungen (12) und (13) gemäss ρ bezüglich der Hauptdilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ von der ersten Ordnung ist, so ist, wenn man bei der Bildung des Potentials der inneren

Kräfte von nun an von allen Gliedern absieht, die bezüglich dieser Hauptdilatationen, also auch bezüglich der durch (12) bestimmten Grössen A, B, C von höherer Ordnung sind, als der dritten,

$$F(r^2 + \rho) = F(r^2) + F'(r^2) \cdot \rho + \frac{1}{2} F''(r^2) \cdot \rho^2 + \frac{1}{6} F'''(r^2) \cdot \rho^3,$$

und zwar besteht diese Relation, wie gross auch immer die obervähnte Drehung des Körpers sein möge, durch welche das Ellipsoid (5) in die Lage (7) gelangt.

Setzt man in die letzte Gleichung den Werth (13) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} F(r^2 + \rho) &= F(r^2) + F'(r^2) \cdot (Ax^2 + By^2 + Cz^2) \\ &+ \frac{1}{2} F''(r^2) \cdot [A^2x^4 + B^2y^4 + C^2z^4 + 2BCy^2z^2 + 2CAz^2x^2 + 2ABx^2y^2] \\ &+ \frac{1}{6} F'''(r^2) \cdot [A^3x^6 + B^3y^6 + C^3z^6 + 3A^2x^4(By^2 + Cz^2) + \\ &\quad + 3B^2y^4(Cz^2 + Ax^2) + 3C^2z^4(Ax^2 + By^2) + 6ABCx^2y^2z^2]. \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (15) und berücksichtigt man, dass durch die in der anfänglichen Lage des Körpers vorausgesetzte Isotropie der Substanz die gleiche Massenlagerung bezüglich dreier beliebiger orthogonaler Axen des Körpers, also auch bezüglich der von der Rotation ϑ des Körpers unabhängigen Richtungen der drei Axen des Ellipsoids (5) bedungen ist, so erhält man, wofern durch a_0, a_1, a_2, a_3 kürzshalber die auf alle wirksamen Massenelemente μ sich erstreckenden Summen

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \sum \frac{\mu}{2} F(r^2) \\ a_1 &= \sum [\mu F'(r^2) \cdot x^2] = \sum [\mu F'(r^2) \cdot y^2] = \sum [\mu F'(r^2) \cdot z^2] \\ a_2 &= \sum [\mu F''(r^2) \cdot y^2 z^2] = \sum [\mu F''(r^2) \cdot z^2 x^2] = \sum [\mu F''(r^2) \cdot x^2 y^2] \\ a_3 &= \sum [2 \mu F'''(r^2) \cdot x^2 y^2 z^2] \end{aligned} \right\} (16)$$

bezeichnet werden, so dass in Folge der bedungenen Isotropie auch

$$\begin{aligned}\Sigma[\mu F''(r^2) \cdot x^3] &= \Sigma[\mu F''(r^2) \cdot y^3] = \Sigma[\mu F''(r^2) \cdot z^3] = 3a_2 \\ \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot x^3 y^2] &= \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot x^3 z^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot y^3 x^2] = \\ &= \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot y^3 z^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot z^3 x^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot z^3 y^2] = \frac{3}{2} a_3 \\ \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot x^6] &= \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot y^6] = \Sigma[\mu F'''(r^2) \cdot z^6] = \frac{15}{2} a_3\end{aligned}$$

ist, als das Potential Σu aller auf den materiellen Punkt m zur Zeit t einwirkenden inneren Kräfte einen Ausdruck von der Form

$$\Sigma u = m \left[2a_0 + a_1 \cdot \alpha_1 + \frac{1}{2} a_2 \alpha_2 + \frac{1}{4} a_3 \alpha_3 \right],$$

wo

$$\left. \begin{aligned}\alpha_1 &= A + B + C \\ \alpha_2 &= 3(A^2 + B^2 + C^2) + 2(BC + CA + AB) \\ \alpha_3 &= 5(A^3 + B^3 + C^3) + \\ &\quad + 3[A^2(B + C) + B^2(C + A) + C^2(A + B)] + 2ABC\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Bildet man, um das Gesamtpotential sämmtlicher innerer Kräfte, die zwischen den Massenpunkten des deformirten Körpers thätig sind, zu ermitteln, auf dieselbe Weise das Potential für jeden einzelnen Punkt m des Punktsystems und summirt die so erhaltenen Werthe, so erhält man, da bei der Bildung dieser Summe die gegenseitige Einwirkung je zweier Punkte zweimal in Rechnung gezogen ist, für dieses Potential U der sämmtlichen inneren Kräfte des Punktsystems den letzten Gleichungen zufolge den Werth

$$U = \frac{1}{2} \Sigma m \left(2a_0 + a_1 \alpha_1 + \frac{1}{2} a_2 \alpha_2 + \frac{1}{4} a_3 \alpha_3 \right).$$

Demgemäss ist, wenn δ_0 die primitive Dichtigkeit und dv das anfängliche Volum des Massenelementes m bedeuten, so dass $m = \delta_0 \cdot dv$ ist, und wofern durch A_0, A_1, A_2, A_3 jene von der anfänglichen — als isotrop vorausgesetzten — Massenslagerung abhängigen Werthe bezeichnet werden, die durch

$$\frac{A_0}{a_0} = \frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \frac{A_3}{a_3} = \delta_0 \quad (18)$$

bestimmt sind,

$$U = \int f \cdot dv, \quad (19)$$

wo f die Potentialfunction

$$f = A_0 + \frac{1}{2} A_1 \alpha_1 + \frac{1}{4} A_2 \alpha_2 + \frac{1}{8} A_3 \alpha_3 \quad (20)$$

bedeutet.

Die in dieser Gleichung ausser den constanten, vom anfänglichen Zustande des Körpers abhängigen Grössen A_0, A_1, A_2, A_3 vorkommenden Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind den Gleichungen (17) und (12) zufolge bloss Functionen der Hauptdilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, und zwar ist α_1 von der ersten, α_2 von der zweiten und α_3 von der dritten Grössenordnung.

Die Substitution von (17) und (12) führt, wenn kürzshalber durch $\alpha \beta \gamma \alpha' \beta' \gamma'$ die Summen

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, & \beta &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, & \gamma &= \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 \\ \alpha' &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3, & \beta' &= \lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^2 (\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3^2 (\lambda_1 + \lambda_2), \\ \gamma' &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

bezeichnet werden, zu folgendem Werthe der Potentialfunction:

$$\left. \begin{aligned} f &= A_0 + A_1 \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta \right) + A_2 (3\beta + 2\gamma + 3\alpha' + \beta') \\ &\quad + A_3 (5\alpha' + 3\beta' + 2\gamma') \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Es lässt sich aber auch die Potentialfunction f leicht als Function der den Gleichungen (6) gemäss durch die Form des ursprünglich betrachteten Tetraëders $m \mu_1 \mu_2 \mu_3$ genau bestimmen, jedoch von der Lage desselben vollkommen unabhängigen Grössen s, σ und ν ausdrücken, von welchen s die um 3 verringerte Summe der Quadrate der drei in m zusammenstossenden Seitenkanten R_1, R_2, R_3 , ferner σ die um 3 verringerte vierfache Summe der Quadrate der drei in demselben Punkte zusammenstossenden Seitendreiecke und D das sechsfache Volum dieses Tetraëders bedeuten. Substituirt man nämlich (14) in (17) und diese Werthe in (20), so findet man

$$f = A_0 + \frac{1}{2} A_1 \cdot \sigma + \frac{1}{4} A_2 \cdot (3\sigma^2 + 8\sigma - 4s) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{8} A_3 (5 \cdot \sigma^3 + 24\sigma^2 - 12\sigma s + 8v^2 + 8\sigma - 8s + 16v) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die in dieser Gleichung ausser der cubischen Dilatation $v = D - 1$ vorkommenden Grössen σ und s lassen sich auch unmittelbar aus den Gliedern der Determinante (3) berechnen, und zwar ist den Gleichungen (6) und (4) gemäss σ die um 3 verringerte Summe der Quadrate dieser sämtlichen Glieder, beziehungsweise der Coëfficienten von x^2 , y^2 und z^2 in der Gleichung des dem Deformationsellipsoid (8) adjungirten Ellipsoids (5), und s ist den Gleichungen (6) und (4) zufolge die um 3 verringerte Summe der Quadrate sämtlicher Unterdeterminanten von D , beziehungsweise der Coëfficienten von x^2 , y^2 und z^2 in der Gleichung des Deformationsellipsoids (8), nämlich

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - 3 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + \\ &\quad + a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 - 3 \\ s &= a_y a_z + a_z a_x + a_x a_y - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 - 3 = \\ &= A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 - 3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Deformation des ganzen, im anfänglichen Zustande als isotrop angenommenen Körpers eine homogene sei. Findet diese Voraussetzung nicht statt, so kann bekanntlich dennoch die Deformation eines unendlich kleinen Elementes, dessen anfängliches Volum dv sei, stets als eine homogene Deformation angesehen werden, und zwar müssen, wenn nunmehr x, y, z die anfänglichen und $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$ die schliesslichen Coordinaten irgend eines Punktes m dieses Elements in Bezug auf irgend ein fixes orthogonales Axensystem bedeuten, behufs Erzielung der Übereinstimmung mit den Gleichungen (2), da dieselben nunmehr auf ein paralleles Axensystem zu beziehen sind, dessen Anfangspunkt die anfängliche Lage des Punktes m ist, in (2) statt (x, y, z) die dem benachbarten Punkte μ anfänglich zukommenden Werthe (dx, dy, dz) eingesetzt werden, und es ist ferner, wofern die Bezeichnungsweise des ersten Theiles dieser Abhandlung beibehalten wird, gleichzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 + \lambda_x, & a_{21} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu_z, & a_{31} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} = \mu_y \\ a_{12} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu_z, & a_{22} &= 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 + \lambda_y, & a_{32} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} = \nu_x \\ a_{13} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu_y, & a_{23} &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mu_x, & a_{33} &= 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 1 + \lambda_z \end{aligned} \right\} (25)$$

Demgemäss sind die Subdeterminanten von (3)

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= 1 + \lambda_y + \lambda_z + (\lambda_y \lambda_z - \mu_x \nu_x) \\ A_{21} &= -\mu_z + (\nu_x \nu_y - \lambda_z \mu_z) \\ A_{31} &= -\nu_y + (\mu_z \mu_x - \lambda_y \nu_y) \\ A_{12} &= -\nu_z + (\mu_x \mu_y - \lambda_z \nu_z) \\ A_{22} &= 1 + \lambda_z + \lambda_x + (\lambda_z \lambda_x - \mu_y \nu_y) \\ A_{32} &= -\mu_x + (\nu_y \nu_z - \lambda_x \mu_x) \\ A_{13} &= -\mu_y + (\nu_z \nu_x - \lambda_y \mu_y) \\ A_{23} &= -\nu_x + (\mu_y \mu_z - \lambda_x \nu_x) \\ A_{33} &= 1 + \lambda_x + \lambda_y + (\lambda_x \lambda_y - \mu_z \nu_z) \end{aligned} \right\} (26)$$

Setzt man diese Werthe in die früheren Formeln ein, so lässt sich, wofern nur der anfängliche Zustand des Körperelements dv ein isotroper ist, das Potential dU der innerhalb dieses Körperelements wirkenden inneren Kräfte nach der in Betracht gezogenen Deformation mittelst der Gleichung

$$dU = f \cdot dv \quad (27)$$

berechnen, wo für f der Werth aus (22) oder (20), beziehungsweise (23) einzuführen ist. Das Potential dU ist hiebei bis auf Glieder, die bezüglich der Hauptdilatationen von dritter Ordnung sind, genau bestimmt.

Substituirt man die Werthe aus (25) und (26) in die Gleichungen (24) und (3), bezeichnet man ferner kürzshalber durch λ die Summe $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$ und durch η die Summe der Quadrate der eingeklammerten Binome in (26), so findet man, wofern man im Übrigen die durch die Formeln (22) des ersten Theiles dieser Abhandlung bestimmte Bezeichnungsweise zur Anwendung bringt,

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 2\lambda + \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \\ s &= 4\lambda + 2\beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) + 4\gamma_1 - 2\delta_1 + \\ &\quad + 2\beta'_1 + 2(\alpha_{21} + \alpha_{31}) - 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) - 2\varepsilon'_1 + \eta \\ \nu &= D - 1 = \lambda + \gamma_1 - \delta_1 + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 - \gamma' \end{aligned} \right\} (28)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z \\ \beta_1 &= \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 \\ \beta_2 &= \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 \\ \beta_3 &= \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2 \\ \gamma_1 &= \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y \\ \delta_1 &= \mu_x \nu_x + \mu_y \nu_y + \mu_z \nu_z \\ \alpha'_1 &= \lambda_x^3 + \lambda_y^3 + \lambda_z^3 \\ \beta'_1 &= \lambda_x^2 (\lambda_y + \lambda_z) + \lambda_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + \lambda_z^2 (\lambda_x + \lambda_y) \\ \gamma'_1 &= \lambda_x \lambda_y \lambda_z, \quad \gamma'_2 = \mu_x \mu_y \mu_z, \quad \gamma'_3 = \nu_x \nu_y \nu_z \\ \gamma' &= \lambda_x \mu_x \nu_x + \lambda_y \mu_y \nu_y + \lambda_z \mu_z \nu_z \\ \varepsilon'_1 &= \mu_x \nu_x (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_y \nu_y (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_z \nu_z (\lambda_x + \lambda_y) \\ \alpha_{21} &= \mu_x^2 \lambda_x + \mu_y^2 \lambda_y + \mu_z^2 \lambda_z \\ \alpha_{31} &= \nu_x^2 \lambda_x + \nu_y^2 \lambda_y + \nu_z^2 \lambda_z \\ \beta_{21} &= \mu_x^2 (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_z^2 (\lambda_x + \lambda_y) \\ \beta_{31} &= \nu_x^2 (\lambda_y + \lambda_z) + \nu_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + \nu_z^2 (\lambda_x + \lambda_y) \\ \gamma_{23} &= \mu_y \mu_z \nu_x + \mu_z \mu_x \nu_y + \mu_x \mu_y \nu_z \\ \gamma_{32} &= \nu_y \nu_z \mu_x + \nu_z \nu_x \mu_y + \nu_x \nu_y \mu_z \end{aligned} \right\} (29)$$

Durch Einsetzung der Werthe (28) in (14) findet man zunächst, wenn man von nun an solche Glieder, die bezüglich der Verschiebungsderivationen $\lambda_x \mu_x \dots$ von höherer Ordnung, als der dritten sind, also auch das Glied η vernachlässigt,

$$\begin{aligned} A+B+C &= 2\lambda + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ A^2+B^2+C^2 &= 4\beta_1 + 2(\beta_2 + \beta_3) + 4\delta_1 + 4\alpha'_1 + 4(\beta_{21} + \beta_{31}) + \\ &\quad + 4(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 4\varepsilon'_1 \\ BC+CA+AB &= 4\gamma_1 - (\beta_2 + \beta_3) - 2\delta_1 + 2\beta'_1 + \\ &\quad + 2(\alpha_{21} + \alpha_{31}) - 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) - 2\varepsilon'_1 \end{aligned}$$

$$A^3 + B^3 + C^3 = 8\alpha'_1 + 6(\beta_{21} + \beta_{31}) + 6(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 6(\gamma'_2 + \gamma'_3) + 12\varepsilon'_1$$

$$A^2(B+C) + B^2(C+A) + C^2(A+B) = 8\beta'_1 + 4(\alpha_{21} + \alpha_{31}) - \\ - 2(\beta_{21} + \beta_{31}) - 6(\gamma_{23} + \gamma_{32}) - 6(\gamma'_2 + \gamma'_3) + 8\gamma' - 4\varepsilon'_1$$

$$ABC = 8\gamma'_1 - 2(\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2(\gamma'_2 + \gamma'_3) - 4\gamma'.$$

Demgemäss ist den Gleichungen (17) zufolge

$$\frac{1}{2}\alpha_1 = \lambda + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

$$\frac{1}{4}\alpha_2 = 3\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2\gamma_1 + 2\delta_1 + 3\alpha'_1 + \beta'_1 + \\ + (\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 3(\beta_{21} + \beta_{31}) + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2\varepsilon'_1$$

$$\frac{1}{8}\alpha_3 = 5\alpha'_1 + 3\beta'_1 + 2\gamma'_1 + (\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 3(\beta_{21} + \beta_{31}) + \\ + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2(\gamma'_2 + \gamma'_3) + 2\gamma' + 6\varepsilon'_1$$

α_1 enthält bloss Glieder erster und zweiter Ordnung, α_2 solche der zweiten und dritten, α_3 dagegen bloss Glieder dritter Ordnung.

Die Potentialfunction f ist, wie die Substitution in (20) lehrt, durch die aus den Verschiebungsderivationen gebildeten Ausdrücke (29) in folgender Weise bestimmt:

$$f = A_0 + A_1 \left[\lambda + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \right] + \left. \begin{aligned} &+ A_2 [3\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2\gamma_1 + 2\delta_1 + 3\alpha'_1 + \beta'_1 + \\ &+ \alpha_{21} + \alpha_{31} + 3(\beta_{21} + \beta_{31}) + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2\varepsilon'_1] + \\ &+ A_3 [5\alpha'_1 + 3\beta'_1 + 2\gamma'_1 + \alpha_{21} + \alpha_{31} + 3(\beta_{21} + \beta_{31}) + \\ &+ 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2(\gamma'_2 + \gamma'_3) + 2\gamma' + 6\varepsilon'_1] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (47) des ersten Theiles, beziehungsweise mit der dieser unmittelbar vorangehenden Gleichung und beachtet überdies den Werth von B'_1 aus (40), so ergibt sich unmittelbar

$$\left. \begin{aligned} 2B_2 &= A_1 + 2A_2 \\ C_1 &= 2A_2 \\ A'_1 &= 3A_2 + 5A_3 \\ B_{21} &= 3(A_2 + A_3) \\ A_{21} &= A_2 + A_3 \\ B'_1 &= A_2 + 3A_3 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Es lassen sich sohin sämmtliche in dem ersten Theile betrachteten Elasticitätsconstanten, wofern man bei der Bestimmung des Potentialwerthes der elastischen Kräfte von allen Gliedern absieht, die bezüglich der Hauptdilatationen von höherer Ordnung sind, als der dritten, und wofern man von der Annahme ausgeht, dass die inneren Kräfte nur anziehende oder abstossende Kräfte sind, welche Functionen der Entfernung der sich anziehenden oder abstossenden Massenpunkte sind, abgesehen von der Potentialconstanten A_0 , auf die drei Elasticitätsconstanten A_1 , A_2 und A_3 zurückführen.

Würde man auch Glieder vierter Ordnung berücksichtigen, so würde, wie sich leicht zeigen lässt, eine weitere Constante hinzutreten, ausser man würde bezüglich der oberwähnten Function der Entfernung eine besondere Annahme machen. Es unterliegt gar keiner Schwierigkeit, die bisherige Untersuchung in gleicher Weise auf solche Glieder vierter Ordnung auszudehnen.

Die Gleichungen (31) ergeben sich auch unmittelbar sofort aus der Vergleichung des Werthes (22) mit der Gleichung (55) des ersten Theiles.

Die Gleichung (30) für die Potentialfunction lässt sich in mannigfacher Weise umformen, wie dies unter Anderem die Substitution der Werthe (31) in die Gleichungen (47), (50), (57), (58) des ersten Theiles lehrt.

Vernachlässigt man in der Gleichung (30) alle Glieder, welche bezüglich der Verschiebungsderivationen von der dritten Ordnung sind, so erhält man den von C. Neumann deducirten Potentialwerth,¹ der die zwei Elasticitätsconstanten A_1 und A_2 enthält.

Setzt man die in (31) gefundenen Werthe von $2B_2$, C_1 . . . in die Gleichungen (51) und (54) des ersten Theiles ein, oder berechnet man aus der Potentialfunction (30) mittelst der allgemeinen Gleichungen (20) des ersten Theiles unmittelbar die Spannungscomponenten, so gelangt man bei Berücksichtigung des Werthes (52) für die cubische Dilatation $\nu = D-1$, und wofern man kürzshalber, wie früher, durch $\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$ die Summen

¹ Carl Neumann, Zur Theorie der Elasticität. (Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1860, Bd. 57, S. 281–318.)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \mu_x + \nu_x \\ \varepsilon_y &= \mu_y + \nu_y \\ \varepsilon_z &= \mu_z + \nu_z \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

bezeichnet, zu folgenden wichtigen Gleichungen, welche bis auf Glieder zweiter Ordnung genau sind:

$$\left. \begin{aligned} D \cdot X_x &= A_1 + (2A_1 + 4A_2) \cdot \lambda_x + 2A_2 \cdot \nu + (A_2 + 3A_3) \cdot \nu^2 + \\ &\quad + (A_1 + 2A_2) (\lambda_x^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2) - \\ &\quad - 4(A_2 + A_3) [\lambda_y \lambda_z - \varepsilon_x^2 - 3(\lambda_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_y^2)] \\ D \cdot Y_z &= (A_1 + 2A_2) \cdot \varepsilon_x + (A_1 + 2A_2) (\mu_z \nu_y + \lambda_y \mu_x + \nu_x \lambda_z) - \\ &\quad - 4(A_2 + A_3) [\varepsilon_y \varepsilon_z - \lambda_x \varepsilon_x - 3(\varepsilon_z \varepsilon_y + \lambda_y \varepsilon_x + \varepsilon_x \lambda_z)] \\ X_x &= A_1 + 2(2A_2 + A_1) \cdot \lambda_x + (2A_2 - A_1) \cdot \nu + 3(A_3 - A_2) \cdot \nu^2 + \\ &\quad + (2A_2 + A_1) \cdot [(\lambda_y + \lambda_z)^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2] - \\ &\quad - 4(A_3 + A_2) \cdot [\lambda_y \lambda_z - \varepsilon_x^2 - 3(\lambda_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_y^2)] \\ Y_y &= A_1 + 2(2A_2 + A_1) \cdot \lambda_y + (2A_2 - A_1) \cdot \nu + 3(A_3 - A_2) \cdot \nu^2 + \\ &\quad + (2A_2 + A_1) \cdot [\mu_z^2 + (\lambda_z + \lambda_x)^2 + \nu_x^2] - \\ &\quad - 4(A_3 + A_2) \cdot [\lambda_z \lambda_x - \varepsilon_y^2 - 3(\varepsilon_z^2 + \lambda_y^2 + \varepsilon_x^2)] \\ Z_z &= A_1 + 2(2A_2 + A_1) \cdot \lambda_z + (2A_2 - A_1) \cdot \nu + 3(A_3 - A_2) \cdot \nu^2 + \\ &\quad + (2A_2 + A_1) \cdot [\nu_y^2 + \mu_x^2 + (\lambda_x + \lambda_y)^2] - \\ &\quad - 4(A_3 + A_2) \cdot [\lambda_x \lambda_y - \varepsilon_z^2 - 3(\varepsilon_y^2 + \varepsilon_x^2 + \lambda_z^2)] \\ Y_z &= Z_y = (2A_2 + A_1) \cdot \varepsilon_x + \\ &\quad + (2A_2 + A_1) \cdot [\mu_z \nu_y - (\lambda_z + \lambda_x) \cdot \mu_x - \nu_x (\lambda_x + \lambda_y)] - \\ &\quad - 4(A_3 + A_2) \cdot [\varepsilon_y \varepsilon_z - \lambda_x \varepsilon_x - 3(\varepsilon_z \varepsilon_y + \lambda_y \varepsilon_x + \varepsilon_x \lambda_z)] \\ Z_x &= X_z = (2A_2 + A_1) \varepsilon_y + \\ &\quad + (2A_2 + A_1) \cdot [-\nu_y (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_x \nu_z - (\lambda_x + \lambda_y) \cdot \mu_y] - \\ &\quad - 4(A_3 + A_2) \cdot [\varepsilon_z \varepsilon_x - \lambda_y \varepsilon_y - 3(\varepsilon_y \lambda_x + \varepsilon_x \varepsilon_z + \lambda_z \varepsilon_y)] \\ X_y &= Y_x = (2A_2 + A_1) \varepsilon_z + \\ &\quad + (2A_2 + A_1) \cdot [-(\lambda_y + \lambda_z) \cdot \mu_z - \nu_z (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_y \nu_x] - \\ &\quad - 4(A_3 + A_2) \cdot [\varepsilon_x \varepsilon_y - \lambda_z \varepsilon_z - 3(\lambda_x \varepsilon_z + \varepsilon_z \lambda_y + \varepsilon_y \varepsilon_x)] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Würde man in diesen Gleichungen $A_1 = 0$ setzen und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, so würde man die

bekannten, von Navier und Poisson gefundenen Grundgleichungen erhalten.

Durch Substitution von (31) in die Gleichungen (56) des ersten Theiles findet man folgende Werthe für die bloss von den Hauptdilatationen abhängigen Hauptspannungen S_1, S_2, S_3 :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= A_1 + (2A_2 + A_1) \cdot [2\lambda_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2] + \\ &\quad + (2A_2 - A_1) \cdot [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2] + \\ &\quad + 3(A_3 - A_2) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(A_3 + A_2) \cdot (\lambda_2\lambda_3 - 3\lambda_1^2) \\ S_2 &= A_1 + (2A_2 + A_1) \cdot [2\lambda_2 + (\lambda_3 + \lambda_1)^2] + \\ &\quad + (2A_2 - A_1) \cdot [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2] + \\ &\quad + 3(A_3 - A_2) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(A_3 + A_2) \cdot (\lambda_3\lambda_1 - 3\lambda_2^2) \\ S_3 &= A_1 + (2A_2 + A_1) \cdot [2\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2] + \\ &\quad + (2A_2 - A_1) \cdot [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2] + \\ &\quad + 3(A_3 - A_2) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(A_3 + A_2) \cdot (\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_3^2) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Der Grad der Genauigkeit reicht in diesen drei Gleichungen bis zu den Gliedern, die bezüglich der Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ von zweiter Ordnung sind.

Aus der früheren Untersuchung ist klar zu ersehen, dass zwar nicht die Gleichung (30), jedoch die Gleichung (22) und (23) den Werth der Potentialfunction f auch für den allgemeineren Fall ausdrückt, in welchem die Drehung, die das betrachtete Körperelement während seiner Deformation erfährt, also auch der Drehungswinkel ϑ in den Gleichungen (30) bis (33) des ersten Theiles, was immer für einen Werth hat, so dass auch einige oder alle Verschiebungsderivationen $\lambda_x\lambda_y\lambda_z \dots$ beliebig grosse Werthe annehmen können, wenn nur die ursprüngliche Annahme der Kleinheit der Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ erfüllt ist. Es ist dies jener Fall, auf dessen Wichtigkeit für die Anwendung auf specielle Probleme schon Saint-Venant, Kirchhoff und in neuerer Zeit Todhunter aufmerksam machte, die jedoch bei ihrer Untersuchung dieses Falles bloss unendlich kleine Hauptdilatationen voraussetzen, indem stets schon solche Glieder, die bezüglich dieser Dilatationen von zweiter Ordnung sind, Gliedern erster Ordnung gegenüber

vernachlässigt werden. St. Venant gelangt für diesen Fall¹ zu folgenden aus (4) und (25) leicht deducirbaren Gleichungen für die Dilatation Λ_x in der Richtung der x -Axe und die zugehörige Schiebung M_x

$$\Lambda_x = R_1 - 1 = \sqrt{a_x} - 1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (a_x - 1)$$

$$M_x = \cos(R_2 R_3) = b_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right]$$

und stellt für die lineare Dilatation Λ in jener Richtung, deren ursprüngliche Richtungscosinus l, m, n sind, die aus (2) und (4) resultirende Gleichung auf:

$$\Lambda = \Lambda_x \cdot l^2 + \Lambda_y \cdot m^2 + \Lambda_z \cdot n^2 + M_x \cdot mn + M_y \cdot nl + M_z \cdot lm.$$

Mit Zuhilfenahme dieses Werthes sucht Kirchhoff² unter denselben Voraussetzungen die Componenten der Spannung für ein beliebiges Flächenelement als Functionen der Verschiebungsderivationen zu bestimmen.

Todhunter und Pearson³ bezweifeln die Richtigkeit der von Kirchhoff aufgestellten Gleichungen, erwähnen jedoch in ihrer kritischen Untersuchung nicht den schwerwiegendsten Irrthum Kirchhoff's, der darin besteht, dass Kirchhoff (wie dies die Vergleichung der Gleichungen auf S. 769² mit jener auf S. 766² sofort zeigt) die Richtungscosinus der Hauptdilatationsrichtungen in ihrer anfänglichen Lage (die im ersten Theile dieser Abhandlung durch $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z \dots$ bezeichnet

¹ St. Venant, *Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité et sur les conditions de leur résistance*, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très-petits. *Comptes rendus*, vol. XXIV (1847), p. 260—263. (Siehe auch Moigno, *Statique*, p. 670 und Todhunter and Pearson, *A History of the Theory of Elasticity* (Cambridge, 1886—1893) vol. I, p. 864—867.

² Kirchhoff, *Über die Bedingungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile*. Diese Sitzungsber., Bd. IX (1852), S. 762—773.

³ Todhunter and Pearson, l. c., vol. II, part II, p. 50—53.

wurden) mit den Richtungscosinus der Hauptdruckaxen, d. i. der Richtungen der Hauptdilatationen in ihrer schliesslichen Lage (die von mir durch $\alpha'_x, \alpha'_y, \alpha'_z \dots$ bezeichnet wurden) identificirt, wodurch stillschweigend vorausgesetzt ist, dass das betrachtete Körperelement keine Drehung erfahren hat, oder dass mit anderen Worten die stattgehabte Deformation eine reine (rotationslose) Deformation ist, während die ganze Untersuchung geradezu bezweckt, den gegentheiligen Fall einer endlichen Drehung des Körperelements zu behandeln, indem zwar die Hauptdilatationen als unendlich klein, jedoch mit dieser Einschränkung die Verschiebungsderivationen als beliebige endliche Grössen vorausgesetzt sind.

Um die Componenten $X_x X_y \dots$ der Spannung für einen beliebigen Werth des Rotationswinkels ϑ , und zwar mit einer Genauigkeit, die sich bis auf Glieder erstreckt, die bezüglich der Hauptdilatationen, also auch bezüglich irgend einer Dilatation und irgend einer Schiebung von zweiter Ordnung ist, zu bestimmen, müsste man etwa von der bis auf solche Glieder der dritten Ordnung genauen und für einen jeden Werth des Winkels ϑ giltigen Gleichung (23) für die Potentialfunction f ausgehen, deren letztes Glied sich übrigens noch in verschiedener anderer Form darstellen lässt. So ist z. B. die Summe aus den ersten vier Gliedern innerhalb der letzten Klammer

$$5\varpi^3 + 24\varpi^2 - 12s\varpi + 8\nu^2 = 6\varpi^2 - 16\nu^2 + 16\nu^3 \quad (36)$$

und zwar bis auf Glieder dritter Ordnung genau, wie dies die Einsetzung der Werthe (9) sofort lehrt.

Führt man nun den Werth von f aus (23), welcher ausser der Potentialconstanten A_0 , die bei den auszuführenden Differentiationen aus der Rechnung hinausfällt, nur die drei Elasticitätsconstanten A_1, A_2, A_3 enthält, in die allgemein giltigen Gleichungen (20) des ersten Theiles ein, so erhält man jene Werthe der Spannungscomponenten, die für einen jeden Werth des Rotationswinkels ϑ , also auch für endliche Werthe der Verschiebungsderivationen $\lambda_x, \mu_x, \nu_y \dots$, jedoch nur für solche Deformationen giltig sind, für welche man bei der Berechnung der Spannungen von Gliedern absehen kann,

die bezüglich der Dilatationen und der Schiebungen von der dritten oder einer höheren Ordnung sind. Da nämlich die in der Potentialfunction f in (23) vorkommenden drei Variablen σ , s und v , wie dies die Gleichungen (9) lehren, von derselben Grössenordnung sind, wie die Hauptdilatation $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, und da f eine rationale ganze Function dieser Variablen s, σ und v ist, die bis auf Glieder dritter Ordnung genau ist, so reicht der Grad der Genauigkeit der drei Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \sigma}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial v}$ nur bis auf Glieder zweiten Grades, und zwar ist, wenn man den Werth aus der letztgefundenen Gleichung (36) einsetzt,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 (3\sigma + 4) + \frac{1}{2} A_3 (3\sigma + 2) \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= -A_2 - A_3 \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= 2A_3 (3v^2 - 2v + 1) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Beachtet man die strengrichtigen Werthe in (25) und (26), so ersieht man aus den gleichfalls strengrichtigen Gleichungen (6) und (3), wie σ, s und v durch die Verschiebungsderivationen $\lambda_x, v_z, \mu_y \dots$ auszudrücken sind. Es lassen sich also auch $\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_x}, \frac{\partial s}{\partial \lambda_x} \dots$, sonach auch die in den Gleichungen (20) des ersten Theiles vorkommenden Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_x} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda_x},$$

ebenso $\frac{\partial f}{\partial v_z}, \frac{\partial f}{\partial \mu_y}$ u. s. w. leicht bestimmen und die derart bestimmten Grössen nach Einsetzung der bezüglich der Dilatationen nur bis auf Glieder der zweiten Ordnung genauen Werthe (37) in die allgemeinen Gleichungen (20) des ersten Theiles dieser Abhandlung die Spannungscomponenten berechnen. Man gelangt schliesslich auf diese Weise zu folgenden, für jeden Werth des Drehungswinkels ϑ , also auch für endliche Werthe von $\lambda_x, v_z \dots$ giltigen, jedoch bezüglich der Dilatationen nur bis auf Glieder der zweiten Ordnung genauen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 X_x &= [A_1 + A_2(3\sigma + 4) + A_3(3\sigma + 2)] \cdot \frac{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2}{D} - \\
 &\quad - 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{s + 3 - (A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2)}{D} + 2A_3(3\nu^2 - 2\nu + 1) \\
 Y_y &= [A_1 + A_2(3\sigma + 4) + A_3(3\sigma + 2)] \cdot \frac{a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2}{D} - \\
 &\quad - 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{s + 3 - (A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2)}{D} + 2A_3(3\nu^2 - 2\nu + 1) \\
 Z_z &= [A_1 + A_2(3\sigma + 4) + A_3(3\sigma + 2)] \cdot \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2}{D} - \\
 &\quad - 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{s + 3 - (A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2)}{D} + 2A_3(3\nu^2 - 2\nu + 1) \\
 Y_z = Z_y &= [A_1 + A_2(3\sigma + 4) + A_3(3\sigma + 2)] \cdot \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}}{D} + \\
 &\quad + 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{A_{12}A_{13} + A_{22}A_{23} + A_{32}A_{33}}{D} \\
 Z_x = X_z &= [A_1 + A_2(3\sigma + 4) + A_3(3\sigma + 2)] \cdot \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}}{D} + \\
 &\quad + 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{A_{13}A_{11} + A_{23}A_{21} + A_{33}A_{31}}{D} \\
 X_y = Y_x &= [A_1 + A_2(3\sigma + 4) + A_3(3\sigma + 2)] \cdot \frac{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}}{D} + \\
 &\quad + 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} + A_{31}A_{32}}{D}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

In diese Gleichungen sind die durch (25) und (26) bestimmten Werthe von $a_{11}, a_{12}, \dots, A_{11}, A_{12}, \dots$ und die Werthe von σ, s, ν und D aus (6) und (3) einzuführen.

Beachtenswerth ist, dass auch diese Gleichungen (38) nicht mehr Elasticitätsconstanten enthalten, als die in beschränkterem Masse giltigen Gleichungen (34), nämlich nur die drei Elasticitätsconstanten A_1, A_2 und A_3 .

Über die innere Reibung der Lösungen

von

Dr. Gustav Jäger.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1894.)

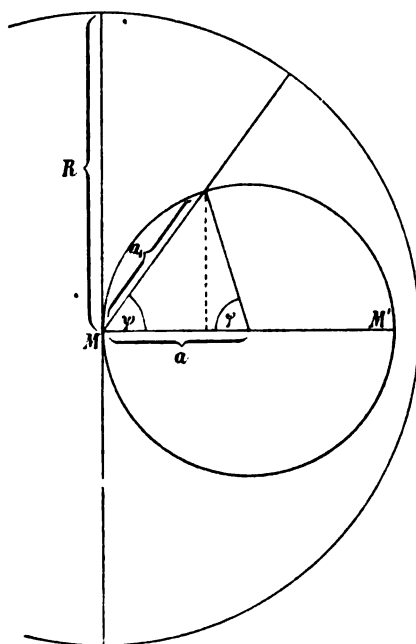
In der Abhandlung »Über die kinetische Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten«¹ habe ich gezeigt, dass der Reibungscoefficient durch die Formel

$$\mu = \frac{2r^2\rho c}{3\lambda}$$

gegeben ist, wobei r der Radius, c die Geschwindigkeit, λ die mittlere Weglänge einer Molekel und ρ die Dichte der Flüssigkeit ist. Um λ zu finden, hatten wir die mittlere Weglänge eines Punktes in einer Kugel zu suchen, welche dem zur Bewegung der Molekel freien Raum eingeschrieben ist. Wir gingen dabei so vor, dass wir annahmen, eine unendlich grosse Zahl von Punkten sei auf der Kugeloberfläche gleichmässig vertheilt, und es kommen auf die Flächeneinheit N_1 Punkte. Dann ist die Zahl sämmtlicher in Betracht kommenden Punkte $4\pi a^2 N_1$. Die Entfernung zweier beliebiger Punkte ist gegeben durch $a \sqrt{2(1-\cos\varphi)}$, wenn a der Radius der Kugel und φ der Winkel der Radien ist, welche zu den beiden Oberflächenpunkten gehören. Wir nahmen dann weiter an, dass die Gesamtzahl der Wege, welche dieselbe Länge haben, durch die Grösse $2\pi a^2 N_1 \sin\varphi d\varphi$ gegeben sei. Das ist aber, wie wir im Folgenden sehen werden, nicht strenge richtig, wesshalb wir den Ausdruck für die mittlere Weglänge von Neuem ableiten wollen.

¹ Wien. Ber. CII, S. 253 ff.

Wir müssen annehmen, dass alle Wege, welche der bewegliche Punkt von einem Punkte der Oberfläche der Kugel aus nehmen kann, nach allen Richtungen des Raumes gegen das Innere der Kugel gleich wahrscheinlich sind. Ist daher M (siehe die Figur) der Punkt, für welchen wir den mittleren Weg, den er in der Kugel vom Radius a zurücklegen wird, berechnen wollen, so haben wir sämtliche Sehnen a_1 , welche von M ausgehen, bezüglich ihrer Länge zu addiren und durch die Zahl



derselben zu dividiren. Diese Sehnen müssen gleichmässig im Raume vertheilt sein, mithin die Oberfläche einer Kugel, welche wir um M als Mittelpunkt schlagen, in gleichmässig vertheilten Punkten treffen. Der Radius dieser Kugel sei R , MM' ein Durchmesser der anderen Kugel. Der Winkel ψ , welchen eine beliebige Bewegungsrichtung mit MM' einschliesst, steht dann mit φ in der Beziehung $2\psi + \varphi = \pi$. Nennen wir nun wiederum die Zahl der Radien, welche die Flächeneinheit der

Oberfläche der Kugel vom Radius R enthält, N_1 , so ist die Gesamtzahl der in Betracht kommenden Radien $2\pi R^2 N_1$. Die Zahl der Radien, welchen ein bestimmtes a_1 zukommt, ist sodann durch $2\pi R^2 N_1 \sin \psi d\psi$, die Summe aller Weglängen a_1 mithin durch

$$2\pi R^2 N_1 a_1 \sin \psi d\psi = 4\pi R^2 N_1 a \cos \psi \sin \psi d\psi$$

gegeben, indem ja

$$a_1 \sin \psi = a \sin \varphi,$$

also

$$a_1 = a \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = a \frac{\sin 2\psi}{\sin \psi} = 2a \cos \psi$$

ist. Integriren wir die Summe der a_1 von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir die Summe sämtlicher möglichen Weglängen, welche durch $2\pi R^2 N_1$ dividirt, den mittleren Weg ergibt. Wir erhalten mithin

$$\lambda = \frac{4\pi R^2 N_1 a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin \psi d\psi}{2\pi R^2 N_1} = 2a \left[\frac{\sin^2 \psi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a.$$

Berücksichtigen wir nun, dass alle Molekeln in Bewegung sind und führen wir dementsprechend die relative Geschwindigkeit der Molekeln gegen einander, deren Werth $\frac{2}{3}c$ ist, ein, so ergibt sich

$$\lambda = \frac{2}{3}a$$

und, wie sich leicht weiter zeigen lässt,

$$\mu = \frac{2r^2 \rho c}{3\lambda} = \frac{8r^2 \rho c}{9a} = \frac{4r \rho c}{9 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}} \right)},$$

wobei v das Volumen der in Betracht kommenden Flüssigkeit und b der in dem Volumen v wirklich mit Materie erfüllte Raum ist. Diese letzte Formel unterscheidet sich von der ursprünglich abgeleiteten nur darin, dass sie den Zahlenfactor $\frac{2}{3}$ anstatt $\frac{1}{3}$ enthält. Diese beiden Factoren sind aber von derselben Grössenordnung, so dass sich die seinerzeit von uns gemachten Folgerungen vollkommen aufrecht halten lassen. Ja die numerische Rechnung zeigt vielmehr, dass die neue Formel noch günstigere Resultate gibt als die frühere. Wir wollen daher auch fortan unsere Gleichung in der neuen Form gebrauchen.

In der Abhandlung »Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen«¹ habe ich folgenden Satz gefunden und bewiesen:

¹ Wien. Ber. C, S. 512.

»Die Gesamt-, sowie jede Theilenergie des Lösungsmittels wächst mit der Concentration der Lösung derart, dass für gleich viel Molekeln des Gelösten der Energiezuwachs eine constante Grösse ist.« Das hat nun für das Verhalten des Lösungsmittels denselben Effect, als würde die Temperatur in entsprechender Weise erhöht. Will man daher z. B. das Lösungsmittel zum Gefrieren bringen, so ist die Lösung so weit unter den Gefrierpunkt des Lösungsmittels abzukühlen, als eben die Energieerhöhung infolge des Zusatzes von gelöster Substanz ausmacht. Es gibt uns daher die Gefrierpunktserniedrigung unmittelbar einen Aufschluss über die Energievermehrung im Lösungsmittel. Alle Eigenschaften des Lösungsmittels nun, welche Functionen der Temperatur sind, müssen sich mit wachsender Concentration der Lösung derart ändern, als würde die Temperatur des Lösungsmittels immer um den Betrag der Gefrierpunktserniedrigung erhöht. Dabei ist nicht zu vergessen, dass sich diese Folgerung nur auf verdünnte Lösungen bezieht. Allerdings ist es nicht leicht, für die verschiedenen Eigenschaften der Flüssigkeiten, die Gefrierpunktserniedrigung ausgenommen, unseren Satz auch experimentell zu bestätigen, da die gelöste Substanz in der Regel noch andere Einflüsse hat als die Energieerhöhung des Lösungsmittels, welche die Wirkung der letzteren oft vollständig verdecken können.

Im Folgenden wollen wir nun untersuchen, inwieweit sich die Energieerhöhung des Lösungsmittels auf die innere Reibung verdünnter Lösungen geltend macht. Nehmen wir vorerst an, wir hätten es nur mit diesem Einfluss zu thun, so können wir folgendermassen schliessen. Da der Reibungscoefficient μ eine Function der Temperatur, also

$$\mu = f(t)$$

ist, so muss der Reibungscoefficient einer Lösung, deren Gefrierpunktserniedrigung Δ ist,

$$\mu_{\Delta} = f(t + \Delta)$$

sein. Entwickeln wir diese Function nach der Taylor'schen Reihe, so

$$f(t + \Delta) = f(t) + \Delta f'(t) + \frac{\Delta^2}{2} f''(t) + \dots, \quad (1)$$

also

$$\mu - \mu_1 = -\Delta f'(t) - \frac{\Delta^2}{2} f''(t) - \dots \quad (2)$$

Daraus können wir ohneweiters folgern: Sind die sonstigen Einflüsse der gelösten Substanz gegenüber der Energieerhöhung zu vernachlässigen, so ist der Unterschied zwischen der inneren Reibung des Lösungsmittels und der Lösung durch die Gleichung (2) gegeben. Sind z. B. $f'(t)$, $f''(t)$. . . nur positive Grössen, was zur Folge hätte, dass μ mit der Temperatur wächst, so muss $\mu_1 > \mu$, die innere Reibung der Lösung immer grösser als die des Lösungsmittels sein. Sind hingegen die Differentialquotienten sämtlich negativ, so würde folgen, dass die innere Reibung der Lösung immer kleiner als die des Lösungsmittels sein muss. Im Allgemeinen werden wir natürlich sowohl positive als negative Differentialquotienten haben. Je nachdem dann das eine oder andere Glied überwiegt, muss die Reibung der Lösung grösser oder kleiner als die des Lösungsmittels sein. Da wir nur verdünnte Lösungen untersuchen, so ist Δ nicht gross, wir können daher unsere unendliche Reihe immer auf die ersten Glieder beschränken.

Betrachten wir nun unsere eingangs erwähnte Formel

$$\mu = \frac{4r\rho c}{9\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)},$$

welche für eine reine Flüssigkeit gilt, so können wir dieselbe in erster Annäherung für verdünnte Lösungen etwa in der Form

$$\mu = r\rho\varphi(t)$$

schreiben, in dem ja die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln c , sowie das Verhältniss der Volumina $\frac{b}{v}$ Functionen der Temperatur t sind, für welche wir den Einfluss der gelösten Substanz, insoferne er noch ein anderer, als der der Energieerhöhung ist, vernachlässigen können. Auch die Änderung des ρ brauchen wir in zweierlei Beziehung nicht zu berücksichtigen; einmal, weil wir es bloss mit verdünnten Lösungen, deren Dichte

sich also wenig von jener des Lösungsmittels unterscheidet, zu thun haben, dann aber auch bezüglich der Temperaturerhöhung, da die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten eine kleine und die Energieänderung des Lösungsmittels selbst nur einer Temperaturerhöhung um Δ entspricht. Es bleibt uns also nur noch der Einfluss, welchen der Radius r der Molekel der gelösten Substanz auf die innere Reibung ausübt, und der ist allerdings nicht zu vernachlässigen. Bedenken wir nämlich, dass der Vorgang der Lösung seine Ursache in bedeutenden Anziehungskräften hat, welche die Molekeln des Lösungsmittels und der gelösten Substanz auf einander ausüben — es muss ja die Cohäsion des Gelösten vollständig überwunden werden — so werden wir annehmen müssen, dass sich die Molekeln des Gelösten nicht frei in der Lösung bewegen können, sondern dass sie immer von einer Schichte der Molekeln des Lösungsmittels umgeben sind, die sich mit der eingehüllten Molekel in derselben Richtung bewegen, so dass es die Wirkung hat, als hätten die Molekeln des Gelösten einen erheblich grösseren Durchmesser als jene des Lösungsmittels. Nun geht aber aus der Formel für die innere Reibung hervor, dass mit wachsendem Durchmesser der Molekeln der Reibungscoëfficient proportional wächst, so dass μ_1 durch diesen Einfluss immer grösser ausfallen muss als nach der Gleichung (1) folgen würde. Wir können daher auch Gleichung (2) nicht aufrecht halten, sondern wir müssen sie in die Ungleichung

$$\mu - \mu_1 \leq -\Delta f'(t) - \frac{\Delta^2}{2} f''(t) - \dots$$

umwandeln. Je kleiner die Geschwindigkeit der Molekeln des Lösungsmittels ist, d. h. je träger sie sich bewegen, umso fester werden sie an den Molekeln des Gelösten haften, umsomehr wird $\mu - \mu_1$ von der rechten Seite unserer Ungleichung abweichen. Dies ist demnach der Fall, je tiefer die Temperatur ist. Mit wachsender Temperatur muss sich hingegen unsere Ungleichung immer mehr einer Gleichung nähern, vorausgesetzt natürlich, dass unsere Lösung so verdünnt ist, dass der sodann noch vorhandene Einfluss der Molekeln des Gelösten auf die innere Reibung vernachlässigt werden kann. Inwieweit dieses

theoretische Resultat mit den Beobachtungen übereinstimmt, wollen wir an einer Reihe wässriger Lösungen im Folgenden nachweisen.

Um den Reibungscoëfficienten des Wassers als Function der Temperatur darzustellen, benützte ich die Angaben von Sprung.¹ Derselbe berechnete jedoch nicht die absoluten Werthe der inneren Reibung, sondern gibt bloss die auf dieselbe Druckdifferenz reducirten Ausflusszeiten gleicher Volumina der Flüssigkeiten an, welche ein enges Rohr passiren. Was wir also im Folgenden mit μ bezeichnen werden, sind lediglich relative Werthe. Aus den beobachteten μ bei 0°, 10°, 30° und 50° wurde die Formel

$$\mu = 649 \cdot 2 - 21 \cdot 17 t + 0 \cdot 4079 t^2 - 0 \cdot 00326 t^3$$

abgeleitet. Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, welche Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen der inneren Reibung vorkommen.

t	μ berechnet	μ beobachtet
0°	649·2	649·2
5	553·2	551·3
10	475·0	475·0
15	412·4	414·5
20	362·9	365·0
25	324·0	327·6
30	293·2	293·1
35	268·1	264·6
40	246·4	240·8
45	225·4	220·5
50	203·0	202·8

Vollkommen genau gibt also unsere Formel die Beobachtungen nicht wieder, doch genügt sie für unsere Zwecke vollkommen. Setzen wir $\mu = f(t)$, so wird

$$f'(t) = -21 \cdot 17 + 0 \cdot 8158 t - 0 \cdot 00978 t^2$$

$$f''(t) = 0 \cdot 8158 - 0 \cdot 01956 t$$

$$f'''(t) = -0 \cdot 01956$$

$$f^{IV}(t) = f^V(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0,$$

¹ Pogg. Ann., Bd. 159, S. 8 (1876).

mithin

$$\mu - \mu_{\Delta} \leq (21.17 - 0.8158t + 0.00978t^2) \Delta - (0.4079 - 0.00978t) \Delta^2 + 0.00326 \Delta^3$$

Ist Δ sehr klein, d. h. nehmen wir eine verdünnte Lösung, so können wir die rechte Seite unserer Ungleichung auf's erste Glied beschränken, zumal auch der Factor von Δ^2 , den wir B nennen wollen, viel kleiner als A , der Factor von Δ , ist. A und B nehmen für die verschiedenen Temperaturen folgende Werthe an:

t	A	B
0°	21.17	0.409
5	17.97	0.359
10	14.97	0.310
15	12.18	0.261
20	9.59	0.212
25	7.20	0.163
30	5.02	0.115
35	3.04	0.066
40	1.27	0.018
45	— 0.30	— 0.032
50	— 1.67	— 0.081

Ziehen wir also, wie vorausgesetzt, nur verdünnte Lösungen in Betracht, so wird die rechte Seite unserer Gleichung bei 0° immer positiv sein, sodann mit steigender Temperatur immer mehr und mehr abnehmen, zwischen 40° und 50° durch den Nullpunkt gehen und negativ werden. Für sehr verdünnte Lösungen liegt der Nullpunkt etwa bei 44°. Das heisst aber: Nur unterhalb dieser Temperatur, für welche unser Ausdruck 0 wird, kann $\mu_{\Delta} < \mu$ sein, weil nur unterhalb dieser Temperatur $\mu - \mu_{\Delta}$ einen positiven Werth annehmen kann. Ferner ist der Betrag, um welchen μ_{Δ} höchstens kleiner als μ sein kann, durch unsere Ungleichung für jede Temperatur bestimmt. Ich halte es nun für wichtig zu untersuchen, ob thatsächlich unsere theoretischen Folgerungen mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Wir haben demnach unser Augenmerk in erster Linie auf jene Lösungen zu richten, deren innere Reibung kleiner als jene

des reinen Wassers ist, da ja von den übrigen ohne weiters unsere Ungleichung erfüllt erscheint. Sprung gibt folgende acht Salze an, für welche er bei niedrigen Temperaturen die Zähigkeit der Lösung geringer als jene des Wassers fand: KCl , KBr , KJ , KNO_3 , NH_4Cl , NH_4Br , NH_4NO_3 , KClO_3 . Von diesen Lösungen habe ich alle mit Ausnahme des chlorsauren Kali auf meine Formel geprüft und die diesbezüglichen Resultate in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Das chlorsaure Kali schenkte ich mir desshalb, weil seine Lösungen selbst bei den niedrigen Temperaturen eine nur wenig unter jener des Wassers liegende Zähigkeit zeigen, während dieselbe bei 30° schon grösser als jene des Wassers ist, so dass es zur Bestätigung unserer Regel einer besonderen Berechnung dieser Lösung nicht bedarf.

Die folgenden Tabellen enthalten in der ersten Zeile den Namen, die Formel und das Moleculargewicht des gelösten Salzes, in der zweiten den Procentgehalt, das specifische Gewicht, die im Liter gelöste Zahl der Gramme, sowie der Grammmolekeln (Mol.) und die Gefrierpunktserniedrigung Δ . Dieselbe wurde unter der Voraussetzung berechnet, dass die Salze in der Lösung vollkommen dissociirt sind, und dass nach Raoult eine Grammmolekel im Liter den Gefrierpunkt um 1.85°C . herabsetzt. Die Annahme vollständiger Dissociation ist mit grosser Annäherung desshalb gestattet, weil für ein jedes Salz immer bloss die verdünnteste der von Sprung untersuchten Lösungen in Rechnung gezogen wurde. Die mit D bezeichnete letzte Spalte der Tabellen enthält den berechneten grössten Werth, welchen die Differenz $\mu - \mu_\Delta$ annehmen kann.

Chlorammonium NH_4Cl (53.5).

3.67% , $s = 1.011$, $37.1 \text{ g} = 1.386 \text{ Mol}$. $\Delta = 2.56$.

t	μ_Δ	$\mu - \mu_\Delta$	D
0°	613.8	35.4	51.6
5	532.0	19.3	43.7
10	463.9	11.1	36.2
20	361.8	3.2	23.2
30	292.0	1.1	17.4
40	244.0	-3.2	3.2
50	207.1	-4.3	-3.6

Bromammonium NH_4Br (98).

15.970%, $s = 1.0954$, $174.8\text{ g} = 3.56\text{ Mol. } \Delta = 6^\circ 58$.

t	μ_1	$\mu - \mu_1$	D
0°	540.9	108.3	122.4
5	477.5	73.8	103.5
10	423.8	51.2	86.2
15	379.0	35.5	69.6
20	340.6	24.4	54.6
25	308.5	19.1	41.2
30	281.0	12.1	28.9
40	237.2	3.6	8.4
50	205.0	— 2.2	— 6.7

Ammoniumnitrat NH_4NO_3 (80).

5.9750%, $s = 1.026$, $61.29\text{ g} = 1.532\text{ Mol. } \Delta = 2^\circ 84$.

10°	452.4	22.6	40.0
20	354.1	10.9	25.6
30	287.9	5.2	13.4
40	239.8	1.0	3.5
50	205.6	— 2.8	— 3.9

Chlorkalium KCl (74.5).

10.230%, $s = 1.068$, $109.2\text{ g} = 2.93\text{ Mol. } \Delta = 5^\circ 42$.

5°	519.8	31.5	87.7
10	454.8	20.2	75.6
15	405.3	9.2	61.8
20	362.8	2.2	49.3
25	326.4	1.2	37.8
30	299.0	— 5.9	27.4
40	252.5	— 11.7	9.9
50	215.1	— 12.3	3.2

Bromkalium KBr (119).

14·023%, $s = 1·109$, 155·51 g = 2·61 Mol., $\Delta = 4^{\circ}83$.

t	μ_{Δ}	$\mu - \mu_{\Delta}$	D
5°	501·1	50·2	78·6
10	439·7	35·3	65·3
20	353·4	11·6	41·7
30	291·3	1·8	22·0
40	243·8	— 3·0	6·0
50	209·1	— 6·3	— 6·0

Jodkalium KJ (166).

8·419%, $s = 1·0661$, 89·8 g = 1·082 Mol., $\Delta = 2^{\circ}000$.

5°	516·1	35·2	34·5
10	450·2	24·8	28·7
15	399·2	15·3	23·4
20	354·8	10·2	18·3
25	316·0	11·6	13·7
30	285·8	7·3	9·8
40	238·3	2·5	2·5
50	203·7	— 0·9	— 3·0

Kaliumnitrat KNO₃ (101).

6·316%, $s = 1·040$, 65·68 g = 1·30 Mol., $\Delta = 2^{\circ}41$.

10°	460·0	15·0	34·2
20	360·5	4·5	21·8
30	290·1	3·0	11·4
40	242·6	— 1·8	2·9
50	206·7	— 3·9	— 3·5

Ein Blick auf unsere Tabellen zeigt uns sofort, dass besonders bei den niedrigeren Temperaturen $\mu - \mu_{\Delta}$ immer erheblich kleiner als D ist, dass mit wachsender Temperatur diese beiden Grössen einander näher rücken und schliesslich gleich werden. Kommen irgendwo Abweichungen vor, so sind sie immer so unerheblich, dass sie vollständig innerhalb der Fehler-

grenzen liegen. Ist ja unsere Temperaturformel für die innere Reibung des Wassers nur angenähert richtig. Ferner müssen wir noch überlegen, dass auch unsere Lösungen selbst noch lange nicht das Ideal einer verdünnten Lösung repräsentieren. Enthält ja die KBr-Lösung 14% und die NH_4Br -Lösung sogar 16% an gelöster Substanz.

Alle Folgerungen, welche Sprung aus seinen Beobachtungen zieht, finden wir im Einklang mit unserer auf theoretischem Wege ermittelten Ungleichung. Als Typus der oben genannten Salzgruppe führt er das Chlorammonium an und stellt folgende drei Sätze auf:

»1. Bei niedrigen Temperaturen vermindert, bei höheren Temperaturen vergrößert das Chlorammonium die Zähigkeit des Wassers, und zwar beides in umso höherem Grade, als die Lösung concentrirter ist.

2. Die Temperatur, bei welcher Wasser und Salzlösung gleiche Zähigkeit zeigen, liegt umso höher, je geringer die Concentration der Lösung ist.

3. Es fällt das Minimum der Zähigkeit auf eine umso geringere Concentration, je höher die Temperatur ist.«

In der That folgt aus der rechten Seite unserer Ungleichung ohne weiters, dass die Verminderung der Zähigkeit bei niedrigeren Temperaturen, die Vermehrung derselben bei höheren umso grösser sein muss, je grösser Δ , d. h. die Concentration ist.

Bezüglich des zweiten Satzes haben wir zu untersuchen, für welche Temperaturen bei abnehmendem Δ die Differenz der inneren Reibung des Wassers und der Lösung Null wird. Vernachlässigen wir in unserer Ungleichung das Glied mit Δ^3 , so finden wir für den vorliegenden Fall

$$(21 \cdot 17 - 0 \cdot 8158t + 0 \cdot 00978t^2) \Delta - (0 \cdot 4079 - 0 \cdot 00978t) \Delta^2 = 0,$$

woraus folgt

$$\Delta = \frac{21 \cdot 17 - 0 \cdot 8158t + 0 \cdot 00978t^2}{0 \cdot 4079 - 0 \cdot 00978t} = 51 \cdot 9 - 0 \cdot 756t + 0 \cdot 0059t^2,$$

indem wir die höheren Glieder vernachlässigen können. Dieser Ausdruck nimmt mit wachsendem t bis gegen 64° beständig ab, was dem zweiten Satze von Sprung entspricht.

Suchen wir jene Beziehung zwischen t und Δ , für welche μ_Δ ein Minimum wird, so haben wir die Gleichung (1) nach Δ zu differenzieren und den Differentialquotienten gleich Null zu setzen. Also

$$\frac{d\mu_\Delta}{d\Delta} = f'(t) + \Delta f''(t) = 0,$$

indem wir die höheren Glieder wieder vernachlässigen können. Führen wir die Zahlenwerthe ein, so ergibt dies

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_\Delta}{d\Delta} = -21 \cdot 17 + 0 \cdot 8158 t - 0 \cdot 00978 t^2 + \\ + (0 \cdot 8158 - 0 \cdot 01956 t) \Delta = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter

$$\Delta = 25 \cdot 95 - 0 \cdot 3778 t + 0 \cdot 00293 t^2.$$

Auch aus dieser Gleichung ergibt sich eine Abnahme des Δ mit wachsendem t bis gegen 64° , so dass auch der dritte Sprung'sche Satz in unserer Theorie enthalten ist.

Es bestätigt sich also unsere Ansicht von Neuem, dass der Zusatz des Gelösten die Energie des Lösungsmittels in der Weise erhöht, dass es die Wirkung hat, als würde die Temperatur des Lösungsmittels in entsprechender Weise gesteigert.

Von einem ganz anderen Standpunkt aus beurtheilt Arrhenius die innere Reibung der Lösungen. In seiner Abhandlung »Über die innere Reibung verdünnter, wässriger Lösungen«¹ sagt er: »Bei der Discussion der Verhältnisse, die bei der Elektrizitätsleitung in Elektrolyten stattfinden, bin ich zu der Ansicht geführt worden, dass die Moleküle eines Elektrolyten von zwei verschiedenen Arten sind, active und inactive. (Die Moleküle eines Nichtelektrolyten sind dagegen alle inactiv.) Die activen Moleküle sind so constituirt, dass ihre Ionen dem von der Clausius-Williamson'schen Hypothese geforderten freien Bewegungszustand genügen, oder mit anderen Worten, die activen Moleküle sind factisch als dissociirt anzusehen. Da die Reibung nach aller Wahrscheinlichkeit mit der Zusammengesetztheit der reibenden Theile wächst, so dürfte es nicht mehr

¹ Zeitschrift für physik. Chemie, I, S. 285 ff.

befremdend erscheinen, dass active (d. h. in Ionen gespaltete) Moleküle unter Umständen eine kleinere Reibung erleiden, als inactive (nicht gespaltete). Wenn man näher nachsieht, so sind es auch nur diejenigen Salze, die am allerbesten leiten (d. h. die die relativ grösste Anzahl von activen Molekülen enthalten), welche die innere Reibung des Wassers verkleinern. In den Lösungen von diesen Salzen würde also eine so grosse Menge von activen Molekülen vorkommen, dass ihre verringernde Einwirkung auf die innere Reibung die vergrössernde Einwirkung der gleichzeitig vorkommenden inactiven Moleküle überwindet. Eine Stütze für diese Anschauung findet sich darin, dass auch Lösungen von diesen Salzen bei grösseren Concentrationen grössere innere Reibung als das Wasser selbst haben. Bei zunehmender Concentration wächst nämlich die Anzahl der inactiven Moleküle auf Kosten der activen.

Da alle Salze in äusserster Verdünnung in lauter active Moleküle zerfallen, so ist es nicht undenkbar, dass alle Salze (wenigstens diejenigen, deren Ionen ziemlich einfach sind) in äusserst kleinen Zusätzen die innere Reibung des Wassers verkleinern.«

Ich kann mich dieser Anschauung nicht anschliessen. Einmal, weil ich nicht einsehe, wesshalb der Einfluss des Gelösten verschiedener Natur sein soll, wenn die Molekeln als Ionen oder nicht dissociirt auftreten. Die Spaltung der Molekeln in Ionen hat lediglich den Erfolg, dass die Zahl der gelösten Molekeln vergrössert erscheint und daher eindementsprechender Einfluss auf die verschiedenen Eigenschaften des Lösungsmittels (Gefrierpunktserniedrigung, Dampfspannungserniedrigung, osmotischer Druck etc.) ausgeübt wird. Wie mangelhaft die Unterscheidung von activen und inactiven Molekeln für den Fall der inneren Reibung ist, zeigt eine Anmerkung, welche Arrhenius in seiner Abhandlung S. 298 anbringt. Er sagt daselbst: »Ich habe gefunden, dass Lösungen in Äthylalkohol von kleinen Mengen von Methylalkohol, Aceton oder Äthyläther eine geringere innere Reibung als der Äthylalkohol selbst haben.« Nach unserer Betrachtungsweise kann uns ein derartiges Resultat nicht überraschen, da unsere Theorie mit der Dissociation gar nichts zu thun hat.

In zweiter Linie ist für mich das Verhalten der inneren Reibung der Lösungen bei höheren Temperaturen massgebend, Arrhenius Theorie nicht anzunehmen. Wären thatsächlich die sogenannten activen Molekeln die Ursache der Verminderung der inneren Reibung, so müsste das umso mehr der Fall sein, je höher die Temperatur der Lösung ist, da ja der Grad der Dissociation mit wachsender Temperatur zunimmt. Nun zeigt sich aber im Gegentheil, dass schon bei 50° die innere Reibung einer jeden Lösung grösser ist als jene des reinen Wassers bei derselben Temperatur.

Damit erscheint mir der Vorzug meiner Anschauungsweise zur Genüge klar gelegt.

Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten

(II. Mittheilung)

von

Prof. Dr. O. Tumlirz in Czernowitz.

(Mit 1 Textfigur.)

Es wurde schon in meiner ersten Mittheilung¹ hervorgehoben, dass, wenn eine unterkühlte Flüssigkeit durch einen festen Krystall zum Erstarren gebracht wird, die Gleichgewichtsstörung zu ihrer Ausbreitung Zeit braucht. Ich habe nun diese zeitliche Ausbreitung, besonders in ihrer Abhängigkeit von dem Grade der Unterkühlung, d. i. von der Differenz zwischen der Temperatur der unterkühlten Flüssigkeit und ihrem Schmelzpunkt, näher ins Auge gefasst, um auf diesem Wege die Natur der Unterkühlung näher kennen zu lernen.

Was die Wahl der Substanzen anbelangt, so sollen zunächst solche Substanzen untersucht werden, welche kein Krystallwasser enthalten, weil bei den krystallwasserhaltigen Substanzen das Krystallwasser die Erscheinung in einer uns noch unbekannten Weise complicirt. Da das Wasser die nächstliegende Substanz ist, so habe ich zuerst die Erstarrungsgeschwindigkeit des unterkühlten Wassers gemessen.

Der Apparat bestand im Wesentlichen aus einer dünnwandigen Glasröhre, welche 595 *mm* lang, 18 *mm* weit und an dem einen Ende zugeschmolzen war. Der Stopfen hatte zwei Bohrungen; in der einen sass ein langes, in Zehntelgrade getheiltes und wohlgeprüftes Thermometer, dessen Gefäss sich in der Mitte der Wassersäule befand. Um die Hundertstel noch

¹ Diese Sitzungsber., Bd. C, Abth. II. a, December 1891, S. 1219.

sicher schätzen zu können, wurde vor dem Thermometer eine Linse von 235 *mm* Brennweite so aufgestellt, dass das Thermometer sich gerade in der Brennebene befand, und hinter die Linse ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr gebracht. Die zweite Bohrung des Stopfens diente dazu, um in das unterkühlte Wasser, ohne mit dem Stopfen zu rühren, das die Unterkühlung auslösende Eisstückchen fallen zu lassen. Bedeckt war das Wasser mit einer ungefähr 4 *mm* dicken Schichte Terpentinöl.

Die beschriebene Glasröhre sass in dem Stopfen einer dickwandigen Glasröhre, welche um einige Centimeter länger und 44 *mm* weit war. Diese weitere Glasröhre war unten verschlossen und ganz mit Terpentinöl gefüllt. Der Zweck dieser Vorrichtung war der, sowohl die Temperatur der Wassersäule viel gleichmässiger zu machen, als auch die Wassersäule während des Versuches vor einer Erwärmung durch den Athem zu schützen. Die weitere Röhre war in einem eisernen Träger festgeklemmt.

An der Glasröhre, welche das Wasser enthielt, befanden sich zwei feine, kreisförmige Marken, deren Ebenen zu der Röhrenachse senkrecht waren. Die erste Marke befand sich 4 *cm* unter dem Wasserspiegel und die zweite am Ende der Röhre, so dass der Abstand = 501·0 *mm* war. Fällt nämlich auf die Oberfläche des unterkühlten Wassers ein sehr kleines Eisstückchen, so tritt dort die Erstarrung ein. Es ist nun sehr schwer, den Zeitpunkt zu bestimmen, in dem gerade die Erstarrung beginnt, verfolgt man aber die Fortpflanzung der Erstarrung, so ist es sehr leicht, den Zeitpunkt zu bestimmen, in dem die Erstarrung durch eine solche Marke hindurchtritt.

Zur Messung der Zeit benützte ich in Ermangelung eines Secundenpendels ein gut gehendes Metronom, welches so eingestellt wurde, dass die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schlägen (wie eine lange Beobachtungsreihe ergab) = 0·9869 Sekunden war.

Die Unterkühlung wurde ausgeführt in einem kleinen exponirt liegenden Zimmer meines Laboratoriums, welches den ganzen Winter hindurch nicht geheizt wurde. Die Zimmertemperatur nahm, als das Frostwetter eintrat, stetig, aber ausser-

ordentlich langsam ab, so dass sie, namentlich am Vormittag, durch einige Stunden hindurch constant war.

Ich hätte gern die Untersuchung bis -10° C. ausgedehnt, aber leider erstarrte das Wasser zweimal bei etwas weniger als -6° C. von selbst. Dieser Umstand ist mir ganz räthselhaft, da ich früher wiederholt Wasser in Glaskolben bis ungefähr -10° C. unterkühlen konnte, worauf dann allerdings die Erstarrung von selbst eintrat. Möglicherweise ist daran die Beschaffenheit des Glases schuld.

In der folgenden Tabelle bedeuten t die Temperatur in Celsiusgraden, Z die Zeit in Sekunden, während welcher die Erstarrung von der ersten Marke bis zur zweiten fortschritt, und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ausgedrückt in Millimeter und Sekunden.

t	Z	V	t	Z	V
-0.74	1372	0.37	-2.71	86.8	5.77
-1.12	347.5	1.44	-2.90	71	7.06
-1.40	228	2.20	-3.20	67.1	7.47
-1.54	181.6	2.76	-3.49	49	10.23
-1.62	171.7	2.92	-3.64	44.4	11.28
-2.00	151	3.32	-4.14	29.6	16.93
-2.40	111.5	4.49	-4.20	27.6	18.15
-2.54	95.7	5.24	-4.60	22.7	22.07
-2.67	89.8	5.58			

Eine einfache empirische Formel, welche sich den Versuchswerthen in genügender Weise anschliesst, ist

$$V = (a + bt + ct^2) \cdot t^2,$$

wo

$$a = 1.3561, \quad b = 0.3766, \quad c = 0.06726$$

ist und für t die negativen Werthe einzusetzen sind:

Die Versuche führen uns also zu dem Resultate: Die Geschwindigkeit, mit welcher die Erstarrung in dem

unterkühlten Wasser fortschreitet, nimmt mit dem Grade der Unterkühlung stetig und sehr rasch zu.

Es muss erwähnt werden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erstarrung auch bei einer und derselben Temperatur etwas schwanken kann, und zwar hängt dies von der Art und Weise ab, wie sich die Krystalle aneinanderreihen. In vielen Fällen schritt die Erstarrung in einer Schraubenfläche fort und dann war die Fortpflanzungsgeschwindigkeit etwas kleiner. Bei dem ersten der angeführten Versuche ($t = -0.74^\circ \text{C.}$) bildeten die Krystalle eine Art Kette, welche anfangs schraubenförmig gewunden war, dann gerade verlief und sich schliesslich wieder krümmte. Dementsprechend variierte auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit während des ganzen Versuches.

Dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erstarrung mit der Unterkühlung rasch zunimmt, steht mit der in meiner ersten Mittheilung durchgeführten Theorie in gutem Einklang. Nach dieser Theorie besteht eine unterkühlte Flüssigkeit aus lauter Elementarkrystallen, welche gegeneinander alle möglichen Orientirungen haben und welche die Übergangsstufe von dem flüssigen Zustand zu den festen Krystallen bilden. Wird das Wasser von 0° auf $-t^\circ \text{C.}$ unterkühlt und ist $d\mu$ die Masse eines solchen Elementarkrystalles, so hat derselbe bei der Unterkühlung die Wärmemenge

$$d\mu \int_{-t}^0 C dt,$$

oder, wenn wir berücksichtigen, dass hier C sehr nahe $= 1$ ist, die Wärmemenge

$$t d\mu$$

abgegeben. Würde das Wasser auf normalem Wege bei 0°C. zu Eis erstarren, dann würde das Massenelement $d\mu$ die Wärmemenge $\Lambda d\mu$ abgeben, wo Λ die Erstarrungswärme bedeutet. Es hat also der Elementarkrystall in dem unterkühlten Wasser um

$$(\Lambda - t) d\mu$$

mehr Wärme, als in dem festen Eis von 0°C. Die Auslösung der Unterkühlung durch ein Eisstückchen erfolgt nun in der

Weise, dass die anliegenden Elementarkrystalle gleichgerichtet werden. Indem die der Arbeit der richtenden Kräfte gleiche lebendige Kraft sich in Wärme verwandelt, werden, wie in der früheren Abhandlung ausführlich auseinandergesetzt wurde, die gerichteten Elementarkrystalle auf die Temperatur des Schmelzpunktes gehoben, wodurch zwischen ihnen und den noch ungerichteten Elementarkrystallen eine Temperaturdifferenz entsteht, welche t° C. beträgt und zur Folge hat, dass die gerichteten Elementarkrystalle so lange Wärme verlieren, bis sie fest sind.

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Erstarrung fortschreitet, wird also von der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher aus dem unterkühlten Wasser neue Krystalle entstehen, und diese Geschwindigkeit wird wieder abhängen von der Geschwindigkeit, mit welcher die Elementarkrystalle gerichtet werden und von der Raschheit, mit welcher dieselben dann ihre Wärme abgeben.

Ist dm die Masse einer Schichte, welche zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten der Röhre liegt, so wird darin bei der Auslösung der Unterkühlung die Menge

$$-\frac{C}{\Lambda} t dm, \quad \text{oder einfach:} \quad -\frac{t}{\Lambda} dm$$

erstarren. Die Menge der erstarrten Krystalle ist also der Unterkühlung $-t^{\circ}$ proportional. Da durch diese Krystalle die Unterkühlung in der nächsten Schichte ausgelöst wird, so ist die Zahl der richtenden Kräfte proportional der Unterkühlung. Ferner werden diese Kräfte gewiss desto grösser sein, je tiefer die Unterkühlung ist. Denn da die Elementarkrystalle aus dem vollkommen flüssigen Zustand in den vollkommen festen durch allmälige Abgabe der Wärme $\Lambda d\mu$ stetig übergehen, so werden sie dem festen Zustand desto näher liegen, je mehr sie Wärme abgegeben haben, also je grösser die Unterkühlung ist. Ferner kommt in Betracht, dass die Wärmeabgabe der gerichteten Elementarkrystalle desto rascher erfolgt, je grösser die Temperaturdifferenz derselben gegen die noch nicht alterirte unterkühlte Flüssigkeit ist, und schliesslich ist auch die Wärme, welche die gerichteten Elementarkrystalle noch abzugeben

haben, um vollkommen fest zu werden, desto kleiner, je mehr sie schon früher abgegeben hatten, d. h. je tiefer die Unterkühlung ist. Alles zusammengefasst, sehen wir, dass vier Umstände, welche alle in demselben Sinne wirken, die Erstarrung desto rascher herbeiführen, je tiefer die Unterkühlung ist.

Im Anschlusse an das Vorhergehende möchte ich hier noch auf das zurückkommen, was ich in meiner früheren Arbeit (§. 10) über den amorphen Zustand gesagt habe, und möchte daran einige Bemerkungen knüpfen.

Ich habe dort gesagt, dass, wenn eine flüssige Substanz den Grenzzustand der Unterkühlung erreicht hat und dann noch weiter abgekühlt wird, wir daraus einen festen amorphen Körper erhalten. Wir wollen jetzt zunächst die thermische Volumsänderung des Schwefels bei dem constanten Druck einer Atmosphäre betrachten. Der natürliche krystallisierte Schwefel dehnt sich nach Kopp (Liebig's Annalen 93, 1855) sehr ungleichmässig aus, indem die Ausdehnung für steigende Temperaturen, insbesondere in der Nähe des Schmelzpunktes, rasch zunimmt. Kopp gab zwischen $t = 0^\circ$ und $t = 90^\circ$ C. die Formel

$$V_t = 1 + 0.00010458t + 0.0000026588t^2 - 0.000000014673t^3.$$

Ist das Volumen des festen Schwefels bei 0° C. = 1, so ist es bei 115° C.

$$= 1.0956.$$

Beim Schmelzen erfährt das Volumen eine Vergrösserung, so dass das Volumen des flüssigen Schwefels bei 115° C.

$$= 1.1504$$

ist. Was die Ausdehnung des flüssigen Schwefels anbelangt, so fand Kopp dieselbe innerhalb des Temperaturintervalles $126.0 - 151.6^\circ$ C. als gleichförmig, so dass bei t° das Volumen durch

$$V'_t = 1.1504 + 0.000527(t - 115)$$

dargestellt wird. Viel genauer wurde die Ausdehnung des flüssigen Schwefels von Despretz (Compt. rend. VII.) unter-

sucht. Derselbe fand den Ausdehnungscoefficienten

zwischen	110	und	130° C.	=	0·000622
»	110	»	150	=	0·000581
»	110	»	200	=	0·000454
»	110	»	250	=	0·000428,

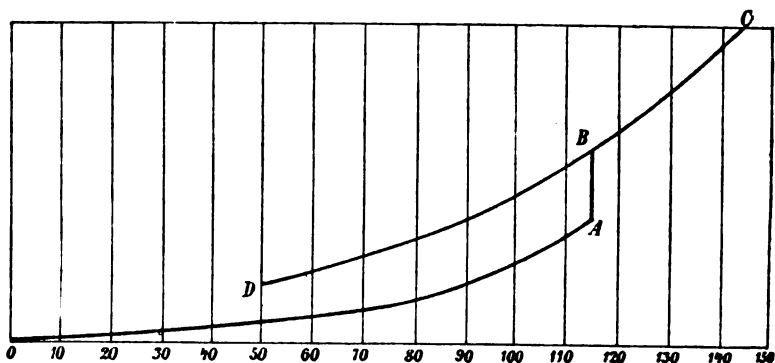
was sich durch die Formel

$$\text{Ausdehnungscoefficient} = 0\cdot001033 - 0\cdot0000035t$$

darstellen lässt. Es hat demnach der flüssige Schwefel bei $t^{\circ}\text{C.}$ das Volumen

$$V'_t = 1\cdot04993 + 0\cdot001085t - 0\cdot00000184t^2.$$

In der beistehenden Figur stellt die Curve zwischen 0° und 115° (bis *A*) die Ausdehnung des festen und die Curve *BC*



die Ausdehnung des flüssigen Schwefels dar. Wenn wir nun den flüssigen Schwefel wieder abkühlen und dafür sorgen, dass er den unterkühlten Zustand sehr leicht annehmen kann (indem wir ihn z. B. in die Form kleiner Tröpfchen bringen), so wird das Volumen längs der Curve *CBD* abnehmen und es entsteht die Frage, ob diese Curve nicht einmal die Ausdehnungscurve des festen Schwefels schneiden wird. In einem solchen Schnittpunkt hätten dann der feste und der unterkühlte Schwefel denselben Druck, dasselbe Volumen und dieselbe Temperatur.

Wir erhalten diesen Punkt aus der Gleichung

$$V_t = V'_t$$

oder

$$0 = 0.04993 + 0.00098042t - 0.0000044988t^2 + \\ + 0.000000014673t^3,$$

welche die reelle Wurzel

$$t = -41.81$$

hat.

Diese Temperatur liegt sehr tief unter der Grenze der Unterkühlung, welche ich bei 75° C. gefunden habe (a. a. O., S. 1227). Bei der Unterkühlung von 115° bis -41.81° C. gibt die Masseneinheit des Schwefels die Wärme

$$\int_{-41.81}^{115} C \cdot dt$$

ab, wo C die spezifische Wärme bedeutet. Nach den Messungen von Person ist die mittlere spezifische Wärme des flüssigen Schwefels zwischen 119° und 147° C. gleich 0.2346. Wenden wir hier diese Zahl an, so erhalten wir die abgegebene Wärme gleich

$$0.2346 \times 156.81 = 36.79 \text{ cal.}$$

Die latente Schmelzwärme des Schwefels ist nach Person gleich

$$\Lambda = 9.368;$$

es ist also die abgegebene Wärme 3.927mal so gross als die Schmelzwärme. Nach unserer Anschauung von der Constitution einer unterkühlten Flüssigkeit muss demnach der unterkühlte Schwefel bei der Temperatur -41.81° C. schon längst in seinen kleinsten Theilchen vollkommen fest sein.

Um nun über den Zustand des unterkühlten Schwefels bei dieser Temperatur noch weiter Aufschluss zu erhalten, wollen wir die Frage erledigen, wie gross der Unterschied der Energien des festen und unterkühlten Schwefels bei dieser Temperatur ist. Erwärmen wir den natürlichen krystallisirten Schwefel, immer bei dem constanten Druck einer Atmosphäre, bis zum Schmelzpunkt, bringen wir ihn dann durch allmähliges Schmelzen in den Zustand des flüssigen Schwefels und kühlen wir ihn schliesslich bis -41.81° C. wieder ab, so wird die von Aussen

im Ganzen zugeführte Arbeit wegen des constanten Druckes gleich Null sein. Demnach ist der Energieunterschied lediglich gleich der gesammten von aussen zugeführten Wärme, also pro Masseneinheit gleich

$$A \int_{-41.81}^{115} c dt + A\Lambda - A \int_{-41.81}^{115} C dt = A\Lambda - A \int_{-41.81}^{115} (C - c) dt,$$

wo A das mechanische Äquivalent der Wärme und c die spezifische Wärme des festen Schwefels bedeutet.

Für die spezifische Wärme des festen Schwefels fanden Dulong und Petit die Zahl 0.188.

Regnault's frühere Versuche (mit geschmolzenem und erstarrtem Schwefel) lieferten 0.20259. Später erkannte derselbe den Einfluss der verschiedenen Zustände und besonders die Schwierigkeit, den Werth für den zwei- und eingliedrigen Schwefel zu bekommen. Er erhielt für

eben vorher geschmolzenen Schwefel 0.1844
 geschmolzen, nach 2 Monaten 0.1803
 » » 2 Jahren 0.1764
 natürlich krystallisirten Schwefel 0.1776 (0.1764).

Die Temperaturgrenzen waren 15° und 97° C.

Bunsen fand mit dem Eiscalorimeter 0.1712.

Person wählte für sein empirisches Gesetz

$$\Lambda = (C - c)(\tau + 160),$$

in welchem τ den Schmelzpunkt (115°) bedeutet, für c die Zahl 0.20259 und berechnete daraus

$$\Lambda = 0.03201 \times 275 = 8.803,$$

was der experimentell bestimmten Zahl 9.368 ziemlich nahe kommt. Hätte er aber die Regnault'schen Zahlen 0.1776 und 0.1764 oder den Bunsen'schen Werth 0.1712 benützt, so hätte er beziehungsweise die Zahlen 15.68, 16.00, 17.43 erhalten, welche mit dem experimentellen Ergebnisse entschieden nicht stimmen.

In dem Integral

$$\int_{-41.81}^{115} (C-c) dt$$

ist $C-c$ eine Function der Temperatur. Da uns diese Function nicht bekannt ist, so wollen wir $C-c$ vorläufig als constant annehmen und das Integral gleich

$$(C-c)(115+41.81) = (C-c) \times 156.81$$

setzen. Für $C = 0.2346$ und $c = 0.1776, 0.1764, 0.1712$ ergeben sich beziehungsweise die Werthe

$$8.938, \quad 9.126, \quad 9.942.$$

Vergleichen wir diese Zahlen mit dem experimentell gefundenen Werthe $\Lambda = 9.368$, so können wir sagen, dass bei der Temperatur -41.81°C. der Unterschied der Energien, nämlich

$$A\Lambda - A \int_{-41.81}^{115} (C-c) dt$$

entweder $= 0$ oder doch sehr klein ist. Wir erhalten also das folgende Resultat:

Wenn wir natürlichen krystallisirten Schwefel und unterkühlten flüssigen Schwefel bei dem constanten Druck einer Atmosphäre bis -41.81°C. abkühlen, so erhalten beide das gleiche specifische Volumen und entweder gleiche oder doch sehr nahe gleiche Werthe der Energie.

Man könnte in Folge dieses Ergebnisses versucht sein, anzunehmen, dass bei -41.81°C. die Zustände vollständig gleich sind, oder dass der flüssige Schwefel durch Unterkühlung bis -41.81°C. allmählig in den Zustand des natürlichen krystallisirten Schwefels gebracht werden kann. Wäre diese Annahme richtig, dann wäre es möglich, nachdem der flüssige Schwefel bei der Unterkühlung die Temperatur -41.81°C. erreicht hat, durch allmähliche Wärmezufuhr die Zustände des festen natürlichen Schwefels bis zum Schmelzpunkt zu erhalten, kurz, es wäre ein vollständiger Kreisprocess möglich und es müsste die bekannte Gleichung

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

erfüllt sein. Diese Gleichung gibt aber

$$\Lambda = (273 + 115) \int_{-41.81}^{115} \frac{C-c}{273+t} dt.$$

Da nun die Gleichung

$$\Lambda = \int_{-41.81}^{115} (C-c) dt$$

entweder vollständig oder doch nahezu erfüllt ist, so müsste die Gleichung

$$\int_{-41.81}^{115} \frac{C-c}{273+115} dt = \int_{-41.81}^{115} \frac{C-c}{273+t} dt$$

entweder vollständig oder doch nahezu erfüllt sein, was nicht richtig ist.

Wir können also durch Unterkühlung nie die Zustände des natürlichen krystallisirten Schwefels erreichen, der aus dem flüssigen Schwefel durch die normale Erstarrung entsteht. Wird flüssiger Schwefel auf dem Wege der Unterkühlung fest, dann wird er amorph.

Ebenso wie den Schwefel könnte man auch andere Substanzen, wie Phosphor, Chlorcalcium, phosphorsaures Natron, unterschwefligsaures Natron etc. untersuchen, aber man erhält bei allen diesen Substanzen den Schnittpunkt der zwei erwähnten Curven bei Temperaturen, welche zwischen -100° und -200° C., also viel zu weit von jenen Temperaturintervallen liegen, in welchen die Ausdehnungsverhältnisse bestimmt worden sind. Aus diesem Grunde haben diese Temperaturzahlen gar keine Sicherheit. Auch beim Wasser ist es nicht möglich, aus den bekannten Ausdehnungsverhältnissen auf jene bei sehr tiefen Temperaturen zu schliessen.

X. SITZUNG VOM 12. APRIL 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1893) des 102. Bandes, Abtheilung III der Sitzungsberichte vor, womit nun der Druck dieses Bandes in allen drei Abtheilungen vollendet ist.

Das Präsidium der Mathematischen Gesellschaft an der kaiserl. Universität in Moskau spricht den Dank aus für die Begrüßung dieser Gesellschaft zu ihrer 25jährigen Gründungsfeier.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs in Wien übersendet eine Abhandlung: »Über eine fossile *Halimeda* aus dem eocänen Sandsteine von Greifenstein«.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Das w. M. Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung von Herrn A. Kiesel in Wiesbaden vor, betitelt: »Untersuchungen zur Physiologie des facettirten Auges«.

XI. SITZUNG VOM 19. APRIL 1894.

Herr Prof. Dr. Filippo Zamboni, Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Bezeichnung »Sterne«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine im anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Otto v. Aufschnaiter, betitelt: »Die Muskelhaut des menschlichen Magens«.

Das w. M. Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Konrad Natterer: »Chemische Untersuchungen im östlichen Mittelmeer« (IV. Abhandlung) als ein Ergebniss der IV., während des Sommers 1893 im ägäischen Meer stattgefundenen Tiefsee-Expedition S. M. Schiffes »Pola« (Schlussbericht).

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben drei weitere Arbeiten aus seinem Laboratorium, und zwar:

1. »Über die Oxydation normaler fester Säuren«, von Robert Margulies.
 2. »Über eine Synthese von Chinolin«, von Dr. Victor Kulisch.
 3. »Über elektrolytische Bestimmung der Halogene«, von Dr. G. Vortmann.
-

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

**ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.**

XII. SITZUNG VOM 4. MAI 1894

Der Secretär legt das erschienene Heft III (März 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Abhandlung von Prof. Dr. G. Jaumann in Prag: »Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. F. Streintz: »Über die thermochemischen Vorgänge im Secundärelemente«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung: »Zur Theorie der Entwicklung der jetzigen Floren der Erde aus der Tertiärflora«.

Das c. M. Herr emerit. Prof. M. Willkomm übersendet zwei Arbeiten von Dr. Wilhelm Sigmund in Prag, betitelt:

1. »Einfluss des Magnetismus auf das Pflanzenwachsthum« (Vorläufige Mittheilung);
2. »Über die Wirkung gasförmiger, flüssiger und fester Körper auf die Keimung«.

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Folgerungen aus Amagat's Versuchen«.

Herr Max Jüllig, dipl. Ingenieur und Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes«.

Herr Alfred J. Ritter v. Dutczyński in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beschreibung und Begründung einer Neuerung an Bremsen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Mittheilung: »Über die Herkunft der die Chordascheide der Haie begrenzenden äusseren Elastica«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei von Herrn Professor Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über das Scoparin.« (II. Abhandlung), von G. Goldschmiedt und F. v. Hemmelmayr.
2. »Notiz über das Verhalten des Trimethylgallussauren Calciums bei der trockenen Destillation«, von stud. phil. Hugo Arnstein.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Synthese des Isochinolins und seiner Derivate« I, von Dr. C. Pomeranz.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Herrn Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien unter dem Titel: »Absorptionsspectren von farblosen und gefärbten Gläsern mit Berücksichtigung des Ultraviolett«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: »Über den Einfluss verdünnter Salzsäure auf Chinabasen.«

XIII. SITZUNG VOM 10. MAI 1894.

Die Schriftleitung der 66. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zeigt an, dass diese Versammlung vom 24. bis 30. September l. J. in Wien tagen wird und laden die Mitglieder der kaiserlichen Akademie zur Theilnahme an derselben ein.

Herr Prof. Em. Czuber an der k. k. technischen Hochschule in Wien übersendet eine von dem verewigten w. M. Herrn Hofrath Prof. Emil Weyr entworfene und ihm vor dessen Ableben zur Ausfertigung übertragene Arbeit: »Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig in Wien übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz:

1. »Über die Einwirkung des Stickoxydes auf einige Metalle«, von Prof. F. Emich.
2. »Über Stickstoffverbindungen des Mangans«, von O. Prelinger.

Ferner übersendet Herr Hofrath Ludwig eine von den Herren Prof. Dr. J. Mauthner und Prof. Dr. W. Suida ausgeführte Arbeit: »Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins (II. Abhandlung)«.

Herr Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet »Anatomisch-physiologische Untersuchungen über das tropische Laubblatt. II. Über wassersecernirende und -absorbirende Organe«.

Herr Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Eine neue *Pachastrella*«.

Der Secretär legt zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Karl Moser in Wien vor, welche folgende Aufschriften führen:

1. »Chemische Mittel zur Vertilgung der Reblaus und anderer schädlicher Insecten.«
2. »Selbstwirkender Sicherheitsbrems-Klotz bei minderem Kraftverbrauch.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze«.

Der k. u. k. Linienschiffslieutenant Herr August Gratzl überreicht im Auftrage des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums (Marine-Section) einen Bericht über die im Sommer 1892 auf dem französischen Transportavisodampfer »Manche« unter dem Commando des Linienschiffscapitäns Amédée Bienaymé unternommene Reise von Edinburgh nach Jan Mayen, Spitzbergen und Tromsø, welche den Besuch der ehemaligen österreichischen arktischen Beobachtungsstation im Wilczekthale auf Jan Mayen und die wissenschaftliche Erforschung eines Theiles von Spitzbergen zum Zwecke hatte.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

- Haberlandt G., Eine botanische Tropenreise, indo-malayische Vegetationsbilder und Reiseskizzen. (Mit 51 Abbildungen.) Leipzig, 1893; 8°.
- Über die Ernährung der Keimlinge und die Bedeutung des Endosperms bei viviparen Mangrovepflanzen. Leyden, 1893; 8°.

Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Da

$$[2\alpha] = 2[\alpha] + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ist, je nachdem

$$\alpha - [\alpha] < \frac{1}{2}$$

ist oder nicht, so ist die durch das verallgemeinerte Gaussische Lemma definirte charakteristische Zahl (m, n) einer ganzen Zahl m in Bezug auf eine zu derselben theilerfremde ungerade Zahl n durch die Gleichung

$$(m, n) = \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left\{ \left[\frac{2xm}{n} \right] - 2 \left[\frac{xm}{n} \right] \right\} \quad \text{I.)}$$

gegeben, welche sofort zu der wiederholt benützten Relation

$$\left(\frac{m}{n} \right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2xm}{n} \right]} \quad \text{II.)}$$

führt. Auf dieser Darstellung des Legendre-Jacobi'schen Symbols beruht u. A. der dritte Gaussische Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes für zwei ungerade Prim-

zahlen, welchen die Herren L. Kronecker¹ und E. Schering² wesentlich vereinfachten, indem sie auf dem Gaussischen Gedankengange fussend, in verschiedener Weise zeigten, dass das Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ durch das interessante Kronecker'sche Vorzeichenproduct darstellbar ist. Die Factoren dieses, sowie mehrerer anderer von mir³ zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes benutzten Producte sind alternirende Functionen der ganzen Zahlen m und n , wesshalb die aus ihnen gebildeten Ausdrücke unmittelbar die Reciprocitätseigenschaft des Symbols erkennen lassen; man kann aber auch durch Benützung von Zeichenproducten, welche die erwähnte Eigenschaft nicht besitzen, auf einem nicht minder einfachen Wege zum Fundamentaltheorem in der Theorie der quadratischen Reste gelangen, was meines Wissens bisher noch nicht gezeigt wurde.

Der oben angeführte Ausdruck für das Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ führt nun ungemein leicht zu einem derartigen Beweise, welcher zunächst in den folgenden Zeilen mitgetheilt werden soll; hierauf werden aus der im Anfange angegebenen Darstellung der charakteristischen Zahl zwei von Herrn E. Schering in seiner im ersten Bande der Acta mathematica enthaltenen bemerkenswerthen Abhandlung »Zur Theorie der quadratischen Reste« aufgestellte Theoreme, welche von Herrn H. Schmidt bei seinem dritten Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes⁴ neuerdings abgeleitet wurden, in sehr einfacher Weise erschlossen.

¹ »Über den dritten Gaussischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste«. Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884. — »Bemerkung zu Herrn Ernst Schering's Mittheilung«. A. e. a. O., 1885.

² »Über den dritten Gaussischen Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste«. A. e. a. O., 1885

³ »Über das quadratische Reciprocitätsgesetz«. Diese Sitzungsberichte, 90. Band. — »Über das Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ «. A. e. a. O., 92. Band.

⁴ »Drei neue Beweise des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste«. Journal für die reine und angewandte Mathematik von L. Fuchs, 112. Band.

Zum Schlusse wird ein von Herrn J. Schröder¹ im vierten Hefte des dritten Bandes der Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg bewiesener arithmetischer Satz durch ein äusserst einfaches Verfahren abgeleitet und vervollständigt.

1. Beachtet man, dass

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2xm}{n} \right] = \sum_{x,y=1}^{x=\frac{n-1}{2}, y=m-1} \varepsilon \left(\frac{2xm}{yn} \right)$$

und demnach gleich der Anzahl der ganzzahligen positiven Werthe paare x, y ist, für welche $yn - 2xm$ negativ wird, so kann man die Relation II auch in folgender Gestalt schreiben

$$\left(\frac{m}{n} \right) = \text{sign. } \overline{[x, y]} \left(\frac{y}{m} - \frac{2x}{n} \right) \quad \text{III.)}$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, m-1 \right)$$

oder auch, falls m , wie in den folgenden Entwicklungen vorausgesetzt wird, ungerade ist

$$\left(\frac{m}{n} \right) = \text{sign. } \overline{[x, y]} \left(\frac{2x}{n} - \frac{y}{m} \right) \quad \text{IV.)}$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, m-1 \right),$$

da in diesem Falle die Anzahl der Factoren des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Productes gerade ist.

Die letzte Gleichung liefert, wie hier nebenbei bemerkt werden mag, unmittelbar die von Herrn E. Lucas² für zwei ungerade Primzahlen und von mir³ allgemein bewiesene Relation

¹ »Einige Sätze über Theileranzahlen, sowie einige Anwendungen der Geometrie auf die Zahlentheorie«.

² »Sur la loi de réciprocité des residus quadratiques«. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Nouvelle série, t. I, 1890.

³ »Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol«. Diese Sitzungsberichte, 100. Band.

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum_{y=1}^{y=m-1} \left[\frac{yn}{2m}\right]}.$$

Schreibt man die Formel IV.) in der Gestalt

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{n}\right) &= \text{sign. } \overline{[x, y]} \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y}{m}\right) \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right) \\ &\quad \left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right) \\ &= \text{sign. } \overline{[x, y]} \left(\frac{x}{n} - \frac{2y}{m}\right). \quad \text{V.)} \\ &\quad \cdot \text{sign. } \overline{[x, y]} \left(\frac{2\xi}{n} - \frac{2y-1}{m}\right) \left(\frac{2\xi-1}{n} - \frac{2y}{m}\right) \\ &\quad \left(x = 1, 2, \dots, n-1; \xi = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right), \end{aligned}$$

so ergibt sich aus derselben nach III.) sofort die Relation

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{n}\right) &= \left(\frac{n}{m}\right) \text{sign. } \overline{[x, y]} \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right) \left(\frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}\right) \\ &\quad \left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right) \end{aligned}$$

durch welche das quadratische Reciprocitätsgesetz ausgesprochen wird.

Berücksichtigt man, dass die eine der zwei Differenzen

$$\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}, \quad \frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}$$

in das Negative der anderen übergeht, wenn man $2x$, $2y-1$ durch $n-(2x-1)$, $m-2y$, beziehungsweise $2x-1$, $2y$ durch $n-2x$, $m-(2y-1)$ ersetzt, so erkennt man, dass

$$\begin{aligned} \text{sign. } \overline{[x, y]} \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right) \left(\frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}\right) &= (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \\ &\quad \left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right) \end{aligned}$$

ist, wodurch die Reciprocitätsgleichung in die gewöhnliche Form übergeführt wird.

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{n} + \frac{1}{2} \right] \equiv \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m} \right] \pmod{2},$$

welche wegen der bekannten Formel

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{n} + \frac{1}{2} \right] \equiv 0 \pmod{2}$$

zu der von Herrn Busche¹ ohne Beweis mitgetheilten und von den Herren A. Stern² und L. Kronecker³ bewiesenen Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m} \right] \equiv \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \pmod{2}$$

führt.

Schreibt man in dem auf der rechten Seite des ersten Theiles der Doppelgleichung V.) vorkommenden Ausdrücke

$\frac{2x}{n} - \frac{2y}{m}$ für $2x : n - (2x-1)$ und für $2y : m - (2y-1)$, so entsteht die Beziehung

$$\left(\frac{m}{n} \right) = \text{sign.} \left[x, y \right] \left(\frac{2y-1}{m} - \frac{2x-1}{n} \right) \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m} \right) \quad \text{VI.)}$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2} \right),$$

¹ Festschrift, herausgegeben von der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig, 1890.

² »Zur Theorie der Function Ex . Journal für die reine und angewandte Mathematik von Kronecker, 106. Band.

³ »Bemerkungen über die von Gauss mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x . A. e. a. O.

welche zeigt, dass

$$\text{sign. } \prod_{x,y} \left(\frac{x}{n} - \frac{y}{m} \right) \left(\frac{2y-1}{m} - \frac{2x-1}{n} \right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2} \right),$$

oder also

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} \right] \equiv \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m} + \frac{1}{2} \right] \pmod{2}$$

ist, welche Relation einen neuerlichen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes enthält.

Wird die Gleichung VI.) in der Gestalt

$$\left(\frac{m}{n} \right) = \text{sign. } \prod_{x,y} \left(\frac{y}{m} - \frac{2x-1}{n} \right) \cdot \text{sign. } \prod_{x,y} \left(\frac{2\eta}{m} - \frac{2x-1}{n} \right) \left(\frac{2x}{n} - \frac{2\eta-1}{m} \right)$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}; \eta = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}; y = 1, 2, \dots, m-1 \right)$$

geschrieben, so ersieht man unmittelbar, dass

$$\left(\frac{m}{n} \right) = \text{sign. } \prod_{x,y} \left(\frac{y}{m} - \frac{2x-1}{n} \right) \left(y = 1, 2, \dots, m-1; x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \right)$$

$$= \text{sign. } \prod_{x,y} \left(\frac{2x-1}{n} - \frac{y}{m} \right) \left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, m-1 \right)$$

$$= (-1)^{\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{m} \right]}$$

$$= (-1)^{\sum_{x=1}^{x=m-1} \left[\frac{xn}{2m} + \frac{1}{2} \right]}$$

ist, welche Relationen auf einem dem oben eingeschlagenen analogen Wege zum Fundamentaltheoreme der Theorie der quadratischen Reste führen würden.

Die letzten Entwicklungen zeigen deutlich den innigen Zusammenhang, welcher zwischen einer Reihe von bekannten Darstellungen des Legendre-Jacobi'schen Symbols besteht.

2. Vereinigt man alle Glieder des auf der rechten Seite der Gleichung I.) stehenden Ausdruckes, in denen der grösste gemeinsame Theiler von x und n gleich δ ist, so ist deren Summe offenbar gleich

$$(m, \delta)' = \sum_{\lambda} \left\{ \left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'} \right] - 2 \left[\frac{r_{\lambda}m}{\delta'} \right] \right\},$$

wo

$$\delta\delta' = n$$

und die Summation nach r_{λ} über alle dem Intervalle $1 \dots \frac{\delta'}{2}$ angehörigen, zu δ' theilerfremden ganzen Zahlen auszudehnen ist. Die Relation I verwandelt sich daher sofort in die folgende von den Herren Schering und Schmidt ermittelte Beziehung

$$(m, n) = \sum_{\delta} (m, \delta)',$$

in welcher die Summation nach δ über alle die Einheit übersteigenden Theiler von n zu erstrecken ist, da x in I.) $\frac{n}{2}$ nicht überschreiten kann.

Bei ungeradem δ' folgt aus der Gleichung

$$2r_{\lambda}m = \delta' \left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'} \right] + \varepsilon_{\lambda} \quad (0 \leq \varepsilon_{\lambda} < \delta'),$$

dass für ein gerades $\left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'} \right]$ die Beziehung

$$\varepsilon_{\lambda} = 2r_{\mu}$$

stattfindet, während bei einem ungeraden $\left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'} \right]$

$$\delta' - \varepsilon_\lambda = 2r_\mu$$

ist, so dass also allgemein

$$2r_\lambda m \equiv (-1)^{\left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'} \right]} 2r_\mu \pmod{\delta'} \quad \text{VII.)}$$

wird. Da aus der Verbindung dieser mit der Congruenz

$$2r_\sigma m \equiv (-1)^{\left[\frac{2r_\sigma m}{\delta'} \right]} 2r_\mu \pmod{\delta'}$$

sich die absurde Congruenz

$$r_\lambda \pm r_\sigma \equiv 0 \pmod{\delta'}$$

ergeben würde, so folgt aus VII.) die Beziehung

$$m^{\frac{\varphi(\delta')}{2}} \equiv (-1)^{\sum_{\lambda} \left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'} \right]} \pmod{\delta'}$$

und daher nach dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze einerseits für ein mindestens zwei Primtheiler besitzendes δ'

$$\sum_{\lambda} \left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'} \right] \equiv 0 \pmod{2},$$

andererseits für jeden ganzzahligen positiven Werth von α

$$\sum_{\lambda} \left[\frac{2r'_\lambda m}{p^\alpha} \right] \equiv \sum_{\mu} \left[\frac{2r_\mu m}{p} \right] \pmod{2},$$

wenn p eine Primzahl ist und die Zahlen r'_λ, r_μ alle durch p nicht theilbaren ganzen Zahlen des Intervalles $1 \dots \frac{p^\alpha}{2}$, beziehungsweise $1 \dots \frac{p}{2}$ durchlaufen.

Es ist demnach die charakteristische Zahl (m, n) nach dem Modul 2 der Anzahl derjenigen Primtheiler von n congruent, welche bei der Darstellung von n durch ein Product von Prim-

zahlpotenzen mit einem ungeraden Exponenten versehen sind und von denen überdies m quadratischer Nichtrest ist. Dies ist im Wesentlichen der zweite von den oben erwähnten Schering-Schmidt'schen Sätzen.

3. Herr J. Schröder hat in dem anfänglich citirten Aufsatze folgenden Satz durch Specialisirung aus einem allgemeineren Theoreme gewonnen.

Bezeichnet $\psi_{vr+s}(a, b)$ die Anzahl derjenigen Theiler von a , welche grösser als b sind und einen complementären Divisor der Form $vr+s$ besitzen, ist ferner $\chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right)$ die Anzahl derjenigen ganzzahligen nicht negativen Werthe von λ , für welche $\frac{n-\lambda r}{s}$ eine positive ganze Zahl ist, so besteht die Relation

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=\left[\frac{n}{r}\right]} \psi_{vr+s}(n-r\rho, \rho) = \chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right).$$

Dieser Satz lässt sich ungemein einfach erhärten. Die Function $\psi_{vr+s}(n-r\rho, \rho)$ kann nach ihrer Definition auch als die Anzahl derjenigen ρ überschreitenden ganzen Zahlen t aufgefasst werden, welche die Gleichung

$$n = r(vt + \rho) + ts$$

befriedigen; die auf der linken Seite der Schröder'schen Relation stehende Summe ist demnach die Anzahl derjenigen Zerlegungen von n in die zwei Elemente r und s , bei denen der Coëfficient von s von Null verschieden ist oder also gleich der Gesamtanzahl der Zerlegungen von $n-t$ in die genannten Elemente. Dieselbe ist aber nach einem bekannten Satze aus den Elementen der Zahlentheorie gleich $\left[\frac{n}{rs} - \frac{1}{r}\right] + \eta$, wo η den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $n-s-rs\left[\frac{n}{rs} - \frac{1}{r}\right]$ aus den Zahlen r und s additiv erzeugt werden kann, oder nicht. Man hat daher unmittelbar die Gleichung

$$p = \left[\frac{n}{r} \right]$$

$$\sum_{r=0} \psi_{rv+s}(n-rp, p) = \left[\frac{n}{rs} - \frac{1}{r} \right] + \eta.$$

Die von Herrn Schröder angeführten speciellen Fälle $s = 1$, $r = s = 1$, $r = 1$, welche er auch auf geometrischem Wege beweist, und deren zweiter schon vordem von Herrn Lerch ermittelt wurde, ergeben sich unmittelbar aus dieser Formel, da in diesen Fällen offenbar $\eta = 1$ ist.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

von

Prof. Emanuel Czuber.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1894.)

Die folgenden Mittheilungen suchen die Anwendung eines neuen Begriffes in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, zunächst zwischen drei Variabeln, zu zeigen, der sich aus naturgemässer Fortentwicklung eines Gedankens ergibt, welchen wir in einer früheren Abhandlung¹ für gewöhnliche Differentialgleichungen ausgeführt haben, und geeignet scheint, die Anschaulichkeit der geometrischen Interpretation oben genannter Gleichungen zu fördern. Es handelt sich um Folgendes. Einem von zwei wesentlichen Parametern abhängigen System von Flächen ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zugeordnet; wenn man in dieser die Differentialquotienten p, q als Parameter auffasst, so stellt sie wieder ein System von ∞^2 Flächen dar, welches wir das abgeleitete System des ersten nennen. Der Zusammenhang beider Systeme soll nun in zweifacher Richtung verwerthet werden. Im ersten Abschnitte wird nach allgemeinen Bemerkungen ein Gedankengang skizzirt, welcher zeigt, wie man mit Hilfe jenes Begriffes die vollständigen von Darboux² gefundenen Bedingungen gewinnen kann, denen die singuläre Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung zu

¹ Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen. Diese Sitzungsber., Bd. 102, Abth. II. a.

² Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mém. prés. par div. savants à l'Acad. des sciences, t. XXVII. 2^{me} sér.

genügen hat. Der zweite Abschnitt befasst sich mit der Anwendung des Begriffes des abgeleiteten Systems auf die Behandlung gewisser Formen partieller Differentialgleichungen.

Übrigens lassen sich die nachfolgenden Betrachtungen und ihre Resultate unter Benützung des Sprachgebrauches, wie er für den mehrdimensionalen Raum ausgebildet worden ist, ohne Schwierigkeit auf partielle Differentialgleichungen mit beliebig vielen Variablen ausdehnen.

I.

1. Durch die Gleichung

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1)$$

worin a, b unabhängige veränderliche Parameter bedeuten, sind ∞^4 Elemente¹ des Raumes R_3 bestimmt, deren Coordinaten x, y, z, p, q der Gleichung genügen, welche aus (1) und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q = 0$$

mittels Elimination von a, b erhalten wird und heissen möge

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (2)$$

Die beiden Darstellungen, welche diesen ∞^4 Elementen durch die Gleichung (1) einerseits und die Gleichung (2) andererseits gegeben sind, unterscheiden sich wesentlich von einander, und zwar in folgender Weise.

In (1) sind je ∞^2 Träger² x, y, z zu einer Fläche, die durch ein festes Werthepaar a, b charakterisirt ist, derart zusammengefasst, dass die zugehörigen Elemente eine Elementmannigfaltigkeit bilden, d. h. dass jede zwei benachbarte Elemente vereinigt liegen, oder der Pfaff'schen Gleichung

$$dz - p dx - q dy = 0 \quad (3)$$

genügen.

¹ Für diesen und andere im Folgenden angewandte Begriffe vergl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. II, Kap. 4.

² Wir bezeichnen den Punkt x, y, z als den Träger, p, q als die Stellscoefficienten des Elementes x, y, z, p, q .

In (2) sind je ∞^2 Träger x, y, z zu einer Fläche, die durch ein festes Werthe paar p, q charakterisirt ist, derart verbunden, dass die zugehörigen Elemente parallel liegen.

Der Übergang von der ersten Anordnung zur zweiten erfordert analytisch Differentiations- und Eliminationsprocesse; geometrisch wird, wenn die Anordnung (1) gegeben ist, ein Individuum des Flächensystems (2) erhalten, indem man an die Flächen des Systems (1) alle möglichen Tangentialebenen einer bestimmten Stellung p, q legt; ihre Berührungspunkte haben als Ort eine einzelne Fläche von (2).

Der Übergang von der zweiten als gegeben vorausgesetzten Anordnung zur ersten wird als Integration der Differentialgleichung (2), die Gleichung (1) im Sinne von Lagrange als ein vollständiges Integral von (2) bezeichnet; allgemein gefasst, geht das Problem der Integration dahin, aus der durch die Gleichung (2) gegebenen Schaar von ∞^4 Elementen alle Elementmannigfaltigkeiten zweifach unendlicher Ausdehnung zu finden; der Ort der Träger einer solchen Mannigfaltigkeit wird eine Integralfäche genannt.

In den folgenden Betrachtungen wollen wir den Zusammenhang der beiden Flächensysteme (1) und (2) kurz dadurch ausdrücken, dass wir das System (1) als das ursprüngliche, (2) als das abgeleitete bezeichnen.

Um ein einfaches Beispiel anzuführen, sei das ursprüngliche System jene Schaar von Kugeln, welche über den zur z -Axe parallelen Sehnen einer gegebenen Kugel vom Radius r und dem Mittelpunkte O als Durchmessern beschrieben werden; ihre Gleichung ist

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2 - a^2 - b^2;$$

eliminiert man zwischen dieser und den beiden Gleichungen

$$x-a+pz=0$$

$$y-b+qz=0$$

die Parameter a, b , so erhält man als Gleichung des abgeleiteten Systems

$$x^2 + y^2 + (1 + 2p^2 + 2q^2)z^2 + 2pxz + 2qyz = r^2;$$

es ist dies ein System von concentrischen Ellipsoiden, welche den Kreis $z = 0, x^2 + y^2 = r^2$ gemein haben.

2. Durch einen Punkt x, y, z von R_3 gehen ∞^1 Flächen des Systems (1), ihre Tangentialebenen in dem gedachten Punkte hüllen einen Kegel (T) ein und bestimmen mit dem Punkte zusammen jene ∞^1 Elemente, welche ihn zum gemeinsamen Träger haben.

Durch denselben Punkt gehen aber auch ∞^1 Flächen des Systems (2) und die eben erwähnten Tangentialebenen vermitteln eine im Allgemeinen eindeutige Zuordnung der Flächen aus (1) und (2).

Einer Ebene E , deren Stellungscoefficienten p, q sein mögen, entspricht eine bestimmte Fläche aus dem System (2); der Schnitt beider ist eine Curve (C), der Ort der Träger aller Elemente, deren gemeinsame Ebene E ist, mit anderen Worten gesagt, der Ort der Berührungspunkte aller die Ebene E tangirenden Integralflächen der Differentialgleichung (2).

Man kann diesen Zusammenhang auch in folgender Weise ausdrücken. Jeder Fläche des Systems (2) ist eine Stellung p, q im Raume R_3 zugeordnet, und jede Ebene dieser Stellung schneidet die Fläche im Allgemeinen nach einer Curve (C), dem Ort der Berührungspunkte aller die Ebene tangirenden Integralflächen. Geschieht es, dass die Ebene die ihr zugeordnete Fläche berührt, so reducirt sich die Curve (C) auf einen Punkt; wir werden später gerade auf diesen Fall zurückzuweisen haben.

3. Existirt eine Fläche

$$\Sigma(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

von solcher Art, dass durch jeden ihrer Punkte eine Fläche des Systems (1) geht, welche mit ihr daselbst gemeinsame Tangentialebene hat, so soll die Fläche Σ als Einhüllende des Systems (1) definirt werden.

Man kann (4) aus (1) hervorgehen lassen, indem man hier für a, b passend gewählte Functionen von x, y, z einträgt; welchen Bedingungen diese zu genügen haben, ergibt sich aus der eben aufgestellten Definition von Σ . Ist nämlich x, y, z ein Punkt von Σ , und $V(a, b) = 0$ die durch ihn gehende Fläche

des Systems (1) von der in der Definition bezeichneten Art, so muss ihre Tangentialebene

$$(\xi-x) \frac{\partial V}{\partial x} + (\eta-y) \frac{\partial V}{\partial y} + (\zeta-z) \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

zusammenfallen mit der Tangentialebene an Σ , deren Gleichung lautet

$$(\xi-x) \left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} \right] + (\eta-y) \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} \right] + (\zeta-z) \left[\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial z} \right] = 0;$$

dazu ist nothwendig, dass

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0 \quad (5)$$

und diese Bedingungen müssen für alle Punkte von Σ erfüllt sein; durch sie werden also a, b als Functionen von x, y, z derart bestimmt, dass sie (1) in (4) verwandeln.

4. Wir beweisen nun den Satz: Besitzt das ursprüngliche System (1) eine Einhüllende, so ist dieselbe zugleich Einhüllende des abgeleiteten Systems (2).

Es sei Σ die Einhüllende von (1); man wähle auf ihr drei unendlich benachbarte Punkte $M(x, y, z)$, $M_1(x+d_1x, \dots)$, $M_2(x+d_2x, \dots)$, jedoch so, dass

$$\begin{vmatrix} d_1x & d_1y \\ d_2x & d_2y \end{vmatrix} \leq 0;$$

dann bestimmen diese Punkte eine Ebene, die Tangentialebene an Σ in den genannten Punkten, zugleich Tangentialebene an diejenigen Flächen des Systems (1), welche Σ in den Punkten M, M_1, M_2 berühren; nennt man p, q die Stellungscoefficienten dieser Ebene, so sind M, M_1, M_2 zugleich drei unendlich benachbarte Punkte der durch p, q charakterisirten Fläche des Systems (2), folglich hat auch diese Fläche an der betrachteten Stelle mit Σ eine gemeinsame Tangentialebene und daher ist Σ auch Einhüllende des Systems (2).

In dem Beispiele am Schlusse des Art. 1 war das ursprüngliche System eine Schaar von ∞^2 Kugeln, das abgeleitete eine Schaar von ∞^2 concentrischen Ellipsoiden; beide Systeme werden durch das Rotationsellipsoid

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 2r^2$$

eingehüllt.

5. Dem Satze in Art. 4 steht der folgende gegenüber: Hat das abgeleitete System (2) eine Einhüllende, so ist diese im Allgemeinen nicht zugleich Einhüllende des ursprünglichen Systems (1).

Es sei Σ' die Einhüllende des Systems (2); man wähle auf ihr einen Punkt $M(x, y, z)$ und bestimme die Tangentialebene, deren Stellungscoefficienten mit P, Q bezeichnet seien. Durch den Punkt M gehen ∞^1 Flächen des Systems (1) und die Stellungscoefficienten ihrer Tangentialebenen daselbst erfüllen die Gleichung (2); von P, Q wird diese Gleichung im Allgemeinen nicht erfüllt, daher hat keine der Flächen aus (1) mit Σ' eine gemeinschaftliche Tangentialebene, in Folge dessen ist Σ' nicht auch Einhüllende des Systems (1).

Nur wenn die Function F gewissen Bedingungen, die nun entwickelt werden sollen, genügt, ist der Satz 4 auch in seiner Umkehrung richtig. Die Gleichung von Σ' geht dem Art. 3 zufolge aus

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (2)$$

hervor, wenn man p, q durch jene Ausdrücke in x, y, z ersetzt, welche sich dafür aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \quad (6)$$

ergeben; nachdem dies geschehen, erhält man für P, Q die Werthe

$$P = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad Q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

nur wenn diese die Gleichung (2) befriedigen, ist Σ' auch Einhüllende des Systems (1); mit anderen Worten, die aus (6)

für p, q hervorgehenden Bestimmungen müssen mit P, Q zusammenfallen, oder es muss

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

sein.

Man kann das Ergebniss in dem Satze aussprechen: Soll das abgeleitete System eine Einhüllende haben und soll diese auch das ursprüngliche System einhüllen, so muss F eine solche Function der fünf Variabeln x, y, z, p, q sein, dass es Werthe dieser Variabeln gibt, welche den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

zugleich genügen; diese Werthe bestimmen die Elementmännigfaltigkeit, welche die gemeinsame Einhüllende darstellt.

Damit sind die vollständigen Bedingungen für die Existenz einer singulären Lösung der Differentialgleichung (2) gefunden.

6. Aus dem Satze zu Beginn des vorigen Artikels, dass nämlich die Einhüllende des abgeleiteten Systems, wenn eine solche existirt, im Allgemeinen nicht auch Einhüllende des ursprünglichen Systems ist, folgt, dass eine vorgelegte Differentialgleichung im Allgemeinen ein singuläres Integral nicht besitzt. Darboux hat hiefür einen analytischen Beweis gegeben, indem er zeigt, dass die Gleichungen (8), obwohl sie nicht unabhängig von einander sind, da sie sich aus Differentialquotienten einer und derselben Function zusammensetzen, doch im Allgemeinen nicht zugleich bestehen können. Hat nämlich die Differentialgleichung statt der auf Null reducirten die Form

$$F(x, y, z, p, q) = c, \quad (9)$$

wobei c zunächst eine Constante bedeutet, und bestimmt man aus ihr und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \quad (10)$$

z, p, q als Functionen von x, y und c , so müssen durch diese Ausdrücke, wenn die Gleichung (9) ein singuläres Integral haben soll, die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

identisch erfüllt werden. Denkt man sich jetzt unter c eine beliebige Function von x, y, z , so erfahren die Gleichungen (10) keine Änderung und die Ausdrücke für z, p, q , die aus (9) und (10) jetzt gezogen werden, bleiben ebenso zusammengesetzt aus x, y, c wie vordem; dagegen wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} + p \frac{\partial c}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y} + q \frac{\partial c}{\partial z}$$

und es müssten also die Gleichungen

$$\frac{\partial c}{\partial x} + p \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} + q \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllt sein, wie man auch c als Function von x, y, z festsetzen möge. Aus der Ungereimtheit dieses Ergebnisses ist zu schliessen, dass (9), (10) und (11) im Allgemeinen nicht nebeneinander bestehen können.

7. Wir geben nachstehend noch eine zweite neue Ableitung der Bedingungsgleichungen (8), welche von einem anderen Gesichtspunkte ausgeht.

So lange man unter p, q die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ versteht, stellt die Gleichung (2) dasselbe System von ∞^4 Elementen dar, wie die Gleichung (1), aus welcher sie in der in Art. 1 beschriebenen Weise hervorgegangen ist. Betrachtet man dagegen p, q als veränderliche Parameter, so ist durch die Gleichung (2) ein anderes System von ∞^4 Elementen bestimmt, und die Coordinaten x, y, z, p, q jedes dieser Elemente erfüllen die Gleichung, welche man erhält durch Elimination von p, q zwischen

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (2)$$

und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0. \quad (12)$$

Es kann nun die Frage aufgeworfen werden, ob es zwischen den beiden Elementensystemen, welche die Gleichung (2) in dieser zweifachen Auffassung darstellt, gemeinsame Elemente gibt. Da für solche Elemente $p = p$ und $q = q$ sein muss, so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p &= 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Weil sich hieraus z, p, q als Functionen der unabhängig verbleibenden Variablen x, y ergeben, so gibt es der gemeinsamen Elemente ∞^2 , der Ort ihrer Träger x, y, z ist eine Fläche, deren Gleichung durch Elimination von p, q zwischen den drei Gleichungen (13) erhalten wird.

Diese Fläche ist aber eine Integralfläche der Differentialgleichung (2) nur dann, wenn die durch (13) repräsentirten Elemente eine Elementmannigfaltigkeit bilden, d. h. wenn sie die genannte Fläche berühren. Nun kann diese Fläche durch die erste der Gleichungen (13) dargestellt werden, wenn man darin p, q durch die Ausdrücke in x, y, z ersetzt sich denkt, welche die beiden letzten Gleichungen liefern; die Stellungscoëfficienten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ ihrer Tangentialebene im Punkte x, y, z ergeben sich unter diesem Gesichtspunkte aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} \right\} \mathfrak{P} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} \right\} \mathfrak{Q} &= 0; \end{aligned}$$

die hieraus gerechneten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ sollen mit den für den nämlichen Punkt x, y, z aus (13) resultirenden Werthen p, q übereinstimmen, also $\mathfrak{P} = p, \mathfrak{Q} = q$ sein; führt man dies ein, so reduciren sich die letzten Gleichungen vermöge (13) auf

$$\frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} p \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left(\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} q \right) = 0$$

und diese werden identisch erfüllt nur dann, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \quad (14)$$

Die gemeinsamen Elemente der beiden durch die Gleichung (2) in ihrer doppelten Auffassung dargestellten Systeme von ∞^4 Elementen, durch die Gleichungen (13) bestimmt, bilden nur dann eine Elementmannigfaltigkeit, wenn sie auch den Gleichungen (14) genügen. Diese Gleichungen besagen aber nichts anderes, als dass die Träger dieser Elemente auf der Einhüllenden des abgeleiteten Systems liegen müssen.

Man hätte zu den gemeinsamen Elementen der beiden Systeme auch durch folgende Betrachtung gelangen können. Zu der Fläche

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

des abgeleiteten Systems gehört eine Schaar paralleler Ebenen

$$px + qy - z = M,$$

deren jede die ihr zugeordnete Curve (C) auf dieser Fläche hat. Die Curve reducirt sich auf einen Punkt, wenn Ebene und Fläche einander berühren, und augenscheinlich stellt eine solche Ebene mit ihrem Berührungspunkte ein beiden Systemen gemeinsames Element dar; dies tritt nun ein, wenn die Stellungscoefficienten der Tangentialebene an die Fläche, d. i.

$$-\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}, \quad -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

mit den Stellungscoefficienten der Ebenenschaar übereinstimmen, wenn also

$$p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}, \quad q = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0$$

in Übereinstimmung mit (13).

II.

8. Wir eröffnen die Reihe der besonderen Formen von Differentialgleichungen, an welchen der eben entwickelte Gedankengang zur Anwendung gebracht werden soll, mit der Gleichung

$$F(p, q) = 0. \quad (15)$$

In dem vorliegenden Falle existirt ein abgeleitetes Flächensystem nicht; durch jeden Punkt von R_3 gehen ∞^1 Ebenen, deren Stellungscoefficienten die Gleichung (15) befriedigen und jeder Punkt einer solchen Ebene in Verbindung mit ihr selbst bildet ein Element der Gleichung; letztere definirt also wie die allgemeine Gleichung (2) ∞^4 Elemente, nämlich ∞^1 Stellungen, zu jeder ∞^1 Ebenen, in jeder Ebene ∞^2 Elemente. Die Kegel (T), zu den einzelnen Punkten von R_3 gehörig, sind gleich und gleichliegend. Aus alledem folgt, dass das durch (15) bestimmte Elementensystem allen Translationen von R_3 gegenüber invariant bleibt; wenn daher $V(x, y, z) = 0$ irgend ein Integral dieser Gleichung ist, so ist auch

$$V(x-a, y-b, z-c) = 0 \quad (16)$$

ein solches, wobei a, b, c willkürliche Constanten bedeuten. Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die vorliegende Gleichung ein singuläres Integral nicht besitzt, denn die Gruppe der Translationen des Raumes hat keine Invariante.

Man kann das System der Elemente construiren, indem man den Kegel der Strahlen

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{-1}$$

bestimmt — seine Gleichung ist

$$F\left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}\right) = 0$$

— und zu jeder seiner Erzeugenden das System normaler Ebenen legt. Ist die Gleichung (15) insbesondere linear, also

$$Ap + Bq = C, \quad (17)$$

so geht jener Kegel in die Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

über und das System der Elemente ist durch alle zu ihr normalen Ebenen bestimmt.

Wählt man aus der Schaar von ∞^2 Ebenen, welche solcher Art durch (15), respective (17) dargestellt sind, nach irgend einem der Stetigkeit unterliegenden Gesetze ∞^1 Ebenen aus, so hüllen sie eine developpable Fläche ein, im Falle (17) insbesondere eine Cylinderfläche; diese Fläche ist eine Integralfläche nach dem üblichen Sprachgebrauche, aber mit der besonderen Massgabe, dass jede Tangentialebene mit jedem in ihr enthaltenen Punkte zusammen ein Element der Gleichung bildet.

9. Geometrisch gleichwerthig sind die drei Formen

$$F(x, p, q) = 0 \quad (18a)$$

$$F(y, p, q) = 0 \quad (18b)$$

$$F(z, p, q) = 0 \quad (18c)$$

Das durch die erste dargestellte abgeleitete System besteht in einer Schaar zur yz -Ebene paralleler Ebenen. Die zu den Punkten einer solchen gehörigen Kegel (T) sind gleich und gleichliegend, weil durch die nämliche Gleichung (18a), in welcher x constant zu denken ist, charakterisirt. Infolge dessen ist das durch diese Gleichung bestimmte System von ∞^4 Elementen allen Translationen parallel zur yz -Ebene gegenüber invariant, so dass, wenn $V(x, y, z) = 0$ irgend ein Integral der Gleichung ist, auch die mit den willkürlichen Constanten b, c gebildete Gleichung

$$V(x, y-b, z-c) = 0 \quad (19a)$$

ein Integral vorstellt. Daraus schliesst man weiter, dass, sofern die Gleichung ein singuläres Integral besitzt, dieses nur in

einer oder mehreren zur yz -Ebene parallelen Ebenen bestehen kann.

Jede Ebene, deren Stellungscoefficienten p, q sind, enthält ∞^1 Elemente, ihre Träger haben ein und dasselbe x , der Gleichung (18a) entnommen, liegen daher in einer Geraden parallel zur yz -Ebene. Man kann sich nun eine stetige Folge von ∞^1 Ebenen ausgewählt denken, welche einer Geraden in der yz -Ebene parallel sind und die eingehüllte Cylinderfläche gerade längs der ihnen durch die Gleichung (18a) zugeordneten Geraden berühren; dann ist diese Cylinderfläche eine Integralfläche. Die allgemeine Form der Gleichung einer zur yz -Ebene parallelen Cylinderfläche ist

$$x = \varphi(y + Cz)$$

und setzt man vorübergehend $y + Cz = u$, so folgt daraus

$$1 = C \frac{dx}{du} p, \quad 0 = \frac{dx}{du} (1 + Cq)$$

und weiter

$$p = \frac{1}{C \frac{dx}{du}}, \quad q = -\frac{1}{C};$$

dies führt (18a) über in

$$F\left(x, \frac{1}{C \frac{dx}{du}}, -\frac{1}{C}\right) = 0, \quad (20a)$$

d. i. in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung; ist $V(x, u, B) = 0$ ihr Integral, so ist $V(x, y + Cz, B) = 0$ und somit auch

$$V(x, y - b + C(z - c), B) = 0 \quad (21a)$$

ein Integral von (18a); B, C sind ebenso wie b, c willkürliche Constanten.

Ganz ähnliche Erwägungen gelten für die Gleichungen (18b) und (18c). Setzt man, um ein Integral der ersten zu erhalten,

$$y = \psi(z + Ax) \quad z + Ax = v,$$

so folgt daraus

$$0 = \frac{dy}{dv} (p + A), \quad 1 = \frac{dy}{dv} q$$

und es tritt an die Stelle von (18b) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F\left(y, -A, \frac{1}{\frac{dy}{dv}}\right) = 0; \quad (20b)$$

ist $V(y, v, C) = 0$ ihr Integral, so ist $V(y, z + Ax, C) = 0$ und auch

$$V(y, z - c + A(x - a), C) = 0 \quad (21b)$$

ein Integral von (18b).

Um (18c) zu integrieren, setze man

$$z = \chi(x + By), \quad x + By = w,$$

woraus

$$p = \frac{dz}{dw}, \quad q = B \frac{dz}{dw};$$

hat man dann das Integral von

$$F\left(z, \frac{dz}{dw}, B \frac{dz}{dw}\right) = 0 \quad (20c)$$

in der Form $V(x, w, A) = 0$ erhalten, so ist $V(z, x + By, A) = 0$ und auch

$$V(z, x - a + B(y - b), A) = 0 \quad (21c)$$

ein Integral von (18c).

10. Die im vorigen Artikel behandelten drei Formen sind im Grunde genommen specielle Fälle der Gleichung

$$F(z - \alpha x - \beta y, p, q) = 0. \quad (22)$$

Das durch sie bestimmte abgeleitete System bildet nämlich eine Schaar zu $z = \alpha x + \beta y$ paralleler Ebenen und lässt alle Translationen parallel zu dieser Ebene zu. Ist also $V(x, y, z) = 0$ ein Integral dieser Gleichung, so ist auch

$$V(x - a, y - b, z - \alpha a - \beta b) = 0 \quad (23)$$

ein Integral, wenn a, b willkürliche Constanten bedeuten.

Man kann die vorliegende Gleichung auf eine der speziellen Formen, nämlich (18c), zurückführen durch die Substitution

$$x = X, \quad y = Y, \quad z - \alpha x - \beta y = Z;$$

bezeichnet man die Ableitungen von Z nach X, Y , respective mit P, Q , so hat man

$$p = P + \alpha, \quad q = Q + \beta$$

und es geht (22) über in

$$F(Z, P + \alpha, Q + \beta) = 0; \quad (24)$$

nach dem oben entwickelten Vorgange kann nun ein Integral dieser Gleichung ermittelt werden.

Die Gleichung

$$z = \alpha x + \beta y + pq \quad (22^*)$$

beispielsweise, welche unter diese Form fällt, verwandelt sich zunächst in

$$Z = (P + \alpha)(Q + \beta);$$

mit $X + BY = W$ führt dies zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$Z = \left(\frac{dZ}{dW} + \alpha \right) \left(B \frac{dZ}{dW} + \beta \right) \quad (24^*)$$

und nach Trennung der Variabeln zu

$$dW = \frac{2 B dZ}{-(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4 B Z}};$$

Integration gibt

$$W + A = \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4 B Z} + (\alpha B - \beta) l. [-(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4 B Z}],$$

demnach ist

$$x + B y + A = \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4 B (z - \alpha x - \beta y)} + (\alpha B + \beta) l. [-(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4 B (z - \alpha x - \beta y)}]$$

ein Integral der Gleichung (22*) und man erkennt leicht, dass es im Wesen unverändert bleibt, wenn man x, y, z der Reihe nach durch $x - a, y - b, z - \alpha a - \beta b$ ersetzt.

11. Eine weitere Gruppe von Differentialgleichungen, welche geometrisch gleiche Interpretation zulassen, bilden die Formen

$$F(y, z, p, q) = 0 \quad (25a)$$

$$F(z, x, p, q) = 0 \quad (25b)$$

$$F(x, y, p, q) = 0 \quad (25c)$$

Das abgeleitete System, welches die erste bestimmt, ist eine Schaar zur x -Axe paralleler Cylinder, in allen Punkten jeder Erzeugenden eines solchen Cylinders sind die zugehörigen Kegel (T) gleich und gleichliegend; daraus folgt, dass das durch die Gleichung bestimmte Elementensystem die Translationen parallel zur x -Axe zulässt, so dass, wenn $V(x, y, z) = 0$ irgend ein Integral dieser Gleichung ist, auch

$$V(x-a, y, z) = 0 \quad (26a)$$

ein Integral vorstellt, wenn a eine willkürliche Constante bedeutet. Ist ein singuläres Integral vorhanden, so kann es nur einer zur x -Axe parallelen Cylinderfläche entsprechen.

Ähnliche Bemerkungen gelten bezüglich der beiden anderen Gleichungen und man kann jedem ihrer Integrale die Form

$$V(x, y-b, z) = 0 \quad (26b)$$

beziehungsweise

$$V(x, y, z-c) = 0 \quad (26c)$$

ertheilen.

12. Die obigen drei Gleichungen sind wieder specielle Fälle einer allgemeinen Differentialgleichung, nämlich

$$F(z-\alpha x, z-\beta y, p, q) = 0, \quad (27)$$

deren Elementensystem invariant bleibt bei den Translationen parallel zur Geraden

$$\alpha x = \beta y = z; \quad (28)$$

wenn daher $V(x, y, z) = 0$ ein Integral dieser Gleichung ist, so kann ihm mittelst der willkürlichen Constanten a die Form

$$V\left(x - \frac{a}{\alpha}, y - \frac{a}{\beta}, z - a\right) = 0 \quad (29)$$

verliehen werden.

Man kann die Gleichung (27) durch Einführung neuer Variablen auf den Fall (25 c) zurückführen; als neue unabhängige Veränderliche wähle man

$$X = z - \alpha x, \quad Y = z - \beta y,$$

als neue abhängige Variable eine dem Abstände des Punktes x, y, z von der zu (28) normalen Ebene $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + z = 0$ proportionale Grösse, setze also

$$Z = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + z;$$

die Auflösung dieser drei Gleichungen nach den ursprünglichen Variablen gibt

$$x = \frac{-\frac{X}{\alpha^2} + \frac{Y}{\beta^2} + Z}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 1\right)}, \quad y = \frac{\frac{X}{\alpha^2} - \frac{Y}{\beta^2} + Z}{\beta\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 1\right)},$$

$$z = \frac{\frac{X}{\alpha^2} + \frac{Y}{\beta^2} + Z}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 1};$$

führt man auf dieser Grundlage die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial X} = p \frac{\partial x}{\partial X} + q \frac{\partial y}{\partial X},$$

$$\frac{\partial z}{\partial Y} = p \frac{\partial x}{\partial Y} + q \frac{\partial y}{\partial Y}$$

aus und bezeichnet mit P, Q die partiellen Differentialquotienten von Z nach X, Y , so ergibt sich nach einiger Rechnung

$$p = \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{P+Q}, \quad q = \frac{\alpha(1+\beta^2)Q}{P+Q}$$

und somit heisst die Gleichung (27) in den neuen Variabeln

$$F\left(X, Y, \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{Q+P}, \frac{\alpha(1+\beta^2)Q}{P+Q}\right) = 0 \quad (27^*)$$

und dies ist conform mit (25c).

Als Beispiel diene die Gleichung

$$\frac{(z-\alpha x)^\mu}{(z-\beta y)^\nu} = \frac{p}{q};$$

durch Anwendung der entwickelten Substitution geht sie über in

$$\frac{X^\mu}{Y^\nu} = \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{\alpha(1+\beta^2)Q}$$

oder

$$\frac{\alpha X^\mu}{1+\alpha^2 P} = \frac{\beta Y^\nu}{1+\beta^2 Q};$$

bezeichnet man den willkürlichen gemeinsamen Werth dieser Verhältnisse mit A , so ergibt sich

$$P = \frac{X^\mu}{\alpha A} - \frac{1}{\alpha^2}, \quad Q = \frac{Y^\nu}{\beta A} - \frac{1}{\beta^2}$$

und durch Integration der Gleichung $dZ = PdX + QdY$, wenn man gleich wieder die ursprünglichen Variabeln einführt, zunächst

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + z = \frac{(z-\alpha x)^{\mu+1}}{\alpha(\mu+1)A} + \frac{(z-\beta y)^{\nu+1}}{\beta(\nu+1)A} - \frac{z-\alpha x}{\alpha^2} - \frac{z-\beta y}{\beta^2} + B,$$

nach Ausführung aller Reductionen, und wenn man schliesslich für die willkürlichen Constanten A, B neue C_1, C_2 einführt mittelst der Gleichungen

$$A\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 1\right) = C_1, \quad AB = -C_2,$$

so ergibt sich als Integral die Gleichung

$$C_1 z + C_2 = \frac{(z - \alpha x)^{\mu+1}}{\alpha(\mu+1)} + \frac{(z - \beta y)^{\nu+1}}{\beta(\nu+1)},$$

an der man ohneweiters erkennt, dass sie im Wesen ungeändert bleibt bei der durch (29) angedeuteten Transformation.

13. Die bisher behandelten Gleichungsformen bieten die einfachsten Beispiele solcher Differentialgleichungen dar, in deren Integralen überschüssige Constanten auftreten können.¹ Vollständige Integrale der Gleichungen (15), dann (18) und (22), endlich (25) und (27), in den Formen (16), beziehungsweise (19) und (23), schliesslich (26) und (29) geschrieben, enthalten der Reihe nach fünf, vier, drei willkürliche Constanten. Trotzdem aber umfasst ein solches Integral nur dieselben ∞^4 Elemente, welche durch die betreffende Differentialgleichung defnirt sind, diese aber in mehrfacher Zählung. Es gibt sich dieser Umstand dadurch zu erkennen, dass die Constanten, welche man wegen der Verschiebbarkeit des Elementensystems (nach ∞^2 , ∞^1 , respective ∞^0 Richtungen) im Integral anbringen kann, schliesslich doch nur eine Abänderung an den eigentlichen Integrationsconstanten herbeiführen, also strenge genommen keine wirkliche Verallgemeinerung des Integrals bewirken.

14. Schliesslich möge noch die verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung

$$z = px + qy + f(p, q) \quad (30)$$

von den hier entwickelten Gesichtspunkten aus betrachtet werden. Das abgeleitete System, welches sie darstellt, ist eine Schaar von ∞^2 Ebenen; jede Ebene dieser Schaar stellt in Verbindung mit jedem ihrer Punkte ein Element der Gleichung dar, ist daher eine Integralfläche; in Folge dessen bedeutet die Gleichung (30), wenn man in ihr p, q als willkürliche Constanten auffasst, ein vollständiges Integral eben dieser Gleichung,

¹ Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 475 f. — Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 23.

wenn man sie als Differentialgleichung deutet; es ist also das zu (30) gehörige ursprüngliche Flächensystem durch

$$z = ax + by + f(a, b) \quad (31)$$

darstellbar.

Auch die folgende Schlussweise kann bei der Gleichung angewendet werden. Bringt man, unter p, q bestimmte Werthe sich denkend, die durch (30) dargestellte Fläche des abgeleiteten Systems mit irgend einer Ebene derselben Stellung, z. B.

$$z = px + qy + C \quad (32)$$

zum Schnitt, so erhält man eine unendlich ferne Gerade, die gemeinsame Stellung von (30) und (32); diese Gerade ist die zur Ebene (32) gehörige Curve (C); im Allgemeinen wird also eine Ebene nur in den Punkten ihrer unendlich fernen Geraden von Integralflächen berührt. Nur wenn $C = f(p, q)$, fallen die Ebenen (30) und (32) in eine zusammen und jeder Punkt dieser Ebene wird Berührungspunkt einer sie tangirenden Integralfläche, infolge dessen ist die Ebene selbst auch eine Integralfläche; die Curve (C) ist in diesem Falle unbestimmt insoferne, als jede in der Ebene gezogene Linie als solche angesehen werden kann.

Wenn man, den in Art. 7 entwickelten Vorgang befolgend, die dort mit (13), (14) bezifferten Gleichungen bildet, so lauten sie wie folgt:

$$\begin{aligned} z &= px + qy + f(p, q), \\ p - p &= 0, & q - q &= 0, \\ x + \frac{\partial f}{\partial p} &= 0, & y + \frac{\partial f}{\partial q} &= 0; \end{aligned}$$

der Umstand, dass die Gleichungen der zweiten Zeile identisch, d. h. durch alle Werthe von x, y, z, p, q erfüllt sind, bedeutet, dass alle Elemente des abgeleiteten Systems zugleich Elemente des ursprünglichen Systems sind; eliminirt man also p, q zwischen den übrig bleibenden drei Gleichungen, so erhält man eine Integralfläche, das singuläre Integral als Einhüllende des abgeleiteten und zugleich des ursprünglichen Systems.

Die Clairaut'sche Gleichung ist der analytische Ansatz für ein Problem, das eine Fläche zu bestimmen verlangt aus einer Eigenschaft ihrer Tangentialebene, die von der Lage des Berührungspunktes in der Ebene unabhängig und daher von allen ihren Punkten gleichmässig erfüllt ist. Bringt man nämlich die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x, y, z der unbekannten Fläche

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

auf die Form

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy, \quad (33)$$

so nimmt man wahr, dass der Abschnitt dieser Ebene auf der z -Axe, nämlich $z - px - qy$, im Allgemeinen abhängig ist von x, y, z, p, q , also von der Stellung der Ebene und der Lage des Berührungspunktes; soll er nur von der Stellung abhängig sein, so muss er sich auf eine Function von p, q allein, z. B. $f(p, q)$ reduciren, so dass

$$z - px - qy = f(p, q) \quad (34)$$

wird. In der That erkennt man, nachdem dies in (33) eingetragen worden, dass jeder Punkt der Ebene (33) in (34) an Stelle von x, y, z gesetzt werden kann. Die Gleichung (34), welche ein derartiges Problem charakterisirt, ist aber die oben als Clairaut'sche bezeichnete.

Verlangt man beispielsweise eine Fläche zu finden derart, dass der aus dem Ursprunge nach dem Berührungspunkte der Tangentialebene gezogene Strahl mit dieser einen gegebenen Winkel $\text{arc sin } k$ bildet, so wird diese Forderung ausgedrückt sein durch

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k$$

und hieraus ergibt sich als Abschnitt der Tangentialebene auf der z -Axe

$$z - px - qy = k \sqrt{(1 + p^2 + q^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

ein Ausdruck, der von p, q und x, y, z abhängt.

Wird dagegen nach einer Fläche gefragt, deren Tangentialebenen einen gegebenen Abstand r vom Ursprunge haben, so drückt sich diese Forderung in der Gleichung

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = r$$

aus und der Abschnitt der Tangentialebene auf der z -Axe

$$z - px - qy = r \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

ist von p, q allein abhängig.

Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission

von

G. Jaumann.

(Mit 3 Textfiguren.)

Im Folgenden wird der Nachweis erbracht 1., dass die emittirenden Schwingungen der leuchtenden Körper eine nachweisbare und messbare Dämpfung aufweisen und 2., dass sie nicht durch zufällige Impulse, sondern durch den continuirlichen Einfluss eines periodischen Vorganges excitirt werden.

1. Dämpfung der Emission und continuirliche Spectren.

Man betrachtet gegenwärtig ein continuirliches Spectrum wie den Grenzfall eines Linienspectrums, in welchem die Zahl der Linien unendlich gross ist. Nach Newton sind unendlich viele verschiedene Farben im weissen Licht vorhanden. Thatsächlich kann man aus diesen Farben wieder weisses Licht zusammensetzen.

Es ist nun unwahrscheinlich, dass es die beste Art ist, den Emissionsvorgang darzustellen, wenn man angibt, der weissglühende Körper sende unendlich viele Schwingungen aus. Man dürfte desshalb zu einer so complicirten Darstellung gekommen sein, weil es der Natur dieses Vorganges überhaupt nicht angemessen ist, das emittirte Licht als eine Summe von periodischen Schwingungen darzustellen. Um hingegen den Dispersionsvorgang zu verstehen, ist Newton's Darstellung die beste.

Die verschiedenen Farben eines Spectrums werden für incohärent gehalten. Dies ist ein Umstand, welcher schwerlich jemals direct bewiesen werden kann. Wohl aber kann das

Gegentheil, falls es zutrifft, indirect bewiesen werden. Wenn die Farben eines continuirlichen Spectrums cohärent sind, so lassen sie sich zusammensetzen. Das Ergebniss dieser Integration kann die untersuchte Lichtwelle als eine einfache, wenn auch nicht periodische Function darstellen. Wäre nun die Emission der so resultirenden unperiodischen Welle an sich aus anderen Gesichtspunkten verständlich, so könnte man hoffen, damit zu einem Aufschluss über die Natur der Emission gekommen zu sein und wird dann auch die Voraussetzung zugeben, dass die verschiedenen Farben des betrachteten continuirlichen Spectrums cohärent sind.

Die Intensität der Farben eines continuirlichen Spectrums ist eine Function der Schwingungsperiode u .¹ Bezeichne da die Amplitude einer solchen Schwingung, d. h. die Wurzel aus der Intensität der gesammten Strahlung zwischen den Perioden u und $(u + du)$, so wird gelten

$$da = f(u) du.$$

Die Theilschwingung selbst stellt sich durch

$$da \sin ut = f(u) du \sin ut,$$

worin t die Zeit bedeutet, dar. Sind alle diese Schwingungen cohärent und gleichphasig, so werden sie sich zu einer resultirenden Schwingung zusammensetzen, welche gegeben ist durch das Integral

$$\varphi(t) = \int_0^\infty f(u) \sin ut \, du, \quad 1)$$

welches über das ganze Spectrum zu erstrecken ist. $\varphi(t)$ stellt dann die wahre Emission dar.

In dieser Richtung kann man jedoch nicht weiter kommen. Es fehlt an experimentellen Bestimmungen der $f(u)$, da nur sehr wenig bolometrische Messungen vorliegen und diese nicht für solche continuirliche Spectren, welche man für einfach halten konnte.

¹ Als Schwingungsperiode wird hier bezeichnet der Quotient $\frac{2\pi}{\tau}$, worin τ die Schwingungsdauer bedeutet.

Man muss den umgekehrten Weg einschlagen, nämlich von einer Voraussetzung über die Natur der Emission, also der Function $\varphi(t)$ ausgehen. Am nächsten liegt nun die Vermuthung, dass die Emission unter starker Dämpfung erfolge.

Die emittirende Schwingung wird dann wie alle gedämpften Schwingungen das Gesetz befolgen:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(t) = Ae^{-\kappa t} \sin pt \\ p^2 = u_1^2 - \kappa^2 \end{array} \right\} \quad 2)$$

und κ die Dämpfungsconstante, ferner u_1 die Periode der ungedämpften Schwingung bedeutet.

Diese Schwingung $\varphi(t)$ dauert von $t = 0$ bis $t = \infty$ ehe sie verlöscht. Eine solche Schwingung lässt sich nach dem Fourier'schen Theorem nicht in eine discrete, wenn auch unendliche Reihe von Sinusschwingungen zerlegen, sondern nur in ein Continuum derselben. Die Amplitudenvertheilung in diesem continuirlichen Spectrum findet man mittelst des Fourier'schen Integrals:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin tu \, du \int_0^\infty \varphi(t) \sin ut \, dt.$$

Es ist hiebei vorausgesetzt, dass die Partialschwingungen gleichphasig mit der resultirenden Schwingung sind, welche Voraussetzung nothwendig ist, wenn man verlangt, dass das Spectrum im infrarothem und ultravioletten Theile (für $u = 0$ und $u = \infty$) verschwindende Intensität habe.

Durch den Vergleich des Fourier'schen Integrals mit Gleichung 1) ergibt sich, dass die gesuchte Amplitudenvertheilung sich darstellt durch:

$$f(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t) \sin ut \, dt.$$

Man erhält endlich nach Einführung der in Gleichung 2) ausgesprochenen Annahme über die Natur der Function $\varphi(t)$ und Ausführung der Integration:

$$f(u) = \frac{4}{\pi} A \kappa p \cdot \frac{u}{(\kappa^2 + p^2 + u^2)^2 - 4p^2 u^2} \quad 3)$$

Die Periode U , für welche $f(u)$ ein Maximum aufweist, bestimmt sich durch

$$U^2 - \frac{2}{3} (p^2 - \kappa^2) U^2 - \frac{1}{3} (p^2 + \kappa^2)^2 = 0$$

Es existirt also innerhalb des Integrationsbereiches $u = 0$ bis $u = \infty$ nur ein Maximum der $f(u)$. Dieses Maximum liegt stets zwischen $u_1 = \sqrt{p^2 + \kappa^2}$ und p , und rückt für abnehmende Dämpfungen (beim Anglühen) näher an u_1 heran. Fig. 1 stellt diese Verhältnisse dar.

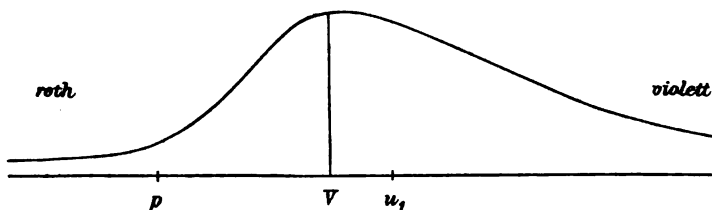


Fig. 1.

Wenn die Dämpfung nicht fast aperiodisch ist, so ist die Verschiebung des Maximums aus der ungedämpften Periode u_1 also $(u_1 - U)$ stets von zweiter Ordnung unmerklich klein.

Der Übergang von einer ungedämpften Sinusschwingung zu dieser Zerlegung einer gedämpften Schwingung entspricht so sehr dem Übergang von einer scharfen Spectrallinie in eine verbreiterte Spectrallinie, dass anzunehmen ist:

Die Verbreiterung der Spectrallinien erklärt sich durch eine Dämpfung, welche die emittirende Schwingung erfährt.

Eine verbreiterte Linie ist im wesentlichen ein continuirliches Spectrum. Das Spectrum der meisten weissglühenden Körper dürfte bestehen aus einer Überdeckung mehrerer verbreiteter Linien.¹

¹ Von früheren Erklärungen der Verbreiterung der Spectrallinien sind folgende zu erwähnen:

Zöllner (Pogg. Ann., 1871) nimmt an, dass die Gase immer continuirliche Spectren aussenden, deren Intensität in allen Theilen unmerklich klein ist, ausser

Die Emission eines festen oder flüssigen glühenden Körpers oder eines verdichteten Gases unterliegt also einer Dämpfung. Der Werth der Dämpfungsconstanten α einer emittirten Schwingung lässt sich mit derselben Sicherheit angeben, mit welcher man die Intensitätsvertheilung in der verbreiterten Linie kennt.

Beispielsweise sei die Dämpfungsconstante für die Magnesiumlinie von der Wellenlänge $\lambda = 2852$ angegeben. Dieselbe verbreitert sich unter Umständen so sehr, dass noch bei der Wellenlänge 2950 die Lichtstärke den vierten Theil der maximalen Lichtstärke, die Amplitude $f(u)$ also die Hälfte der maximalen Amplitude $f(U)$ ausmacht. Mit diesen Zahlen berechnet sich aus Gleichung 3) die Dämpfungsconstante zu:

$$\alpha = 10^{13.19} \text{ sec}^{-1},$$

d. h. die Amplitude der emittirenden Schwingung sinkt schon während fünf Schwingungen im Verhältniss $e : 1$ ab.

Einen noch extremeren Fall von Dämpfung zeigt die Wasserstoffemission unter höherem Druck. Die für gewöhnlich beobachtbaren Verbreiterungen von Spectrallinien sind jedoch

in den Spectrallinien des Gases. Bei grösserer Dichte des Gases wird das continuirliche Spectrum merklich. Diese Meinung ist nicht unrichtig, aber im Grunde genommen inhaltslos.

Lippich, (Pogg. Ann., 1870) bringt die Verbreiterung der Linien vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie mit der Abweichung vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze in Beziehung.

Kayser (Winkelmann's Handb. der Phys., 1894) erklärt sie vom Standpunkt der Moleculartheorie durch die secundären Wirkungen des bei grösserer Dichte häufigeren Zusammenstosses der Moleküle.

Lockyer schliesst auf Dissociation der Elemente, aus der Verbreiterung ihrer Spectrallinien.

Ebert (Wied. Ann., 1889) erklärt die Verbreiterung durch die schwingende Bewegung der Moleküle in der Visirlinie und das Doppler'sche Princip.

Es wurde auch die Ansicht ausgesprochen, dass es sich bei Verbreiterung von Duplets um eine Abweichung zufolge der grossen Amplitude der ausgesendeten Lichter handle, nach Art der Combinationstöne.

Das Fourier'sche Theorem wurde meines Wissens nur von Stoney (Phil. Mag., 1871) auf Spectralprobleme bezogen, aber ohne Erfolg, da er demselben nichts entnahm als die Vermuthung, dass in dem Spectrum harmonische Schwingungen vorhanden sein müssten, was nicht der Fall ist.

sehr klein, man erkennt, dass erst nach 50 bis 100 Schwingungen die Amplitude von ϵ auf 1 absinkt.

2. Periode der Excitation. Die Banden und Serien.

Wenn die emittierende Schwingung gedämpft ist, so muss bei fortdauerndem Leuchten eine Ursache vorhanden sein, welche diese emittierende Schwingung von Zeit zu Zeit wieder excitirt. Diese Excitation könnte nun in ganz zufälligen und unregelmässigen Pausen, oder aber periodisch erfolgen.

Wir wollen letzteres annehmen und zusehen, zu welchen Folgerungen dies führt.

Wenn die Excitation periodisch ist, so gewinnt der Emissionsvorgang, obgleich er gedämpft ist, wieder eine Periode, nämlich die der Excitation.

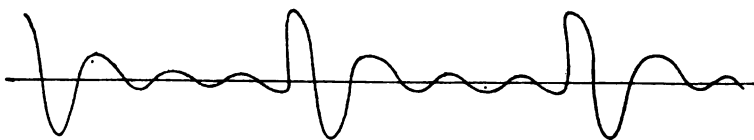


Fig. 2.

Fig. 2 stellt eine derartige Schwingung dar.

Nun als eine periodische Function zerlegt sich die Schwingung am Prisma nach Fourier in eine Summe von discreten Sinusschwingungen, deren Perioden ganzzahlige Vielfache der Functionsperiode, hier der Excitationsperiode, sind.

Eine periodisch excitirte Emission sendet also ein Linienspectrum aus. Die Schwingungszahlen dieser Linien stellen alle ganzzahligen Vielfachen der Excitationszahl dar.

Die Excitationszahl pro Secunde ist nun jedenfalls viel kleiner als die Schwingungszahl der emittirenden Schwingung, da viele gedämpfte Schwingungen der Emission vorübergehen werden, ehe wieder eine Excitation erfolgt. Desshalb liegen auch die Vielfachen der Excitationszahl einander sehr nahe und das ausgesendete Spectrum wird durch zahlreiche, der Schwingungszahl nach äquidistante Linien fein gestreift erscheinen.

Die Differenz der Schwingungszahlen zweier dieser Linien ist gleich der Excitationszahl pro Secunde.

Damit ist noch nichts über die Stärke dieser Linien ausgesagt. Aus der Convergenz der Fourier'schen Reihe ergibt sich, dass sie im äussersten Ultraviolett immer schwächer werden müssen. Im Infrarothern brauchen sie aber nicht etwa stärker zu sein als im sichtbaren Spectrum. Sie können dort auch schwächer sein oder ganz verschwinden. Ferner brauchen auch dort, wo sie stark sind, nicht alle zu erscheinen, sondern es können irgend welche gesetzmässige Auslassungen zwischen ihnen vorkommen, indem die Amplitude der so ausfallenden Schwingungen sich durch die Natur der dargestellten periodischen Function als gleich Null bestimmt.

Wie diese Amplitudenvertheilung sich nun im gegebenen Falle bestimmt, ist leicht vorauszusehen. Je länger das Excitationsintervall ist, desto feiner gestreift wird das Spectrum sein und wenn die Zeit zwischen zwei Excitationen so lang ist, dass die emittirende Schwingung Zeit hat, fast ganz abzuklingen, so wird das Spectrum fast genau continuirlich sein und eine nach dem Gesetz des vorigen Capitels vertheilte Lichtintensität aufweisen.

Bei grösseren Excitationszahlen wird es discontinuirlieh, gestreift, sein, im Wesentlichen aber dieselbe Intensitätsvertheilung aufweisen. Es wird eine Spectralbande respective eine Spectralserie darstellen.

Die Schwingungszahlen n aller Linien einer Bande bestimmen sich nach Deslandres (Compt. rend. 1889, 1890) durch das Gesetz

$$n = a \pm bx^2,$$

worin a und b Constante und x die ganzen Zahlen darstellt. Die Differenz je zweier Schwingungszahlen sind also ganzzahlige Vielfache der Constanten b und deshalb ist diese die Excitationszahl pro Secunde. Die ganze oft aus hunderten von Linien bestehende Bande wird emittirt durch eine einfache, gedämpfte, periodisch excitirte Sinusschwingung.

Deslandres stellt z. B. die Schwingungszahlen der 63 Linien der Bande $\lambda = 3914.6\text{—}3827.4$ am negativen Pol des Funkens in Stickstoff von normalem Druck dar durch

$$\frac{1}{3} 10^{-12} n = 255.45 + 0.001534(x-1)^2.$$

Es treten somit für diese Schwingung während 255450 Emissionsschwingungen etwas über anderthalb (genau 1.534) Excitationen ein.

Eine Leuchtgasbande bei $\lambda = 3891.5\text{—}4033.8$, welche 20 Linien aufweist, stellt Deslandres dar durch

$$\frac{1}{3} 10^{-12} n = 257.04 - 0.02078(x-1)^2.$$

Hier kommen also auf ungefähr dieselbe Zahl emittirender Schwingungen, nämlich auf 257040 nicht weniger als 20.78 Excitationen.

Dabei kann man aus der Lichtvertheilung in einer solchen Bande auch die Dämpfung der emittirenden Schwingung abschätzen, sowie im vorigen Capitel gezeigt wurde.

Die Linie Nr. 11 $\lambda = 3936.4$ der erwähnten Leuchtgasbande ist die lichtstärkste. Nach beiden Seiten nimmt die Lichtstärke ab. Sie dürfte ungefähr bei der Linie Nr. 5 $\lambda = 3902.4$ den vierten Theil erreicht haben.

Hieraus berechnet sich die Dämpfungsconstante zu

$$\kappa = 10^{13}.3.9 \text{ sec}^{-1}$$

Das Leuchtgas emittirt also eine Schwingung von der Wellenlänge 0.000394 mm , welche so gedämpft ist, dass ihre Amplitude nach je 21 Schwingungen im Verhältniss von $e : 1$ absinkt und welche nach je 12360 Schwingungen neu excitirt wird.

3. Abweichungen von der Intensitätsvertheilung und vom Deslandres'schen Gesetz.

Die Intensitätsvertheilung in den Banden, seltener in den verbreiterten Linien ist unter Umständen eine einseitige. Ich

bringe dies vorläufig in Zusammenhang mit dem Auftreten von Schwingungsduplets und Triplets, welches direct beobachtbar ist. Es sind dies simultane Schwingungen von gegebenem Amplituden verhältniss. Verbreitern sich beide, so entsteht eine einseitige Intensitätsvertheilung nach Fig. 3, welche die Intensitätsvertheilung der Componenten des Duplets gestrichelt, die resultirende Vertheilung voll ausgezogen darstellt.

Balmer (Wied. Ann., 1885) stellt die Serien genauer durch

$$n = a + b\kappa^{-2}$$

dar, während Kayser und Runge (Abhandl. d. Berl. Akad., 1890, 1891, 1892) mit der Formel

$$n = a + b\kappa^{-2} + c\kappa^{-4}$$

noch bessere Übereinstimmung erzielen. Mit erster Annäherung stimmt diese Formel mit der Deslandres'schen überein, nur muss man die Zählung am anderen Ende der Serie beginnen.

In voller Genauigkeit gilt also die Deslandres'sche Formel nicht. Es folgt hieraus, dass die Excitation zwar mit erster Annäherung periodisch genannt werden kann, es aber nicht

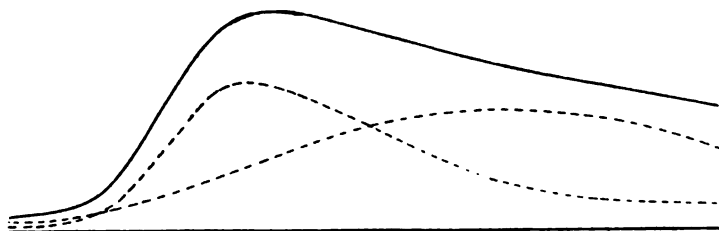


Fig. 3.

völlig ist. Da aber doch eine grosse Gesetzmässigkeit der Excitation vorhanden sein muss um die Streifung nach dem Gesetz von Kayser und Runge zu bewirken, so drängt sich mir die Vermuthung auf, dass die Excitation nicht durch periodische Anstösse, sondern durch den continuirlichen Einfluss einer excitirenden Schwingung bewirkt wird, welche fast periodisch ist, aber deshalb nicht völlig periodisch, weil sie selbst gedämpft ist.

Als Bild vergleiche man die Schwingung einer Stimmgabel, welche durch einen Fiedelbogen angestrichen wird, der nicht gleichförmig, sondern gedämpft sinusförmig bewegt wird.

Ist die excitirende Schwingung gedämpft, so braucht sie selbst wieder eine excitirende Ursache und diese Excitation zweiter Stufe kann entweder durch einen zufälligen gelegentlichen Anlass erfolgen, oder selbst wieder periodisch sein. In letzterem Falle wird ausgesendet werden statt einer Serie von Linien eine Serie von Banden wie dies beispielsweise bei der Bandengruppe von Stickstoff bei $\lambda = 5000\text{—}2800$ der Fall ist.

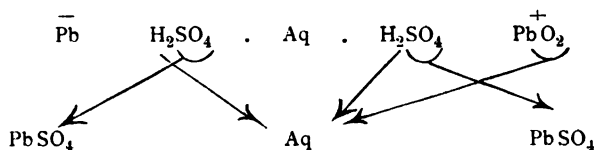
Über die thermochemischen Vorgänge im Secundär-Elemente

von

Franz Streintz.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Graz.

Die chemische Energie in einem Secundärelemente kommt dadurch zu Stande, dass auf Kosten der im Elektrolyte befindlichen Schwefelsäure an beiden Platten Bleisulfat ausgeschieden wird. Wendet man die von Pfaundler¹ für die Prozesse in einigen constanten Ketten gewählte übersichtliche Darstellung an, so erhält man als Ausdruck für die gemachte Behauptung das nachstehende Schema:



Dabei wird auf begleitende Nebenerscheinungen, bestehend in der Bildung der Verbindung H_2PbO_3 , in der Absorption von H durch die negative Platte und endlich in der Ausscheidung von freien Gasen,² keine Rücksicht genommen. Ferner ist vorausgesetzt, dass bei der Entladung sämtliche Säure zur Salzbildung verbraucht wird.

Um die chemische Energie zu berechnen, zerlegt man sich vortheilhaft den Entladungsvorgang in drei Phasen.

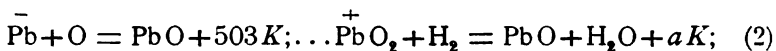
¹ Pfaundler, Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, III, S. 578, 1888—1890.

² Streintz und Neumann, Wied. Ann., 41, 1890, S. 111 enthält die vollständigen Gleichungen.

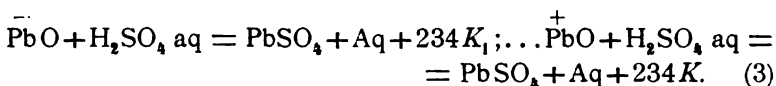
In der ersten Phase wird durch die Thätigkeit der Ionen 2H^+ und SO_4^{--} Wasser zerlegt; für diesen Vorgang gilt die Gleichung



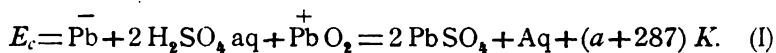
Der Sauerstoff erscheint an der negativen Platte, dieselbe oxydirend; der Wasserstoff reducirt das an der positiven Platte befindliche Superoxyd in Monoxyd unter Bildung von Wasser; es ergibt sich



da die Metalloxyde neben freier Säure nicht bestehen können, so tritt in der dritten Phase Sulfatbildung ein; die thermochemische Gleichung ist für beide Elektroden dieselbe und lautet:



Durch Addition der Gleichungen in (1), (2) und (3) erhält man für die chemische Energie



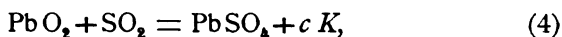
Bei Elementen mit grösserem Gehalt an Säure ist die jeweilige Verdünnungswärme derselben durch das bei der Entladung gebildete Wasser als additives Glied hinzuzufügen; auch wird die Lösungswärme des Bleisulfates in der Schwefelsäure zu berücksichtigen sein.

Sieht man von diesen Umständen zunächst ab, so beschränkt sich das thermochemische Problem auf die Aufgabe, die unbekannte Wärmetönung a direct oder indirect zu ermitteln oder mit andern Worten, das Bleisuperoxyd in irgend eine stabile Verbindung, deren potentielle chemische Energie bekannt ist,

¹ Die in der Abhandlung vorkommenden thermochemischen Angaben und Bezeichnungen sind dem Lehrbuch der allgemeinen Chemie (II. Band, 1893) von Ostwald entnommen. — Die Arbeit, welche gegen den Atmosphärendruck durch Entstehung von 1·5 Grammmolekülen Knallgas geleistet wird, wurde nicht berücksichtigt, da die Gase in der zweiten Phase wieder verschwinden.

unter Beobachtung der bei der Reaction auftretenden Wärme überzuführen.

Hiezu erschien ein Versuch geeignet, der in Vorlesungen über Experimentalchemie vorgeführt wird. In einem Kolben hängt ein Mousselinbeutelchen, das pulverförmiges Superoxyd enthält; leitet man einen lebhaften Strom von Schwefeldioxyd in denselben ein, so entsteht Bleisulfat unter so beträchtlicher Erhitzung der Substanz, dass das einhüllende Gewebe verbrennt. Bezeichnet man die entwickelte Wärme mit c , so ergibt sich



wobei noch die Arbeit beim Verschwinden des Gases zu berücksichtigen wäre.

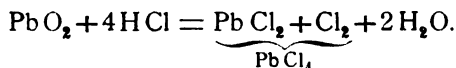
Sollen brauchbare Messungen dieser Reactionswärme angestellt werden, so musste vor Allem das organische Gewebe durch ein neutrales Behältniss für das Pulver ersetzt werden. Zu diesem Behufe dienten der Reihe nach Körbchen aus feinstmaschigem Platinnetz, Glaswolle, Glimmerplättchen.

Einige orientirende Versuche ergaben, dass der Gasstrom von SO_2 nur geringe Mengen der Substanz umzusetzen im Stande ist; infolge dessen waren die zu erwartenden absoluten Wärmemengen klein; man musste demnach zum empfindlichsten Instrumente, dem Eis calorimeter greifen.

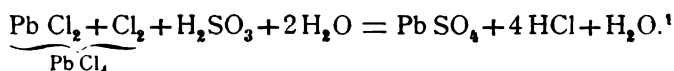
Leider stellte es sich heraus, dass die Intensität der Reaction bei der niedrigen Temperatur (der Gasstrom war selbstverständlich vor seinem Eintritte in das Reagirglas des Calorimeters auf 0° gekühlt worden) ganz bedeutend geschwächt wird. Es musste daher eine Vorwärmung der Substanz vorgenommen werden durch eine kleine Platinspirale, der auf galvanischem Wege eine genau gemessene Wärmemenge zugeführt wurde. Trotzdem blieb auch nunmehr der überwiegende Theil des Pulvers unverändert. Der Quecksilberfaden im Capillarrohr des Calorimeters hatte jedoch grössere Bewegungen vollzogen, so dass noch Hoffnung vorhanden war, es werde sich durch Wägungen vor und nach dem Versuche der Werth c ermitteln lassen. Die Resultate standen jedoch in keiner Übereinstimmung unter einander, so dass sich die Vermuthung aufdrängte, es sei durch die galvanische Erwärmung

ein veränderlicher Bruchtheil des Superoxydes in Monoxyd übergegangen.

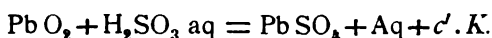
Es war daher ein anderer Weg einzuschlagen, welcher auch schliesslich zum Ziele führte. Aus Versuchen ergab sich, dass schwefelige Säure (H_2SO_3 aq) allein nicht im Stande ist, Pb O_2 zu verändern. Concentrirte Salzsäure jedoch zerstört das Superoxyd unter Bildung von Bleichlorid (Pb Cl_2) Bleitetrachlorid (Pb Cl_4) und unter Entwicklung von freiem Chlor nach der Formel



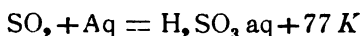
Einzelnen ist somit keine von beiden Säuren für den gewünschten Zweck zu verwerthen; wohl aber, wenn man aus ihnen eine entsprechende Mischung herstellt. Dann wird das Blei an SO_4 , das Chlor an H gebunden, entsprechend der Gleichung



Da der in der Mischung enthaltene Chlorwasserstoff keiner Veränderung durch den Process unterliegt, das Entstehen von einem Molekül Wasser aber mit Rücksicht auf den Überschuss von Wasser in der Lösung nicht in Betracht kommt, so kann man für beide neben einander verlaufenden Reactionen die thermochemische Gleichung aufstellen



Mit Zuhilfenahme des Werthes



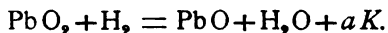
ergibt sich

$$c - c' = 77 K. \quad (5)$$

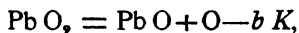
Gasförmiges SO_2 tritt nicht auf; der Atmosphärendruck leistet somit keine Arbeit, noch wird eine solche gegen ihn verrichtet.

¹ Es ist nicht ausgeschlossen, dass ein Theil des Bleies an Cl_2 gebunden bleibt. Da jedoch die Neutralisierungswärme des Chlorbleies (223 K) jener des Sulfates (234 K) nahezu gleichkommt, so ist dadurch eine Fehlerquelle nicht zu befürchten.

Um nun an Stelle von a in der Gleichung für die chemische Energie den experimentell auszumittelnden Werth c' zu erhalten, verfährt man folgendermassen. Es war



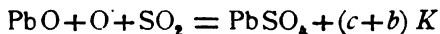
Bezeichnet man die Wärme, welche entwickelt wird, wenn Monoxyd in Superoxyd übergeführt wird mit b , also



so gibt die Differenz dieser beiden Gleichungen die Bildungswärme des Wassers, d. h.

$$a + b = 684 K, \quad (6)$$

ferner lässt sich Gleichung (4) in die Form bringen



und da



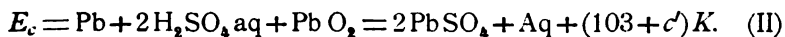
so ergibt sich



Die Wärmetönung dieses Vorganges ist zu 644 K bestimmt worden; daraus folgt

$$c + b = 945 K. \quad (7)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5), (6) und (7) können also a , b , c und c' berechnet werden, sobald eine dieser vier Grössen bekannt ist. Sollen a , b oder c für sich bestimmt werden, dann kommt noch die durch die Gase geleistete Arbeit entsprechend zu berücksichtigen. Hingegen ist bei Einführung des Werthes c' in die Gleichung für die chemische Energie an den Zahlen, welche sich für $(a + b)$ und für $(b + c)$ ergaben, keine Correction in diesem Sinne vorzunehmen. Es lehrt dies eine einfache Überlegung. Die Gleichung lautet nunmehr



Zur Bestimmung von c' war zunächst wieder das Eis-calorimeter ausersehen. Allein der Nachtheil einer nicht vollkommen verlaufenden Reaction trat auch hier ein und zudem war es misslich, dass man wegen der Einrichtung dieses Instrumentes nicht in der Lage war, den Verlauf des Processes mit den Augen zu verfolgen. Ich bediente mich daher einer

Einrichtung, welche von Nernst¹ mit Erfolg angewendet wurde. Ein kleines dünnwandiges Becherglas mit etwa 300 cm³ Fassungsraum, dessen Rand abgesprengt war, stand auf drei Korkschnitten in einem weiten Batteriegelas, das mit einem Holzdeckel versehen war. Der Holzdeckel enthielt zwei Ausschnitte; der eine diente dazu, die gewogenen Mengen Superoxyd einzuführen und war für gewöhnlich bedeckt; der andere seitliche hielt ein in Zehntelgrade getheiltes Thermometer, dessen Kugel bis nahe an den Boden des Becherglases reichte.

In das Becherglas wurden ungefähr 200 cm³ der Mischung von Salzsäure und schwefeliger Säure gegossen. Um die entsprechende Mischung zu erhalten, gingen einige orientirende Versuche voraus, die ergaben, dass die bei gewöhnlicher Temperatur durch Absorption des SO₂ von Wasser hergestellte schwefelige Säure zum glatten Verlauf der Reaction nicht kräftig genug sei. Es wurde daher das Gas, das sich beim Erhitzen von Kupferspänen mit concentrirter Schwefelsäure entwickelte, zunächst in einem Schlangenrohr, welches von schmelzendem Schnee umgeben war, gekühlt und dann in einen gleichfalls gekühlten Glaskolben mit destillirtem Wasser so lange eingeleitet, bis dieses zu erstarren begann, d. h. bis sich das feste Hydrat (SO₂ · 7 H₂O) ausschied. Auf diesem Wege erhielt man Säure von 12 bis 13 Gewichtsprocenten. 40 Volumtheile davon wurden dann mit 30 Volumtheilen reiner concentrirter Salzsäure von 38·2 Gewichtsprocenten vermischt. Wenn man nun in diese Mischung das pulverförmige PbO₂ tauchte, so ging der Process der Überführung in PbSO₄ allerdings sehr rasch von statten, es wurden aber Nebel von SO₂ ausgestossen, was vermieden werden musste. Dies war dadurch zu erreichen, dass man 150 bis 160 cm³ der Mischung die auf ungefähr 200 cm³ ergänzende Menge Wasser zusetzte.

Das Bleisuperoxyd war aus einer Lösung von Bleiacetat und Kalilauge durch Einleiten von Chlor gefällt, dann durch Dekantation ausgewaschen, bis das Waschwasser weder Chlor- noch Bleireaction zeigte. Mit Salpetersäure gekocht gab es kein Blei ab, war somit frei von Oxyd. Es wurde, nachdem es sorg-

¹ Nernst, Theoretische Chemie, S. 468, 1893.

fältig bei einer Temperatur, die 100° nicht überstieg, getrocknet war, feingepulvert in einer Platinschale aufbewahrt, welche in einem Exsiccator stand.

Die Bestimmungen geschahen in der Weise, dass zunächst eine Wägung der Platinschale vorgenommen wurde. Dann entnahm man mittelst eines kleinen Glaslöffels der Schale eine Quantität Superoxyd und brachte dieselbe in ein Körbchen aus feinstmaschigem Platinnetz, dessen Drähte einen Durchmesser von 0.06 mm besaßen. Zur Herstellung des Körbchens wurden an den vier nach aufwärts gebogenen Ecken des quadratischen Netzes Platindrähte eingehackt, welche ober der Mitte dieses vereint um einen stärkeren Platindraht, der zum Theil in ein Glasrohr eingeschmolzen war, geschlungen wurden. Das Glasrohr diente als Stiel, mit der Flüssigkeit in Berührung kam nur Platin. Eine Wägung der Schale nach dem Versuche gab die Menge des verbrauchten PbO_2 an. Nach Ablauf von einer Minute war die Lösung milchig und am Boden des Becherglases begann sich schneelig weisses Sulfat niederzuschlagen. Das Körbchen hatte nunmehr durch weitere drei bis vier Minuten als Rührvorrichtung zu dienen.

Es handelte sich nun darum, die Wasserwerthe der verschiedenen Bestandtheile, an welche Wärme durch den chemischen Vorgang abgegeben worden war, zu ermitteln. Der Wasserwerth des in die Mischung tauchenden Thermometerstückes wurde aus dem Volumen desselben zu 0.62 g , jener des Platinkörbchens aus dem Gewichte des Metalles zu 0.10 g , endlich der des Becherglases bis zu der Höhe, die das Niveau der Flüssigkeit einnahm, aus einer Wägung des Gefäßes, dessen Rand nach Beendigung aller Versuche bis zu dieser Niveaufläche abgesprengt war, zu 6.65 g bestimmt worden. Zur Ermittlung des Wasserwerthes der Mischung in der nach jedem einzelnen Versuche vorhandenen Zusammensetzung bediente man sich des Calorifers von Andrews, dessen Wärmehalt zwischen zwei festen Marken wiederholt bestimmt und im Mittel zu 11.20 K gefunden wurde. Die jeweilige Mischung wurde hiezu vorher auf 10° C. abgekühlt, so dass man, da die Erwärmung durch den Calorifer zwischen $6^{\circ}3$ und $6^{\circ}5$ betrug und die Zimmertemperatur bei 18° lag, bei stets steigendem Thermometer

beobachtete. Zur Anbringung der nöthigen Correcturen für den Temperaturgewinn waren die den entsprechenden Zeiten zukommenden Temperaturen zu verzeichnen.

Ganz in gleicher Weise musste verfahren werden, wenn an Stelle des Calorifers die Erwärmung das im Körbchen befindliche pulverförmige PbO_2 besorgte; 3 g der Substanz erhöhten die Temperatur der Mischung um $5^\circ 5$ C.

Das zu den Messungen verwendete Thermometer wurde in dem Intervalle, innerhalb dessen die Ablesungen geschahen, mit einem Normalthermometer aus Jenenser Glas im Wasserbade verglichen. Darauf ermittelte man die Fundamentalpunkte des letzteren und calibrierte es nach dem Rudberg'schen Verfahren durch Ablösen und Verschieben von Quecksilberfäden in der Länge von 50° , $30^\circ 3$ und $41^\circ 6$. Die so erhaltenen Correctionen wurden auf die Angaben des Versuchsthermometers übertragen.

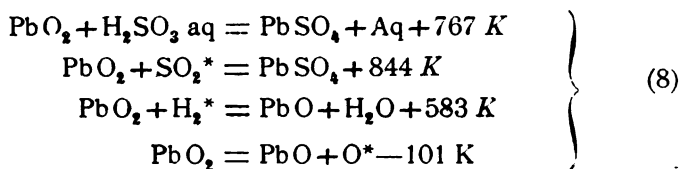
In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse der durchgeführten sechs Versuche zusammengestellt; sie befinden sich in genügender Übereinstimmung. Die erste Columnne enthält die Menge des umgesetzten Superoxydes in Grammen, die zweite die durch den Process hervorgerufene Temperaturerhöhung der Mischung. In der dritten ist die procentuelle Zusammensetzung von 100 cm^3 Säure, in der vierten die durch den Calorifer erzeugte Steigerung der Temperatur angegeben; in der letzten Columnne endlich befinden sich die auf ein Grammmolekül PbO_2 ($238 \cdot 2 \text{ g}$) bezogenen Resultate in rationellen Calorien.

PbO_2	$\tau - t$	Concentration der Säuremischung	$\tau' - t'$	c'
1. 2·5081	4°60	12·2 g HCl 4·3 g SO_2	6°40	773·1
2. 2·2214	4·05	13·1 g HCl 4·5 g SO_2	6·48	759·2
3. 2·8639	5·27	12·2 g HCl 5·1 g SO_2	6·43	771·8
4. 3·0235	5·55	12·2 g HCl 5·1 g SO_2	6·38	767·4
5. 3·0178	5·47	12·2 g HCl 5·1 g SO_2	6·34	771·1
6. 2·9278	5·26	12·2 g HCl 5·1 g SO_2	6·36	761·4

Die grössten Abweichungen von einander liefern die Versuche 1 und 2, sie betragen 1.8% . Als Mittelwerth ergibt sich

$$c' = 767.3.$$

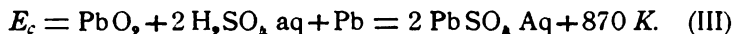
Man erhält somit nachstehende thermochemische Daten:



* Gas.

Es darf nicht verschwiegen werden, dass die Resultate in (8) mit einem Fehler behaftet sind. Das im Wasser unlösliche Bleisulfat löst sich nämlich theilweise in Salzsäure von der angewendeten Concentration. In der Zahl 767 ist daher auch die Lösungswärme eines Bruchtheiles des entstandenen PbSO_4 in HCl enthalten.¹

Für die thermochemische Energie des Secundärelementes ergibt sich die Gleichung



Nimmt man die Constante des Faraday'schen Gesetzes zu 96540 Coulomb an, erwägt man ferner, dass der Einheit der elektrischen Energie 0.00239 K entsprechen, so kommen unter Berücksichtigung, dass Blei ein zweiwerthiges Metall ist, 461.5 K auf ein Volt. Die aus den thermochemischen Grössen berechnete elektromotorische Kraft des Elementes folgt daraus zu

$$1.885 \text{ Volt.}$$

Wie schon eingangs erwähnt, liegt der vorliegenden Berechnung die Annahme zu Grunde, dass sämmtliche im Elektrolyte enthaltene Säure zur Bildung des Salzes verbraucht wird.

In der Untersuchung, welche über die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft vom Säuregehalte angestellt wurde,²

¹ Man vergleiche übrigens die Anmerkung auf Seite 288.

² Streintz, Wied. Ann., 46, S. 458, 1892.

zeigte es sich, dass das Element, dessen Säure die geringste von den verwendeten Concentrationen (spec. Gew. 1·055) hatte, die elektromotorische Kraft 1·900 Volt besass.

Mit Rücksicht auf die mannigfaltigen Fehler, welche sich der thermochemischen Rechnung gemäss aus fremdem und eigenem Beobachtungsmaterial ergeben, wird man dieses nahe Zusammentreffen der Werthe für die elektromotorische Kraft zum Theile einem günstigen Zufalle zuzuschreiben haben. Immerhin aber dürfte diese Mittheilung als ein Kriterium dafür anzusehen sein, dass sich die Processe im Secundärelemente in der geschilderten, verhältnissmässig einfachen Weise abspielen.

XIV. SITZUNG VOM 25. MAI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. b, der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. F. Exner übersendet eine im physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn M. v. Smoluchowski, betitelt: »Akustische Untersuchungen über die Elasticität weicher Körper«.

Ferner übersendet Herr Prof. F. Exner eine in demselben Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Bruno Piesch, betitelt: »Änderung des elektrischen Widerstandes wässeriger Lösungen und der galvanischen Polarisation mit dem Drucke«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien von dem Assistenten daselbst, dipl. Chemiker Carl Mangold, betitelt: »Einige Beiträge zur Kenntniss der Ricinusöl-, Ricinelaïdin- und Ricinstearolsäure«.

Der Secretär legt eine von Prof. J. V. Janovsky und Herrn K. Hanofsky in Reichenberg eingesendete Abhandlung vor, betitelt: »Analyse des Maffersdorfer Sauerbrunnens«.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine ichthyologische Abhandlung unter dem Titel: »Ichthyologische Beiträge« (XVII.) und beschreibt in der-

selben einige neue Arten, deren Mehrzahl von Dr. Holub in Südafrika entdeckt wurden.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Dr. Eugen v. Halácsy in Wien, betitelt: »Beitrag zur Flora von Aetolien und Acarnanien«.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht eine Abhandlung betitelt: »Ein Beitrag zur Kenntniss der 26-tägigen Periode des Erdmagnetismus«.

Herr Prof. Dr. J. Schaffer, Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine zweite vorläufige Mittheilung über den feineren Bau der Thymus, betitelt: »Über die Thymusanlage bei Petromyzon Planeri«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Chiru C., Canalisation des Rivières et les Irrigations. (Avec la charte hydrographique de la Roumanie.) — (Abhandlung in rumänischer Sprache.) Bukarest, 1893; 8°.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CHIL. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

**ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.**

XV. SITZUNG VOM 7. JUNI 1894.

In Verhinderung des Herrn Vicepräsidenten übernimmt Herr k. und k. Intendant Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—II (Jänner und Februar 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. a, der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner übersendet im Auftrage Ihrer königlichen Hoheit der durchlauchtigsten Frau Prinzessin Therese in Baiern eine »Vorläufige Mittheilung über einige neue Fischarten aus den Seen von Mexico«.

Herr Prof. Dr. V. Hilber an der k. k. Universität in Graz übersendet die Ergebnisse seiner im Auftrage der kaiserl. Akademie 1893 unternommenen Reise als vorläufige Mittheilung unter dem Titel: »Reise in Nordgriechenland und Makedonien«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über das Spectrum des Kaliums, Natriums und Cadmiums bei verschiedenen Temperaturen«, von Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und Herrn E. Valenta in Wien.
2. »Zur Einwirkung der Anilinbasen auf Benzoin«, von Dr. Br. Lachowicz in Lemberg.

Ferner legt der Secretär zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

1. Von den Herren Adam Walcz und Henryk Olechowski in Lemberg, welches angeblich die Skizze einer Abhandlung über eine technische Erfindung enthält;
2. von Herrn Carl Moser in Wien mit der Aufschrift: »Selbstwirkende Regulatorbremse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übergibt unter dem Titel: »Vergleichende physiologische Untersuchungen über die Keimung europäischer und tropischer Arten von *Viscum* und *Loranthus*« die vierte »pflanzenphysiologische Mittheilung aus Buitenzorg«.

Herr Prof. Dr. Oscar Simony überreicht eine von Herrn Dr. E. Suchanek in Wien ausgeführte Arbeit: »Über die dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen«.

Folgerungen aus Amagat's Versuchen

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1894.)

Die Untersuchungen Amagat's über das Verhalten comprimierter Flüssigkeiten haben eine Reihe wichtiger Thatsachen kennen gelehrt, deren theoretische Bedeutung vorerst noch nicht absehbar ist.

Allgemein und als augenfälligstes Resultat ergab sich, dass die Zunahme, welche der Ausdehnungscoefficient einer Flüssigkeit mit steigender Temperatur gewöhnlich zeigt, durch Compression sich vermindert, wobei selbst der stärkste Druck noch keine Grenze erreicht, so dass jener Coefficient schliesslich mit steigender Temperatur nicht mehr zu-, sondern abnimmt, also eine völlige Umkehrung des gewöhnlichen Verhaltens eintritt. Es dürfte schwer sein, diese bedeutungsvolle Thatsache mit der kinetischen Anschauung vom Wesen der Wärme in Einklang zu bringen, und es ist bisher, wie ich glaube, auch nicht versucht worden.

Dem ausgesprochenen Satze gemäss ist für die Flüssigkeiten allgemein

$$\frac{d^2 a}{dp dt} < 0$$

oder negativ, wobei

$$a = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

der hierdurch definirte Ausdehnungscoefficient ist und p , t , v die gewöhnliche Bedeutung haben.

Wenn $\frac{d^2a}{dpdt}$, wie es nach Amagat innerhalb der Grenzen seiner bezüglichen Versuche der Fall war, stets negativ bleibt, also der für gewöhnlich positive Quotient $\frac{da}{dt}$ bei jeder Temperatur durch Compression beständig abnimmt und endlich negativ wird, dann muss der für gewöhnlich negative Quotient $\frac{da}{dp}$ bei jeder Compression durch Temperaturniedrigung beständig zunehmen und endlich positiv werden. Diese Folgerung ist theoretisch unanfechtbar; für die Wirklichkeit ist aber zu beachten, dass eine Flüssigkeit durch Erkalten zuletzt immer erstarrt, wobei ihre Substanz eine Veränderung der Structur erfährt und ihr Verhalten sich mehr oder weniger sprungweise modificirt. Man kann daher nur sagen, dass jedenfalls, je tiefer der Erstarrungspunkt einer Flüssigkeit liegt, desto mehr Aussicht vorhanden sein muss, die erwähnte Folgerung an ihr vollständig verificirt zu sehen; es wird dabei weniger auf die absolute Lage jenes Punktes, als vielmehr darauf ankommen, dass er tief genug unterhalb der kritischen Temperatur liegt, deren Höhe für den Gang der Wärmeausdehnung unter gleichen Versuchsbedingungen am meisten massgebend erscheint. In dieser Hinsicht dürfte neben dem Wasser besonders das Quecksilber in Betracht kommen.

Halt- und Wendepunkte der Wärmeausdehnung.

Denkt man sich eine Flüssigkeit unter einem den kritischen um etwas übersteigenden Drucke stehend, so hat ihr Ausdehnungscoëfficient a bei einer Temperatur etwas ober der kritischen ein sehr starkes Maximum, wofür

$$\frac{da}{dt} = 0$$

ist. Bei einer Temperatur unterhalb seines Maximums hat a einen Wendepunkt, wo nämlich die Geschwindigkeit seiner Zunahme am grössten, also $\frac{da}{dt}$ ein Maximum und

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = 0$$

ist. Wie jener Werth von a wird auch dieser ähnlich starke Werth von $\frac{da}{dt}$ durch Compression vermindert.

Es sei die Flüssigkeit unter dem vorausgesetzten Drucke bis zur Temperatur des Wendepunktes von a erwärmt. Drückt man sie dann stärker zusammen, indem man zugleich die Temperatur so regelt, dass a immer in seinem Wendepunkte und somit die bezügliche obige Bedingung erfüllt bleibt, so hat man die Gleichung

$$d \frac{da}{dt} = \frac{d^2 a}{dp dt} dp,$$

wonach $\frac{da}{dt}$ auch in diesem Falle, wie bei constanter Temperatur, mit der Zunahme des Druckes abnimmt. Man kann so die Compression fortsetzen, bis

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0$$

wird. Hier ist das Maximum von a auf dessen Wendepunkt gerückt und fällt mit einem Minimum zusammen (erster Halt- und Wendepunkt). Für Drucke ober dieser Grenze ist $\frac{da}{dt}$ im Wendepunkte und daher als Maximum negativ; das für den kritischen Zustand unendlich grosse Maximum von a ist dann vollständig unterdrückt und verschwunden.

Aus diesem Halt- und Wendepunkte von a geht, gemäss der aus $\frac{da}{dt} = 0$ folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} dt + \frac{d^2 a}{dp dt} dp = 0,$$

bei Abnahme des Druckes das Maximum, an Grösse zunehmend, zunächst auf höhere Temperaturen über, und es mag sein schliesslicher Verlauf bis zum kritischen Punkte vorläufig ausser Betracht bleiben; das Minimum geht gleichzeitig, ebenfalls an Grösse zunehmend, auf immer tiefere Temperaturen herab.

Nach Amagat's Versuchen wird der Quotient $\frac{da}{dt}$, wenn er durch Compression negativ oder Null ist, durch Abnahme des Druckes, welches auch die Temperatur sei oder wie immer sie wechseln mag, jedenfalls zuletzt positiv. Jenes mit abnehmender Compression auf tiefere Temperaturen fortschreitende Minimum von a muss daher endlich auf einen Druck fallen, welcher der kleinste ist, wobei noch $\frac{da}{dt} = 0$ sein kann; für diesen kleinsten Druck wird in der entsprechenden obigen Gleichung das Differential $dp = 0$ und somit ist dann auch

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0;$$

hier trifft das Minimum von a mit einem Wendepunkte und einem Maximum zusammen (zweiter Halt- und Wendepunkt).

Von diesem Punkte aus kehrt bei Zunahme des Druckes das Minimum von a wieder auf höhere Temperaturen zurück, während das Maximum, wegen des negativen Werthes von $\frac{da}{dp}$ an Grösse abnehmend, auf immer tiefere Temperaturen hinabgeht.

Denken wir uns jetzt eine Flüssigkeit, für welche $\frac{da}{dp}$ positiv ist, so dass a bei einem ohnehin für gewöhnlich positiven Werthe von $\frac{da}{dt}$ sowohl durch Erwärmung, als auch durch Compression zunimmt. Es lässt sich dann bei Erniedrigung der Temperatur durch gleichzeitigen Druck bewirken, dass a constant bleibt, wobei die Gleichung

$$\frac{da}{dt} dt + \frac{da}{dp} dp = 0$$

stattfinden muss. Da nach den erwähnten Versuchen ein positiver Werth von $\frac{da}{dt}$ bei jeder Temperatur durch Compression endlich Null wird und das Vorzeichen wechselt, so muss man

bei einer unter der bezeichneten Bedingung fortgesetzten Compression jedenfalls zu einem Drucke kommen, welcher der grösste ist, wobei dieser Quotient noch positiv sein kann und wo derselbe also verschwinden muss. Für diesen grössten Druck wird in der vorigen Gleichung das Differential $dp = 0$ und zugleich

$$\frac{da}{dt} = 0;$$

aus derselben Gleichung ergibt sich aber für diesen Fall

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{da}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dt^2} = 0,$$

woraus folgt, dass hier, weil der Druck ein Maximum ist, $\frac{d^2a}{dt^2}$ positiv und a ein Minimum sein muss. In einer Flüssigkeit, für welche $\frac{da}{dp}$ positiv ist, gibt es demnach bei jedem Drucke eine Temperatur, bei welcher a ein Minimum wird; dasselbe geht dem Amagat'schen Satze gemäss mit steigender Compression auf höhere Temperaturen über.

In einer Flüssigkeit, für welche $\frac{da}{dp}$ bei hohen Temperaturen negativ und bei niedrigen positiv ist, geht nach dem Gesagten bei hinreichender Compression einerseits ein Maximum von a mit negativem $\frac{da}{dp}$ von oben her auf immer tiefere Temperaturen hinab, während anderseits ein Minimum mit positivem $\frac{da}{dp}$ von unten her zu immer höheren Temperaturen hinaufgeht; diese zwei Punkte müssen endlich in einem Wendepunkte zusammentreffen, für welchen

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0$$

wird (dritter Halt- und Wendepunkt). Da der Werth von $\frac{da}{dp}$ für das Maximum negativ und für das Minimum positiv ist,

so muss derselbe im Coincidenzpunkte verschwinden und das Vorzeichen wechseln.

Für den so erreichten Punkt ist daher einerseits wegen $\frac{da}{dt} = 0$:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} dt + \frac{d^2 a}{dp dt} dp = 0,$$

und anderseits wegen $\frac{da}{dp} = 0$:

$$\frac{d^2 a}{dp^2} dp + \frac{d^2 a}{dp dt} dt = 0;$$

durch Verbindung dieser zwei Differentialgleichungen ergibt sich:

$$\frac{d^2 a}{dp^2} dp^2 = \frac{d^2 a}{dt^2} dt^2$$

und man sieht, dass hier mit dem einen auch der andere der beiden zweiten Differentialquotienten von a verschwindet und folglich

$$\frac{d^2 a}{dp^2} = \frac{da}{dp} = 0$$

ist. Der hierdurch definirte Zustand einer Flüssigkeit ist aber derjenige, welchen ich in einer früheren Abhandlung,¹ wo ich denselben auf eine andere Weise erschloss, den peripetischen nannte. Man kann daher sagen: Im peripetischen Punkte einer Flüssigkeit geht ihr Ausdehnungscoëfficient sowohl als Function der Temperatur wie als Function des Druckes aus einem Maximum in ein Minimum über.

Von diesem durch Compression erreichten merkwürdigen Zustande aus kehrt bei Abnahme des Druckes das der Bedingung $\frac{da}{dt} = 0$ entsprechende Maximum von a mit negativen Werthen von $\frac{da}{dp}$ wieder auf höhere Temperaturen zurück,

¹ Diese Berichte, Bd. 98, Abth. II. a, S. 1341.

während das der gleichen Bedingung entsprechende Minimum mit positiven Werthen von $\frac{da}{dp}$ auf immer tiefere Temperaturen fortgeht.

Verlauf der Wärmeausdehnung für constanten Druck.

Im Vorigen haben sich für den Verlauf von α als Function der Temperatur in einer Flüssigkeit drei Wendepunkte und vier Haltpunkte, nämlich zwei Maxima und zwei Minima, ergeben. Der erste oder obere Wendepunkt fällt für den kritischen Zustand mit dem dann unendlich grossen Maximum von α zusammen; für Drucke unter dem kritischen bleiben daher zwei Wendepunkte, der mittlere und der obere, übrig; in jenem ist $\frac{da}{dt}$ ein Minimum, in diesem ein Maximum. Der mittlere Wendepunkt scheint bei den meisten Flüssigkeiten innerhalb oder nicht weit ausserhalb des Intervalles der gewöhnlichen Versuchstemperaturen zu fallen und ist dann aus empirischen Ausdehnungsformeln, wenn sie eine hinreichende Zahl von Constanten enthalten, immer nachweisbar; er liegt bei Wasser ober 100°, bei anderen Flüssigkeiten tiefer, sehr tief bei Alkohol.

Lässt man eine Flüssigkeit von ihrem kritischen Zustande aus bei constantem Drucke erkalten, so nimmt der Quotient $\frac{da}{dt}$ zuerst schnell, aber allmähig sich verlangsamen ab, bis er bei der Temperatur des mittleren Wendepunktes ein Minimum wird und weiterhin zunimmt. Dieses durch Compression abnehmende Minimum von $\frac{da}{dt}$ ist nun bei dem vorausgesetzten kritischen Drucke entweder noch positiv oder schon negativ; im ersten Falle nimmt der Ausdehnungscoefficient α sowohl vor wie nach Überschreitung des Wendepunktes ununterbrochen ab, im zweiten Falle hingegen hat derselbe ober dem Wendepunkte ein mehr oder weniger ausgeprägtes Minimum und unterhalb ein entsprechendes Maximum. Bei schwachen Drucken, wie der atmosphärische ist, findet fast allgemein nur das erstere Verhalten statt; verstärkt man aber dann den Druck mehr und mehr, so kommen endlich ein vom Wendepunkte aus

nach oben fortschreitendes Minimum und ein von demselben Punkte aus nach unten fortschreitendes Maximum von a zur Entwicklung. Die Versuche Amagat's lassen diesen Verlauf besonders am Äther, wo der Wendepunkt auf eine mittlere Temperatur fällt, sehr deutlich ersehen.

Wenn in Flüssigkeiten, deren kritische Temperatur mässig hoch ist, schon der mittlere Wendepunkt auf eine gewöhnliche oder auch niedrige Temperatur fällt, so muss natürlich der untere Wendepunkt, wenn nicht früher die Erstarrung eintritt, unterhalb der unteren Grenze der gewöhnlichen Versuche liegen. Nur bei Flüssigkeiten, deren kritische Temperatur besonders hoch ist, wird man erwarten dürfen, dass dieser Wendepunkt relativ hoch liegt und, wenn die Erstarrungstemperatur niedrig ist, ober derselben eintritt. Eine solche Flüssigkeit ist, wie ich glaube, das Quecksilber.

Der Werth von a nimmt bei Quecksilber¹ in niedriger Temperatur mit deren Erhöhung ab, bis er etwa bei 80° ein Minimum wird und dann zunimmt. In diesem Verlaufe wächst also $\frac{da}{dt}$ vorerst. Wie andere Flüssigkeiten, z. B. das Wasser ober 100°, aber jedenfalls bei einer viel höheren Temperatur, wird nämlich auch das Quecksilber einen Wendepunkt haben, wo jener Quotient ein Minimum ist. Von da an nimmt derselbe mit sinkender Temperatur zu und muss folglich bei einem gewissen tieferen Punkte ein Maximum werden; dies ist der untere Wendepunkt und das erwähnte, unterhalb desselben fallende Minimum von a ist ein unteres Minimum, für welches daher $\frac{da}{dp}$ positiv sein muss. Man kommt somit zu dem Schlusse, dass der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers in gewöhnlicher Temperatur durch Compression zunimmt. Diese Folgerung entbehrt indessen noch der experimentellen Bestätigung. Das Quecksilber würde hiernach, aber bis zu einer viel höheren Temperatur, ein ähnliches Verhalten zeigen wie das Wasser bis 63°.

¹ Nach Wüllner's Ausdehnungsformel in Poggendorf's Annalen, Bd. 153, S. 444.

Wenn diese Folgerung richtig ist, muss das bei Quecksilber vorkommende Minimum von a mit dem Drucke abnehmen. Bei der Kleinheit des gewöhnlichen Druckes hat eine solche Abnahme natürlich sehr bald eine Grenze; wenn es aber möglich wäre, die Flüssigkeit mechanisch oder durch einen allseitigen äusseren Zug stark auszudehnen, so würde man durch hinreichende Dehnung jenes Minimum von a auf Null bringen und negativ machen können.

Es lässt sich eine Flüssigkeit mit positivem $\frac{da}{dp}$ denken, für welche das untere Minimum von a einen gleichen Werth hat wie für Quecksilber, aber nicht unter dem atmosphärischen, sondern unter einem sehr starken Drucke. Indem mit dessen Verminderung jenes Minimum abnimmt, kann dasselbe bei einem gewissen Drucke Null werden; ein noch kleinerer Druck macht es dann negativ. Diesfalls gibt es jetzt zwei Temperaturen, wobei $a = 0$ wird: Die eine ist niedriger, die andere höher als diejenige, bei welcher a sein Minimum hat; bei ersterer ist die Dichte ein Minimum, bei letzterer ist sie ein Maximum. Mit Abnahme des Druckes geht der untere Nullwerth von a oder das Dichteminimum auf niedrigere, der obere Nullwerth oder das Dichtemaximum auf höhere Temperaturen über. Die Flüssigkeit würde also, von einer höheren Temperatur her erkaltend, zuerst ein Maximum und bei einer entsprechend niedrigen Temperatur ein Minimum ihrer Dichte erreichen. Es ist nun auch eine Flüssigkeit denkbar, welche durch Erkalten zwar ein Dichtemaximum erreicht, aber bald nach dessen Überschreitung erstarrt. Dies ist der Fall des Wassers.

Befindet sich Wasser bei dem gewöhnlichen Drucke im Dichtemaximum und ist somit für dasselbe $a = 0$, so kann man bei Erniedrigung der Temperatur durch Compression bewirken, dass diese Bedingung erfüllt bleibt. Da der für ein Dichtemaximum selbstverständlich positive Werth von $\frac{da}{dt}$ bei der auf solche Weise fortgesetzten Compression jedenfalls endlich Null wird, so muss man in deren Verlauf zu einem grössten Drucke kommen, wobei noch $a = 0$ und die Dichte ein Maximum sein kann. Für diesen Druck ist nach der bezüglichen

obigen Begründung $\frac{d^2a}{dt^2}$ positiv und der Nullwerth von a ein Minimum. Da der genannte Quotient für $a = 0$ bei 4° bekanntlich negativ ist, so muss er während des Überganges zu jenem letzten oder untersten Dichtemaximum irgendwo das Vorzeichen gewechselt haben; dies ist der untere, einem Maximum von $\frac{da}{dt}$ entsprechende Wendepunkt, welcher dem unteren Minimum von a vorangehen muss.

Bei dem grössten für $a = 0$ möglichen Drucke fällt das Maximum der Dichte mit dem entsprechenden, durch die Compression gleichzeitig aufwärts gerückten Minimum derselben zusammen (Halt- und Wendepunkt der Dichte). Das in diesem Punkte nullgleiche Minimum von a wird nun durch weitere Compression positiv; die Dichte der Flüssigkeit erreicht folglich dann bei keiner Temperatur mehr ein Maximum. Von einer diesbezüglichen Anomalie des Wassers kann daher nur insofern die Rede sein, als bei demselben das bei anderen Flüssigkeiten gewöhnliche Verhalten erst unter einem sehr starken Drucke eintritt. Diesen Einfluss des Druckes hat Amagat auf Grund seiner Versuche ausführlich hervorgehoben.

Ob sich Wasser bei dem dazu nöthigen Drucke bis zu der jedenfalls sehr niedrigen Temperatur des untersten Dichtemaximums flüssig erhalten lässt, muss allerdings dahingestellt bleiben; die Möglichkeit scheint aber nicht unbedingt ausgeschlossen zu sein. Dass übrigens die Druckzunahme, welche zur Verschiebung des Dichtemaximums um 1° nöthig ist, mit steigender Compression, der Annäherung an ein Maximum derselben gemäss, kleiner wird, ist in Amagat's bezüglich Angaben erkennbar ausgesprochen.

Erwähnenswerth ist noch, dass, weil das untere Minimum von a , mit steigender Compression auf höhere Temperaturen verschoben, schliesslich den peripetischen Punkt trifft, für diesen die Temperatur und der Druck nothwendig höher sind als für den Halt- und Wendepunkt der Dichte und dass folglich dort der Werth von a in jedem Falle positiv sein muss.

Man denke sich zum Schlusse eine Flüssigkeit so comprimirt, dass das obere, durch den kritischen Punkt bedingte

Maximum von a im oberen Wendepunkte mit dem bezüglichen Minimum coincidire. Dann ist $\frac{da}{dt} = 0$; lässt man jetzt bei constantem Drucke die Temperatur sinken, so wird dieser Quotient negativ, erreicht bei der Temperatur des mittleren Wendepunktes ein Minimum und nimmt dann zu, bis er bei einer niedrigen Temperatur wieder verschwindet; hier hat a ein Maximum und unterhalb desselben, jenseits des unteren Wendepunktes, ein Minimum. Durch stärkere Compression fallen endlich auch diese zwei Haltpunkte zusammen; der dann obwaltende Druck ist der peripetische. Für Drucke ober dieser Grenze nimmt a von einem beliebig tief liegenden Punkte an bis zu den höchsten erreichbaren Temperaturen ununterbrochen ab. Der gewöhnliche, nach der herrschenden Ansicht für selbstverständlich gehaltene Verlauf der Wärmeausdehnung erscheint dann vollständig umgekehrt. Die bisherigen Versuche Amagat's, obwohl bei den höchsten Drucken auf ein mässiges Temperaturintervall beschränkt, dürften in dieser Hinsicht schon gegenwärtig kaum einen Zweifel bestehen lassen.

Verlauf der Wärmeausdehnung für constante Temperatur.

Wenn in einer Flüssigkeit der für höhere Temperaturen stets negative Quotient $\frac{da}{dp}$ durch Erkalten positiv wird, so ist a im Punkte des Zeichenwechsels, wie für das Wasser auch experimentell feststeht, als Function des Druckes ein Maximum. Durch Compression nimmt dann a zuerst langsam, aber sich beschleunigend, ab; bei einem gewissen Drucke, einem Wendepunkte entsprechend, ist die Abnahme am schnellsten und wird dann wieder allmählig langsamer. Schliesslich muss a , der Existenz des peripetischen Punktes gemäss, stationär und ein Minimum werden; aber ein solches hat Amagat mit dem höchsten angewendeten Drucke bisher noch bei keiner Flüssigkeit erzielt. Der für das Maximum von a positive Quotient $\frac{da}{dt}$ wechselt, durch den genannten zweifachen Wendepunkt bedingt, bei dem Übergange das Vorzeichen und ist für das Minimum negativ.

Mit sinkender Temperatur kommen das Maximum und das Minimum, jenes auf grössere und dieses auf kleinere Drucke übergehend, einander immer näher, bis sie im peripetischen Punkte zusammenfallen; bei Temperaturen unterhalb dieses Punktes nimmt α durch Compression beständig zu und es ist nur noch ein Wendepunkt übrig, wo diese Zunahme am langsamsten ist.

Geht man von einem Punkte, wo α als Function des Druckes ein Maximum hat, zu dem der gleichen Temperatur entsprechenden Minimum unter der Bedingung über, dass dabei immer $\frac{d\alpha}{dp} = 0$ bleiben soll, so nimmt α zuerst, als Maximum verlaufend, verzögert ab, wird im peripetischen Punkte stationär und setzt dann, als Minimum verlaufend, seine Abnahme, nun beschleunigt, weiter fort.

Bei Quecksilber muss nach meiner betreffenden obigen Schlussfolgerung der peripetische Punkt jedenfalls höher liegen als das bei ungefähr 80° eintretende Minimum von α ; es wird daher bei dieser Flüssigkeit der Ausdehnungscoëfficient für jede gewöhnliche Temperatur durch Compression beständig, wenn auch sehr langsam, zunehmen.

Bei Wasser nimmt α für 0° nach Amagat sowohl mit dem Drucke wie mit der Temperatur zwar noch etwas, aber schon sehr langsam zu; hier dürfte also der peripetische Punkt, wo α in beiden Beziehungen stationär ist, nicht weit von 0° entfernt liegen und durch einen erheblich stärkeren Druck als 3000 Atmosphären wirklich erreichbar sein.

Erhöht man die Temperatur von dem Punkte an, wo α bei dem atmosphärischen Drucke sein Maximum hat, so geht dieses auf kleinere und daher negativ werdende Drucke über, wobei die Flüssigkeit nicht mehr bestandfähig ist, und endlich fällt sogar auch der Wendepunkt auf solche Drucke; dann nimmt α durch Compression von Anfang an mit fortwährend sich vermindender Geschwindigkeit ab. Bei Flüssigkeiten, deren kritischer Punkt mässig hoch liegt, tritt der letztere Fall thatsächlich schon bei gewöhnlichen Temperaturen ein.

Während sonach das Maximum von α von einer gewissen Temperatur an wegen der für diese Bedingung eintretenden

Instabilität der Flüssigkeit sich der Beobachtung entzieht und erst im kritischen Punkte wieder zum Vorschein kommt, geht das wegen Stärke der nöthigen Compression bisher dem Experimente gleichfalls unzugängliche Minimum mit steigender Temperatur auf höhere Drucke über, wobei, weil für dasselbe $\frac{da}{dt}$ negativ ist, a fortwährend abnimmt. Den schliesslichen Verlauf dieses Minimums, welches, sobald dessen Existenz sicher gestellt sein wird, eine wichtige Bedeutung erlangen dürfte, habe ich bereits in der oben citirten Abhandlung erörtert. Ich erwähne hier nur, dass ein durch hohe Temperatur bedingter Nullwerth und Zeichenwechsel von a jedenfalls zuerst in einem Minimum dieser Grösse eintreten wird.

Comprimirt man eine Flüssigkeit bei ihrer kritischen Temperatur, wo a als Function des Druckes ein Maximum $= \infty$ ist, so nimmt der diesbezügliche Werth des Productes pv zuerst ab, erreicht aber, wie man weiss, bald ein Minimum und fängt dann schnell zu wachsen an; hierbei nimmt das Product apv zuerst noch ab, muss aber ebenfalls bald ein Minimum werden, und erst nach dessen Überschreitung wird endlich auch der Eintritt des Minimums von a erfolgen. Immer aber, wenn bei Compression das Minimum von apv früher eintritt als dasjenige von a , muss letzteres noch positiv sein; sobald nämlich diese zwei Minima zusammenfallen, ist

$$a = \frac{da}{dp} = 0,$$

und die entsprechende Temperatur ist die niedrigste, wobei durch Erwärmung $a = 0$ (die Dichte ein Minimum) werden kann. Diese Temperatur liegt jedoch, wie es nach Amagat's Versuchen scheint, jedesmal weit ober der kritischen.

Verlauf der Zusammendrückbarkeit mit der Temperatur.

Zwischen dem Ausdehnungscoefficienten a und der Zusammendrückbarkeit

$$c = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dp}$$

besteht ihrer Bedeutung gemäss allgemein die einfache Beziehung

$$\frac{dc}{dt} = - \frac{da}{dp}.$$

Man sieht, dass, wenn a durch Compression abnimmt, c durch Erwärmung wächst, und dass umgekehrt, wenn a durch Compression wächst, c durch Erwärmung abnimmt. Ist a durch Druck ein Maximum, so ist, der Gleichung

$$\frac{d^2 c}{dt^2} = - \frac{d^2 a}{dp dt}$$

entsprechend, c durch Wärme ein Minimum.

Wie bei Wasser bis 63° , wird nach dem obigen auch bei Quecksilber, aber hier bis zu einem viel höheren Punkte, die Zusammendrückbarkeit mit steigender Temperatur abnehmen. Bisher liegt in dieser Hinsicht eine experimentelle Angabe nicht vor.

Wie für ein Maximum von a wird auch für das bei gleicher Temperatur durch hinreichende Compression zu erwartende Minimum wieder $\frac{dc}{dt} = 0$, wobei c gleicherweise wieder als Function der Temperatur ein Minimum ist. Beide Minima von c nähern sich mit sinkender Temperatur einander und im peripetischen Punkte fallen sie zusammen. Die hier stattfindende Temperatur ist die niedrigste, wobei die Zusammendrückbarkeit ein Minimum werden kann. Von diesem Punkte an nimmt dieselbe durch Erkalten, so lange die Flüssigkeit als solche bestehen bleibt, fortwährend zu.

Kritische Anomalie.

Denkt man sich eine Flüssigkeit unter einem den kritischen um etwas übersteigenden Drucke stehend, so hat ihre Zusammendrückbarkeit c bei einer Temperatur etwas ober der kritischen ein starkes Maximum, wofür

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

ist. Unterhalb ihres Maximums hat dieselbe einen Wendepunkt, wo sie am schnellsten zunimmt, und oberhalb einen zweiten Wendepunkt, wo sie am schnellsten abnimmt; für beide Wendepunkte ist

$$\frac{d^2c}{dt^2} = 0,$$

aber der Quotient $\frac{dc}{dt}$ ist im unteren ein Maximum und im oberen, wo er negativ ist, ein Minimum.

In dem Temperaturintervalle zwischen den zwei Wendepunkten und daher auch für das Maximum von c ist der Quotient $\frac{d^2c}{dt^2}$ negativ, wogegen derselbe unter- und oberhalb jenes Intervalles positiv ist. Vermöge der Gleichung

$$\frac{d^2c}{dt^2} = - \frac{d^2a}{dpdt}$$

ist folglich für Temperaturen innerhalb des genannten Intervalles

$$\frac{d^2a}{dpdt} > 0$$

oder positiv, während ausserhalb desselben, mit den Angaben Amagat's übereinstimmend, überall

$$\frac{d^2a}{dpdt} < 0$$

oder negativ ist. Jene durch die Existenz des kritischen Punktes bedingte Ausnahme vom gewöhnlichen Verhalten nenne ich die kritische Anomalie.

Für den kritischen Zustand fallen die zwei Wendepunkte von c mit dem dann unendlich grossen Maximum zusammen. Durch einen etwas stärkeren Druck, wie der vorausgesetzte ist, gehen die genannten drei Punkte mit ungleicher Geschwindigkeit, und daher sich von einander entfernend, alle zugleich auf höhere Temperaturen über. Die Verschiebung nach oben ist eine nothwendige Folge davon, dass im kritischen Punkte $\frac{dp}{dv} = 0$ ist und daher in seiner Nähe p und t für jede Zustands-

änderung annähernd so wechseln, als wenn v constant wäre. Das Intervall zwischen den Wendepunkten von c muss also von Anfang an mit steigender Compression sich erweitern.

Nach dem Gesagten ist der Quotient $\frac{d^3c}{dt^3}$ im unteren Wendepunkte negativ, im oberen positiv; zwischen beiden liegt daher eine Temperatur, bei welcher

$$\frac{d^3c}{dt^3} = 0$$

und somit der negative Werth von $\frac{d^2c}{dt^2}$ ein Minimum ist. Für den kritischen Zustand ist dieses Minimum $= -\infty$; durch Compression wird es schnell abgeschwächt, und es muss einen Druck geben, der dasselbe auf Null bringt. Lässt man bei der Compression die Temperatur so wechseln, dass $\frac{d^2c}{dt^2}$ immer in seinem Minimum und also die entsprechende obige Bedingung erfüllt bleibt, so wird man demnach zu einem Drucke kommen, wobei

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{d^3c}{dt^3} = 0$$

ist; hier fallen die zwei Wendepunkte zusammen und die kritische Anomalie ist verschwunden. Das Temperaturintervall, in welchem der Amagat'sche Satz nicht gilt, erweitert sich also durch Compression zuerst, erreicht dabei eine grösste Erstreckung und zieht sich dann zusammen, bis es zuletzt wieder, wie im kritischen Punkte, auf Null reducirt ist und von da ab entfällt.

Mit demjenigen von c fällt für den kritischen Zustand das Maximum von a zusammen. Ein etwas stärkerer Druck verschiebt auch dieses nach oben; da es zugleich an Grösse abnimmt, ist dann für dasselbe $\frac{da}{dp}$ negativ und somit $\frac{dc}{dt}$ positiv, woraus folgt, dass es nun zwischen dem Maximum und dem unteren Wendepunkte von c liegt. Es zeigt also eine Tendenz, sich dem letzteren Punkte zu nähern.

Der Verschiebung des Maximums von a nach oben entspricht der kritischen Anomalie gemäss ein positiver Werth

von $\frac{d^2 a}{dp dt}$. Da nun dieser Quotient, wo er positiv ist, bei hinreichender Compression nach und nach überall das Vorzeichen wechselt, so muss bei einem gewissen Drucke ein solcher Wechsel auch für die Temperatur des Maximums von a erfolgen; dann hat letzteres die höchste Temperatur erreicht, auf welche es fallen kann, und zugleich fällt es dabei mit dem unteren Wendepunkte von c zusammen. Durch weitere Compression geht dasselbe, diesen Punkt hinter sich lassend, auf immer tiefere Temperaturen herab, bis es mit dem gleichzeitig von unten her kommenden Minimum in dem bezüglichen Wendepunkte zusammentrifft.

Hiermit ist die im Früheren (S. 345) offen gelassene Frage nach dem Verlaufe dieses Maximums von a erledigt. Aus dem als erster Halt- und Wendepunkt der Wärmeausdehnung bezeichneten Zustande geht dasselbe nämlich bei Abnahme des hier den kritischen weit übersteigenden Druckes zunächst auf höhere Temperaturen über, erreicht dabei eine höchste Temperatur ober der kritischen und geht sodann immer tiefer herab, bis es bei dem kritischen Drucke auf die kritische Temperatur fällt.

Zusammendrückbarkeit ober der kritischen Temperatur.

Für das Maximum von c bleibt immer $\frac{da}{dp} = 0$, d. h. es ist bei demselben jedesmal a als Function des Druckes ein Maximum. Aus der bezüglichen Gleichung

$$\frac{d^2 c}{dt^2} dt = \frac{d^2 a}{dp^2} dp$$

ersieht man daher, dass das Maximum von c , so lange ein solches besteht, durch Compression nach oben zu gehen fortfährt.

Von jenem Zustande hoher Compression aus, wobei nach dem Vorigen die Wendepunkte von c coincidiren, geht der obere, d. h. derjenige, für welchen $\frac{dc}{dt}$ ein Minimum ist, bei Abnahme des Druckes auf höhere Temperaturen über, wogegen derselbe

vom kritischen Zustande aus, wie erwähnt wurde, bei Zunahme des Druckes auf höhere Temperaturen übergeht. Es gibt folglich für diesen Punkt eine höchste Temperatur, auf welche er fallen kann; hat er dieselbe durch Druck erreicht, so kehrt er auf stärkeren Druck um und geht zu tieferen Temperaturen zurück, also dem gleichzeitig von unten her nach oben fortschreitenden Maximum entgegen. Diese zwei Punkte müssen daher bei einem gewissen Drucke zusammentreffen; dann ist

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d^2c}{dt^2} = 0,$$

d. h. hier fällt das Maximum von c bei dem höchsten dafür möglichen Drucke mit einem Minimum zusammen (Halt- und Wendepunkt der Zusammendrückbarkeit). Von diesem Zustande aus geht bei Abnahme des Druckes einerseits das Maximum auf tiefere Temperaturen zurück, bis es dabei auf den kritischen Punkt trifft, während andererseits das Minimum (wie das Maximum mit der Bedingung $\frac{da}{dp} = 0$ zusammenfallend) auf immer höhere Temperaturen fortgeht.

Für Drucke ober dem kritischen bis zu einer gewissen Grenze hat demnach die Zusammendrückbarkeit c bei einer Temperatur ober der kritischen ein Maximum und bei einer entsprechend höheren Temperatur ein Minimum; für Drucke ober jener Grenze hat dieselbe kein Maximum und kein Minimum mehr, sondern nimmt mit steigender Temperatur ununterbrochen zu.

Es sei noch hervorgehoben, dass im Zustande der Coincidenz der Wendepunkte von c der Nullwerth von $\frac{d^2c}{dt^2}$ ein Minimum und somit $\frac{d^3c}{dt^3}$ positiv ist. Für höhere Temperaturen sind daher die ersten vier Differentialquotienten von c sämmtlich positiv. Ich halte diese Folgerung für weittragend; sie scheint anzudeuten, dass eine comprimirt Flüssigkeit bei Temperaturen ober der kritischen, also ein Gas, bei fortgesetzter Erwärmung durch stetiges und mit Beschleunigung fortschreitendes Wachsen der Zusammendrückbarkeit einem bisher unbe-

kannten Zustände von Instabilität, der Existenz eines oberen kritischen Punktes entsprechend, zugeht.

Wärmeausdehnung stark comprimierter Gase.

Nach vorstehender Bemerkung lässt sich jede gasförmige Substanz durch Druck und Wärme auf einen Zustand bringen, wobei dem Zusammenhange zwischen a und c gemäss die Differentialquotienten

$$\frac{da}{dp}, \frac{d^2a}{dpdt}, \frac{d^3a}{dpdt^2}, \frac{d^4a}{dpdt^3}$$

sämmtlich negativ sind. Man kann folglich dann jedesmal durch Compression bewirken, dass die Werthe von

$$\frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \frac{d^3a}{dt^3}$$

mit einander negativ ausfallen, dass also, während der Ausdehnungscoefficient mit steigender Temperatur beständig abnimmt, zugleich die Geschwindigkeit seiner Abnahme immer grösser wird. Durch solchen ersichtlich an das Verhalten stark comprimierter Flüssigkeiten sich anschliessenden Verlauf muss, wie es scheint, bei hinreichender Erwärmung nothwendig endlich $a = 0$, nämlich die Dichte ein Minimum werden, und zwar umso früher, je höher der ausgeübte Druck ist.

Indem ein so erreichtes Dichteminimum durch stärkeren Druck auf immer tiefere Temperaturen herabgeht, tritt zuletzt, weil a durch Compression ein Minimum wird, der schon oben erwähnte Zustand ein, für welchen

$$\frac{da}{dp} = a = 0$$

und die bezügliche Temperatur die niedrigste ist, wobei die Dichte ein Minimum werden kann. Diesen Zustand wenigstens am Wasserstoff experimentell zu verwirklichen, dürfte vielleicht nicht unausführbar sein. Vom genannten Punkte an als negativ verlaufend und in diesem Sinne beständig wachsend, würde der minimale Ausdehnungscoefficient bei einer immerhin schon

sehr hohen Temperatur den oberen kritischen Zustand, wofür $a = -\infty$ wäre, bedingen. Temperaturen von entsprechender Höhe darf man jedenfalls in der Astrophysik für annehmbar halten.

Das Gay-Lussac'sche Gesetz.

Bezeichnet T die absolute Temperatur, so kann der Bedeutung von a gemäss die Gleichung

$$aT = 1$$

als der Ausdruck des Gay-Lussac'schen Gesetzes gelten.

Der Ausdehnungscoefficient a ist für die Gase erfahrungsmässig auch unter gewöhnlichen Umständen vom Drucke nicht unabhängig; nach Amagat wächst er mit demselben, wird bei hinreichender Compression ein Maximum und nimmt dann ab. Angenommen also, es sei das Gay-Lussac'sche Gesetz für irgend eine Temperatur eines Gases von gewöhnlicher Dichte genau giltig und somit $aT = 1$, so wird durch Compression $aT > 1$; setzt man dieselbe fort, bis a sein Maximum überschritten hat und abnimmt, so kommt man zu einem Drucke, wobei wieder $aT = 1$ und daher das genannte Gesetz bei gleicher Temperatur ein zweitesmal genau giltig ist.

Den Einfluss der Temperatur betreffend, wird das Product aT für ein gewöhnliches Gas durch Erkalten nach und nach entschieden grösser und folglich umgekehrt durch Erwärmen kleiner. Bei gleichzeitiger Veränderung des Druckes und der Temperatur muss daher, wenn aT constant bleiben soll, die Gleichung

$$\frac{d(aT)}{dt} dt + T \cdot \frac{da}{dp} dp = 0$$

bestehen. Wie man sieht, geht die Erfüllung des Gay-Lussac'schen Gesetzes mit steigender Temperatur auf grössere Drucke über, bis auf solche Weise $\frac{da}{dp} = 0$, nämlich a ein Maximum wird; die dann stattfindende Temperatur ist die höchste, bei welcher eine Erfüllung des Gesetzes überhaupt möglich ist. Bei weiterer Compression kehrt die demselben entsprechende Bedingung, das Maximum von a

überschreitend, auf tiefere Temperaturen zurück, und es gibt aus diesem Grunde für jede Temperatur unterhalb jener höchsten zwei Drucke, wobei das Gesetz genau zutrifft.

Die Möglichkeit, dass die Gase bei ihrer Ausdehnung durch die Wärme annähernd das Gay-Lussac'sche Gesetz befolgen, erscheint hiernach für Temperaturen, welche eine gewisse, von der Natur der bezüglichen Substanz abhängige Grenze weitaus übersteigen, bei jedem Drucke völlig ausgeschlossen. Nach dem Sinne der betreffenden Abweichung kann man es für wahrscheinlich halten, dass der Ausdehnungscoefficient bei weit genug gehender Erwärmung in jedem Falle endlich das Vorzeichen wechselt, wenn auch die dazu nöthige Temperatur bei einem gewöhnlichen Drucke, mit dem Vorigen übereinstimmend, eine ausserordentlich hohe sein dürfte.

— — — — —



Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung

von

Emil Weyr, †

w. M. k. Akad.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1894.)

I. Allgemeine Sätze über Curven dritter Ordnung vom Geschlechte Eins.

1. Es sei $a_1 a_2 \dots a_n$ eine feste Gruppe einer Involution J_{n-1}^n n ten Grades ($n-1$)ter Stufe (in der Folge kurz bezeichnet mit J^n) auf einer C_3 , $x_1 x_2 \dots x_n$ eine variable Gruppe; dann soll J^n gegeben sein durch die Gleichung

$$x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

oder, indem man $a_1 a_2 \dots a_n$ mit k bezeichnet, durch

$$x_1 x_2 \dots x_n = k.$$

Da jede J^n n^2 n -fache Elemente besitzt, so hat die Gleichung $x^n = k$ n^2 Lösungen.

2. Liegen $x_1 x_2 x_3$ in einer Geraden, bilden sie also ein Tripel der fundamentalen J^3 , so sei $x_1 x_2 x_3 = k$. Liegen $x_1 x_2 \dots x_{3n}$ auf einer C_n , so sei $x_1 x_2 \dots x_{3n} = k^n$. Mit andern Worten: Sind abc

¹ Der Entwurf zu dieser Arbeit ist Mitte December 1892 begonnen und im Laufe des folgenden Jahres mit mehrfachen Unterbrechungen fortgesetzt worden. Die Ausführung hat der am 25. Jänner 1894 verstorbene Verfasser kurz vorher mir übertragen. Indem ich seinem Wunsche nachkomme, bitte ich, dass Mängel in der Darstellung mir zur Last gelegt werden mögen.

drei Punkte in gerader Linie, so sind $x_1 x_2 \dots x_{3n}$ dann auf einer C_n gelegen, wenn $x_1 x_2 \dots x_{3n} = (abc)^n$ ist.

3. »Wenn abc und ebenso $a'b'c'$ in gerader Linie liegen, so schneiden aa' , bb' , cc' die C_3 zum drittenmale in Punkten $a''b''c''$, die ebenfalls in einer Geraden liegen.« Denn aus

$$abc = k \quad \text{und} \quad a'b'c' = k$$

folgt

$$abc a' b' c' = k^2;$$

da ferner auch

$$a a'' = k \quad b b'' = k \quad c c'' = k,$$

so ist

$$abc a' b' c' a'' b'' c'' = k^3;$$

aus der Verbindung beider Resultate folgt thatsächlich

$$a'' b'' c'' = k.$$

4. Sind a, b correspondirende Punkte, t ihr gemeinsamer Tangentialpunkt und t' der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie, so ist

$$a^2 t = b^2 t = ab t',$$

somit

$$a^2 b^2 t^2 = (ab t')^2$$

oder $t^2 = t'^2$, d. h. t und t' sind ebenfalls correspondirende Punkte.

5. Werden zwei correspondirende Punkte a, b aus einem beliebigen Punkte (o) der C_3 auf diese nach a', b' projecirt, so hat man einerseits

$$a^2 = b^2 \quad (\text{wegen } a^2 t = b^2 t)$$

und andererseits

$$aa' = bb' \quad (\text{wegen } aa'o = bb'o);$$

aus dem zweiten Ansatz folgt $a^2 a'^2 = b^2 b'^2$ und daraus durch Division mit dem ersten $a'^2 = b'^2$, womit erwiesen ist, dass auch a', b' correspondirende Punkte sind.

6. »Liegen die sechs Punkte $abca'b'c'$ von C_3 auf einer C_4 , so schneiden aa' , bb' , cc' die Curve zum drittenmale in Punkten $a''b''c''$ einer Geraden.« Denn es ist

$$abca'b'c' = k^2$$

und

$$aa'a'' = bb'b'' = cc'c'' = k;$$

aus dem zweiten Ansätze ergibt sich

$$abc a'b'c' a'b'c'' = k^3,$$

demnach ist $a''b''c'' = k$, w. z. b. w.

7. »Berührt eine C_2 die C_3 in den Punkten abc , so liegen die Tangentialpunkte $a'b'c'$ von abc in einer Geraden.« Aus

$$a^2b^2c^2 = k^2$$

und

$$a^2a' = b^2b' = c^2c' = k$$

folgt nämlich zunächst $a^2b^2c^2a'b'c' = k^3$ und daraus durch Division mit der ersten Gleichung $a'b'c' = k$.

8. Ist a ein Inflexionspunkt von C_3 , so ist $a^3 = k$; ist b ein zweiter, so ist $b^3 = k$; ist x der dritte Schnittpunkt der \overline{ab} , so hat man $abx = k$, also $a^3b^3x^3 = k^3$, und da $a^3b^3 = k^2$, so ist $x^3 = k$, d. h. x ist auch ein Inflexionspunkt; es schneidet also die Verbindungslinie zweier Inflexionspunkte zum drittenmale wieder in einem solchen.

9. »Wenn $abcd$ ein Quadrupel auf C_3 ist, so gehören a, b und c, d einer J^2 an.« Das Paar ab bestimmt nämlich eine J^2 und ist x der in ihr dem c entsprechende Punkt, so ist $ab = cx$, also $a^2b^2 = c^2x^2$; nun ist aber $b^2 = c^2$, daher auch $a^2 = x^2$; es kann aber x weder mit a , noch mit b oder c identisch sein, also ist nothwendig $x \equiv d$, w. z. b. w. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass ac, bd und ad, bc je einer J^2 angehören.

10. Sind a, b zwei correspondirende Punkte, so ist $a^2 = b^2$ sind a', b' zwei correspondirende Punkte desselben Systems, so ist auch $a'^2 = b'^2$ und überdies $aa' = bb'$. Aus letzterer Gleichung folgt durch Multiplication mit $a'b'$

$$aa'^2b' = a'bb'^2,$$

und hieraus ergibt sich, wenn man die Gleichung $a'^2 = b'^2$ beachtet, $ab' = a'b$, d. h. die beiden Geraden ab' und $a'b$ schneiden sich in einem Punkte von C_3 .

11. »Liegen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf C_3 , so sind je zwei gegenüberliegende Ecken correspon-

dirende Punkte desselben Systems.« Es ist nämlich vermöge der Voraussetzung (siehe Fig. 1)

$$abc = ab'c' = a'bc' = a'b'c = k;$$

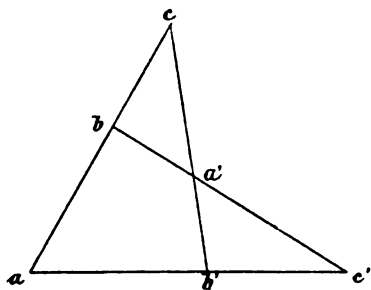


Fig. 1.

aus $abc = k$ und $ab'c' = k$ folgt aber $a^2 b c b' c' = k^2$ und aus $a' b c' = k$ und $a' b' c = k$ ergibt sich $a'^2 b c b' c' = k^2$; durch Vergleichung erhält man $a^2 = a'^2$; in ähnlicher Weise findet sich $b^2 = b'^2$ und $c^2 = c'^2$.

Da ferner, wie aus dem ersten Ansatz hervorgeht, $ab = a'b'$ und $ac = a'c'$, so gehören thatsächlich aa' , bb' und cc' zu demselben System.

12. Wenn die drei Punkte abc auf C_3 in gerader Linie liegen, so sei $abc = k$; die Gleichung $x^3 = k$ hat die neun Inflexionspunkte als die dreifachen Punkte der fundamentalen J^3 , welche die geraden Punktetripel der C_3 bilden, zur Lösung.

Sind dagegen abc Berührungspunkte einer dreifach berührenden C_2 , so muss $a^2 b^2 c^2 = k^2$ oder $(abc)^2 = k^2$, somit $abc = \sqrt{k^2}$ sein. Nun hat $\sqrt{k^2}$ vier Werthe; einer davon ist k , weil aus $abc = k$ sich $a^2 b^2 c^2 = k^2$ ergibt; durch die drei andern k_1, k_2, k_3 sind die drei J^3 :

$$1) a_1 b_1 c_1 = k_1$$

$$2) a_2 b_2 c_2 = k_2$$

$$3) a_3 b_3 c_3 = k_3$$

bestimmt, welche zu den drei Systemen der dreifach berührenden Kegelschnitte führen. Die Werthe k, k_1, k_2, k_3 entsprechen den vier aus der J^6 : $abcdef = k^2$ abgeleiteten J^3 .¹

Zwischen den k besteht die aus ihrer Definition unmittelbar fließende Beziehung

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = k_3^2.$$

¹ Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a.

Wählt man a, b beliebig, so gibt es vier C_2 , welche in a, b und nochmals in einem dritten Punkte x berühren; dieser ist definirt durch $a^2 b^2 x^2 = k^2$, oder wenn c den dritten Schnittpunkt von \overline{ab} bezeichnet, durch $a^2 b^2 x^2 = a^2 b^2 c^2$, woraus $x^2 = c^2$; dies gibt die vier Lösungen $x = c, x = c_1, x = c_2, x = c_3$.

Wenn wir also die Punkte, welche mit c gemeinsamen Tangentialpunkt haben, $c_1 c_2 c_3$ nennen, so ist $abc = k, abc_1 = k_1, abc_2 = k_2, abc_3 = k_3$, wodurch $k_1 k_2 k_3$ geometrisch definirt sind.

13. Hieraus ergeben sich die Sätze über die drei Systeme conjugirter Punkte; diese sind durch die drei Paare cc_1, cc_2, cc_3 als erstes, zweites und drittes System gegeben.

Aus den beiden Gleichungen $abc = k$ und $abc_1 = k_1$ erhält man durch Multiplication $abck_1 = abc_1 k$ und daraus die charakteristische Gleichung

$$ck_1 = c_1 k \text{ für das erste System,}$$

ebenso

$$ck_2 = c_2 k \text{ für das zweite System}$$

und

$$ck_3 = c_3 k \text{ für das dritte System.}$$

Auf dieser Grundlage lässt sich der folgende Satz erweisen:

• Sind abc drei Punkte in einer Geraden und $a_i b_i c_i$ die ihnen im i ten System conjugirten, so bilden diese ein Tripel der betreffenden J_i^3 , sind also Berührungspunkte einer dreifach berührenden C_2 . Es gelten nämlich die vier Gleichungen

$$abc = k$$

$$ak_i = a_i k$$

$$bk_i = b_i k$$

$$ck_i = c_i k;$$

die letzten drei geben durch Multiplication

$$abck_i^2 \cdot k_i = a_i b_i c_i k^2 \cdot k;$$

hieraus folgt wegen $k_i^2 = k^2$ und mit Beachtung der ersten Gleichung

$$a_i b_i c_i = k_i, \text{ w. z. b. w.}$$

Umgekehrt: »Ist $a_i b_i c_i$ ein Tripel der J_i^3 , so liegen die conjugirten Punkte im i ten System in einer Geraden.« Sind nämlich aa_i, bb_i zwei Paare desselben Systems, so ist

$$\begin{aligned} ak_i &= a_i k \\ bk_i &= b_i k; \end{aligned}$$

daraus ergibt sich durch Multiplication unter Beachtung von $k_i^2 = k^2$

$$ab = a_i b_i;$$

daher schneiden sich \overline{ab} und $\overline{a_i b_i}$ in einem Punkte der C_3 , er heisse c . Aus der letzten Gleichung folgt, wenn man sie mit a_i multiplicirt, $aa_i b = a_i^2 b_i$ und daraus wegen $a_i^2 = a^2$

$$a_i b = ab_i,$$

so dass auch $\overline{a_i b}$ und $\overline{ab_i}$ sich in C_3 schneiden in einem Punkte c' ; nach Artikel 11 ist c' der conjugirte Punkt zu c . Es lässt sich aber zeigen, dass $c' \equiv c_i$ ist. Denn vermöge des Umstandes, dass $ab_i c'$ ein gerades Tripel bilden, ist $c' = \frac{k}{ab_i}$, somit weiter $k_i c' = \frac{k k_i c_i}{ab_i c_i}$ oder, da $b_i c_i = bc$ und $abc = k$ ist, endlich $k_i c' = k_i c_i$, woraus thatsächlich $c' \equiv c_i$ folgt.

14. Es sei $a_i b_i c_i$ ein Tripel der J_i^3 , so dass $a_i b_i c_i = k_i$; ferner seien \overline{abc} der Reihe nach die dritten Schnittpunkte der $\overline{b_i c_i}, \overline{c_i a_i}, \overline{a_i b_i}$ mit C_3 ; man hat dann

$$\begin{aligned} ab_i c_i &= k \\ bc_i a_i &= k \\ ca_i b_i &= k, \end{aligned}$$

woraus sich durch Multiplication $abca_i^2 b_i^2 c_i^2 = k^3$ ergibt; es ist aber $a_i^2 b_i^2 c_i^2 = k_i^2 = k^2$, folglich $abc = k$, d. h. die drei Punkte abc liegen in gerader Linie.

Bezeichnet man weiter mit $\alpha\beta\gamma$ die dritten Schnittpunkte der Geraden aa_i, bb_i, cc_i mit der C_3 , so ist

$$\begin{aligned} \alpha a a_i &= k \\ \beta b b_i &= k \\ \gamma c c_i &= k, \end{aligned}$$

folglich $\alpha\beta\gamma abc a_i b_i c_i = k^3$; da aber $abc = k$, so ist weiter $\alpha\beta\gamma a_i b_i c_i = k^2 = k_i^2$, und wegen $a_i b_i c_i = k_i$ ergibt sich daraus $\alpha\beta\gamma = k_i$, d. h. die drei Punkte $\alpha\beta\gamma$ bilden ein Tripel des nämlichen Systems.

15. Wieder sei $a_i b_i c_i$ ein Tripel der J_i^3 ; $\alpha\beta\gamma$ mögen die Tangentialpunkte seiner Elemente sein; dann gilt

$$a_i^2 \alpha = b_i^2 \beta = c_i^2 \gamma = k,$$

woraus $a_i^2 b_i^2 c_i^2 \alpha\beta\gamma = k^3$; weil aber $a_i^2 b_i^2 c_i^2 = k_i^2 = k^2$, so folgt $\alpha\beta\gamma = k$, d. h. die Tangentialpunkte der Elemente eines Tripels der J_i^3 liegen in gerader Linie.

16. Es seien $a_i b_i c_i$ und $a'_i b'_i c'_i$ zwei Tripel desselben Systems, $\alpha\beta\gamma$ die dritten Schnittpunkte der $\overline{a_i a'_i}$, $\overline{b_i b'_i}$, $\overline{c_i c'_i}$ mit C_3 ; dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_i b_i c_i &= a'_i b'_i c'_i = k_i, \\ \alpha a_i a'_i &= \beta b_i b'_i = \gamma c_i c'_i = k; \end{aligned}$$

aus den drei letzten folgt $\alpha\beta\gamma a_i b_i c_i a'_i b'_i c'_i = k^3$, aus den zwei ersten $a_i b_i c_i a'_i b'_i c'_i = k_i^2 = k^2$; daher ist $\alpha\beta\gamma = k$, d. h. es liegen $\alpha\beta\gamma$ in einer Geraden.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen: »Sind $a_i b_i c_i$ die Punkte eines Tripels, $\alpha\beta\gamma$ drei Punkte in gerader Linie auf C_3 , $a'_i b'_i c'_i$ die dritten Schnittpunkte von $\overline{a_i \alpha}$, $\overline{b_i \beta}$, $\overline{c_i \gamma}$, so sind $a'_i b'_i c'_i$ auch die Punkte eines Tripels desselben Systems.«

17. Zwischen den vier Werthen $kk_1k_2k_3$ bestehen bemerkenswerthe Relationen. Es ist (Artikel 12)

$$abc = k, \quad abc_1 = k_1, \quad abc_2 = k_2, \quad abc_3 = k_3;$$

aus dem ersten Gleichungspaar folgt

$$a^2 b^2 c c_1 = k k_1,$$

aus dem zweiten

$$k_2 k_3 = a^2 b^2 c_2 c_3,$$

daraus weiter durch Multiplication

$$k k_1 c_2 c_3 = k_2 k_3 c c_1;$$

nun bilden aber $c c_1 c_2 c_3$ ein Quadrupel, daher ist $c c_1 = c_2 c_3$; ergibt sich die erste Gleichung des Systems

$$\begin{aligned}
 kk_1 &= k_2k_3 \\
 kk_2 &= k_3k_1 \\
 kk_3 &= k_1k_2
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

daneben bestehen die Gleichungen

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = k_3^2. \tag{2}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (1) ergibt sich durch Multiplication mit k_3 $kk_2k_3 = k_3^2k_1$ und daraus wegen (2) die erste Gleichung des Systems

$$\begin{aligned}
 kk_2k_3 &= k_1^3 \\
 kk_3k_1 &= k_2^3 \\
 kk_1k_2 &= k_3^3
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Es ist ferner $kk_1^2 = kk_2^2 = k^3$, ebenso $k_1k_2^2 = k_1k_1^2 = k_1^3$, allgemein

$$k_ik_i^2 = k_i^3. \tag{4}$$

18. »Die Geraden, welche die Punkte zweier Tripel aus zwei verschiedenen Systemen gegenseitig verbinden, schneiden C_3 in einem Tripel des dritten Systems.« Sind nämlich $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ die beiden Tripel, $\alpha\beta\gamma$ die dritten Schnittpunkte von a_1a_2 , b_1b_2 , c_1c_2 , so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 a_1b_1c_1 &= k_1 & a_2b_2c_2 &= k_2 \\
 a_1a_2\alpha &= b_1b_2\beta = c_1c_2\gamma = k;
 \end{aligned}$$

daraus ergibt sich zunächst $a_1b_1c_1a_2b_2c_2\alpha\beta\gamma = k^3 = k_1k_2k_3$ und mit Rücksicht auf das erste Gleichungspaar

$$\alpha\beta\gamma = k_3, \text{ w. z. b. w.}$$

19. »Legt man durch ein Tripel $a_ib_ic_i$ und einen Punkt m von C_3 eine C_2 , welche C_3 weiter in x, x' schneiden möge, so ist der dritte Schnittpunkt o von $\overline{xx'}$ der zum Punkte m im i ten System conjugirte m_i « (siehe H. Schroeter, Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, 1888, S. 62).

Es ist nämlich

$$a_ib_ic_imxx' = k^2$$

und

$$k = xx'o,$$

woraus sich durch Multiplication

$$a_i b_i c_i m = ok$$

ergibt; daraus folgt wegen $a_i b_i c_i = k_i$

$$k_i m = ok;$$

bezeichnet man aber den zu m im i^{ten} System conjugirten Punkt mit m_i , so ist auch (Artikel 13)

$$k_i m = m_i k,$$

folglich in der That $o \equiv m_i$.

20. »Liegen sechs Punkte $abcdef$ einer C_3 auf einer C_2 und bestimmt man zu irgend zweien, z. B. ef , die conjugirten in irgend einem System, etwa $e_i f_i$, so liegen $abcde_i f_i$ auch auf einer C_2 .« (Schroeter, l. c., S. 70.) Denn es ist

$$abcdef = k^2$$

$$ke_i = k_i e$$

$$kf_i = k_i f;$$

daraus ergibt sich durch Multiplication

$$abcde_i f_i = k_i^2 = k^2, \text{ w. z. b. w.}$$

»Bestimmt man zu allen sechs Punkten die conjugirten irgend eines Systems, so liegen auch diese auf einem Kegelschnitt.« (Schroeter, l. c., S. 71). Denn aus den Beziehungen

$$ka_i = k_i a, \quad kb_i = k_i b, \dots kf_i = k_i f$$

erhält man

$$k^6 a_i b_i c_i d_i e_i f_i = k^6 abcdef$$

und da $abcdef = k^2$ und $k_i^6 = k^6$, so folgt, was zu beweisen war, nämlich $a_i b_i c_i d_i e_i f_i = k^2$.

21. »Der Gegenpunkt o von vier Punkten $abcd$ auf C_3 ist zugleich Gegenpunkt von den conjugirten Punkten $a_i b_i c_i d_i$ irgend eines Systems.«

Man erhält nämlich o , indem man die dritten Schnittpunkte α, β von \overline{ab} und \overline{cd} verbindet und den weiteren Schnittpunkt dieser Geraden mit C_3 bestimmt; demzufolge ist

$$o = \frac{k}{\alpha\beta},$$

und da $ab\alpha = cd\beta = k$, so ist $abcd\alpha\beta = k^2$, folglich $\alpha\beta = \frac{k^2}{abcd}$ und daher

$$o = \frac{abcd}{k}.$$

Nun ist aber weiter

$$ka_i = k_i a$$

$$kb_i = k_i b$$

$$kc_i = k_i c$$

$$kd_i = k_i d,$$

demnach $k^i a_i b_i c_i d_i = k_i^i abcd$ und wegen $k^2 = k_i^2$ auch $k^i = k_i^i$, daher $a_i b_i c_i d_i = abcd$ und somit auch $o = \frac{a_i b_i c_i d_i}{k}$, wodurch der Satz bewiesen ist.

22. »Liegen die sechs Punkte $abcdef$ von C_3 auf einem Kegelschnitt, so liegen ihre Tangentialpunkte $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi$ ebenfalls auf einer C_2 .« (Schroeter, l. c., S. 72.) Denn aus

$$a^2\alpha = b^2\beta = \dots = f^2\varphi = k$$

folgt durch Multiplication $a^2b^2c^2d^2e^2f^2\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi = k^6$; weil aber voraussetzungsgemäss $abcdef = k^2$, so ergibt sich auch $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi = k^2$, w. z. b. w.

23. »Sind $ab\dots hj$ die neun Schnittpunkte der C_3 mit einer andern Curve dritter Ordnung, so bilden auch $ab_i\dots h_i j_i$ eine solche Gruppe von neun Punkten.« (Schroeter, l. c., S. 78.) Nach Voraussetzung ist

$$ab\dots hj = k^3;$$

ferner gelten die Beziehungen

$$kb_i = k_i b, \quad kc_i = k_i c, \quad \dots \quad kj_i = k_i j,$$

aus welchen durch Multiplication

$$k^8 b_i c_i \dots j_i = k_i^8 bc \dots j$$

erhalten wird; nun ist aber $k_i^8 = k^8$, daher $b_i c_i \dots j_i = bc \dots j$ und daraus

$$ab_i c_i \dots j_i = abc \dots j = k^3, \text{ w. z. b. w.}$$

24. »Nimmt man aus den drei Tripelsystemen je ein Tripel, so erhält man eine Gruppe von neun associirten Punkten.« Denn aus

$$a_1 b_1 c_1 = k_1, \quad a_2 b_2 c_2 = k_2, \quad a_3 b_3 c_3 = k_3$$

folgt unmittelbar $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 a_3 b_3 c_3 = k_1 k_2 k_3 = k^3$, womit die Behauptung erwiesen ist.

25. »Ein Punkt o auf C_3 , sein Tangentialpunkt t , die Berührungspunkte $abcd$ der durch o an C_3 gehenden vier Tangenten und die Diagonalepunkte pqr des Vierecks $abcd$ sind neun associirte Punkte.« (Fig. 2).

Zunächst folgt aus $ab = cd$ durch Multiplication mit c , dass

$$abc = c^2 d = d^2 d = d^3,$$

daher ist

$$abcd = d^4;$$

weiter hat man

$$p = \frac{k}{ab}, \quad q = \frac{k}{bc}, \quad r = \frac{k}{ca},$$

woraus sich

$$pqr = \frac{k^3}{a^2 b^2 c^2} = \frac{k^3}{d^6}$$

ergibt; folglich ist nun schon

$$abcdpqr = \frac{k^3}{d^2},$$

und da weiter $o^2 t = k$, so hat man $ot = \frac{k}{o}$, also

$$abcdpqrot = \frac{k^3 k}{d^2 o};$$

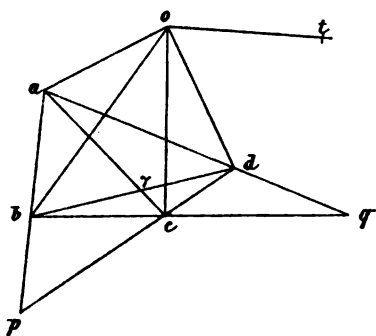


Fig. 2.

schliesslich bemerke man, dass $d^2o = k$, und dann ergibt sich die zu beweisende Relation

$$abcdpqrot = k^3.$$

26. Es seien $\alpha\beta\gamma$ drei Punkte in gerader Linie auf C_3 ; $a_1a_2a_3a_4$ die Berührungspunkte der aus α , $b_1b_2b_3b_4$ die Berührungspunkte der aus β , endlich $c_1c_2c_3c_4$ die Berührungspunkte der aus γ an C_3 gelegten Tangenten. Man verbinde a_i mit $b_{i'}$ ($i, i' = 1, 2, 3, 4$) und bezeichne mit x den dritten Schnittpunkt von $a_ib_{i'}$; dann ist

$$a_ib_{i'}x = k,$$

also auch

$$a_i^2b_{i'}^2x^2 = k^2;$$

nun ist $a_i^2 = \frac{k}{\alpha}$, $b_{i'}^2 = \frac{k}{\beta}$, daher weiter

$$\frac{k^2x^2}{\alpha\beta} = k^2$$

und weil schliesslich $\alpha\beta\gamma = k$ ist, so ergibt sich

$$x^2\gamma = k,$$

d. h. der dritte Schnittpunkt x ist einer der vier Punkte $c_1c_2c_3c_4$; es geht also jede der sechzehn Geraden, welche sich ergeben, wenn man jeden der vier Punkte a_i mit jedem der vier Punkte $b_{i'}$ verbindet, durch einen der vier Punkte $c_{i''}$. »Wenn man also aus den Punkten eines geraden Tripels die Tangenten an C_3 führt, so liegen die zwölf Berührungspunkte auf sechzehn Geraden derart, dass jede Gerade drei Punkte enthält und durch jeden Punkt vier Gerade gehen.« (Schroeter, l. c., S. 99.)

27. »Ist $abcd$ das zum Punkte o gehörige Quadrupel, t der Tangentialpunkt von o und pqr das Diagonaldreieck des Vierecks $abcd$, so bilden $opqr$ ebenfalls ein Quadrupel, gehörig zum Punkte t .« (Schroeter, l. c., S. 109).

Es ist nämlich $o = \frac{k}{a^2}$, daher $o^2 = \frac{k^2}{a^4}$; ferner $p = \frac{k}{ab}$, folglich $p^2 = \frac{k^2}{a^2b^2} = \frac{k^2}{a^4}$, weil $b^2 = a^2$; durch Vergleichung ergibt sich daraus $o^2 = p^2$; in derselben Weise zeigt man $o^2 = q^2 = r^2$; $o^2 = p^2 = q^2 = r^2$ aber sagen aus, dass die vier

Punkte $opqr$ einen gemeinsamen Tangentialpunkt haben, und zwar ist dies t .

28. Es seien a, a_1 zwei conjugirte Punkte des ersten; b, b_2 zwei conjugirte Punkte des zweiten Systems, ferner c der dritte Schnittpunkt von \overline{ab} , c' der dritte Schnittpunkt von $\overline{a_1b_2}$ mit der C_3 . Man hat dann

$$ak_1 = a_1k$$

$$bk_2 = b_2k,$$

woraus durch Multiplication $abk_1k_2 = a_1b_2k^2$ erhalten wird; nun ist aber $ab = \frac{k}{c}$, $a_1b_2 = \frac{k}{c'}$, folglich weiter $\frac{k}{c}k_1k_2 = \frac{k}{c'}k^2$ oder

$$kc' = \frac{k^3}{k_1k_2}c;$$

da aber $k^3 = k_1k_2k_3$, so hat man schliesslich $kc' = k_3c$, d. h. $c' \equiv c_3$, wenn c, c_3 ein Paar conjugirter Punkte des dritten Systems ist (Schroeter, l. c., S. 118).

29. Die neun dreifachen Elemente einer J^3 seien $a_1b_1c_1, a_2b_2c_2, a_3b_3c_3$; dann ist

$$a_1^3 = b_1^3 = c_1^3 = a_2^3 = b_2^3 = c_2^3 = a_3^3 = b_3^3 = c_3^3 = k.$$

Wir wählen einen derselben, z. B. a_1 , als Doppelement einer J^2 , so müssen die übrigen paarweise dieser J^2 angehören, beispielsweise in solcher Anordnung, dass

$$a_1^2 = b_1c_1 = a_2a_3 = b_2c_3 = b_3c_2.$$

Jedes der vier Paare rechts wird durch a_1 zu einem Tripel der J^3 ergänzt.

Das Paar a_2b_1 wird ebenso durch eines der dreifachen Elemente zu einem Tripel ergänzt; a_1 und c_1 können es nicht sein, weil ja a_1 mit b_1c_1 und c_1 mit b_1a_1 bereits ein Tripel bilden; a_3 ist ausgeschlossen, weil es schon mit a_1a_2 ein Tripel bildet; es muss also eines der vier Elemente $b_2c_3b_3c_2$ sein. Sei c_3 dieses Element, so dass $a_2b_1c_3$ ein Tripel der J^3 ist. Dann muss a_3c_1 nothwendig durch b_2 ergänzt werden; denn $a_1b_1a_2c_3$ sind wie früher ausgeschlossen, so dass nur $b_2b_3c_2$ als möglich übrig bleiben; nun wird die J^3 durch jene J^2 , deren Doppelement a_2 ist, in sich übergeführt, so dass das Tripel $a_2b_1c_3$ wieder in ein

Tripel, und dieses ist $c_1 a_3 b_2$, übergeht; es ist also $a_3 b_2 c_1$ ein Tripel der J^3 . Das Paar $b_1 b_2$ kann weder durch $c_1 c_3$, noch durch $a_1 a_2 a_3$ ergänzt werden, sondern nur durch eines der Elemente $c_2 b_3$; also möge b_3 es sein, so dass $b_1 b_2 b_3$ ein Tripel ist. Dann muss, weil durch jene J^2 dieses Tripel wieder in ein Tripel verwandelt wird, auch $c_1 c_2 c_3$ ein Tripel sein. Wir haben also im Ganzen bisher die acht Tripel

$$\begin{array}{cccc} a_1 b_1 c_1 & a_1 a_2 a_3 & a_1 b_2 c_3 & a_1 b_3 c_2 \\ a_2 b_1 c_3 & a_3 b_2 c_1 & b_1 b_2 b_3 & c_1 c_2 c_3. \end{array}$$

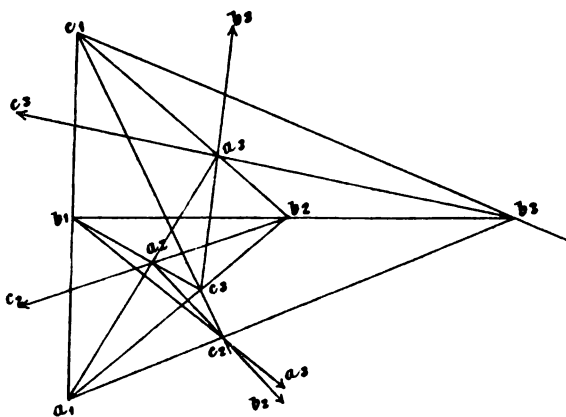


Fig. 3.

Das Paar $b_1 c_2$ kann weder durch a_1 , noch durch $c_1 b_2$ ergänzt werden, also auch nicht durch c_3 (denn es wird $c_1 c_2$ durch c_3 ergänzt) und ebenso nicht durch b_3 (denn $b_3 c_2$ wird durch a_1 ergänzt); es bleiben also nur a_2 oder a_3 , davon ist a_2 ausgeschlossen, weil $c_3 b_1$ durch a_2 ergänzt wird; folglich ist a_3 das fehlende Element und $a_3 b_1 c_2$ wieder ein Tripel der J^3 . Aus diesem geht durch die J^2 das Tripel $a_2 c_1 b_3$ hervor. Endlich erkennt man genau in derselben Weise, dass das Paar $c_2 a_2$ durch b_2 ergänzt wird und dass aus diesem Tripel $a_2 b_2 c_2$ durch J^2 das Tripel $a_3 b_3 c_3$ entsteht.

Schreiben wir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

so sind die zwölf Tripel dargestellt durch die drei Horizontalreihen, die drei Verticalreihen und durch die sechs Glieder der Determinante Δ (siehe die schematische Fig. 3).

Die vier Gruppen zu je drei Tripeln, welche alle neun Elemente enthalten, sind:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & a_1 b_1 c_1 & a_2 b_2 c_2 & a_3 b_3 c_3 \\ \text{II)} & a_1 a_2 a_3 & b_1 b_2 b_3 & c_1 c_2 c_3 \\ \text{III)} & a_1 b_2 c_3 & a_2 b_3 c_1 & a_3 b_1 c_2 \\ \text{IV)} & a_3 b_2 c_1 & a_1 b_3 c_2 & a_2 b_1 c_3; \end{array}$$

III) stellt die positiven, IV) die negativen Glieder der Determinante Δ vor.

Man kann bei Zusammenstellung der Tripel auch in folgender Weise vorgehen. Es sei a_1 Doppelement (a_1^2) einer J^2 , welcher $b_1 c_1$, $a_2 a_3$, $b_2 c_3$, $b_3 c_2$ als Paare angehören; dann ist

$$a_1^3 = a_1 b_1 c_1 = a_1 a_2 a_3 = a_1 b_2 c_3 = a_1 b_3 c_2 = k.$$

Das Paar $a_2 b_1$ kann durch a_3 , c_1 oder a_1 nicht ergänzt werden; denn sonst müsste z. B. $a_2 a_3 b_1 = k$ sein; da aber $a_1 a_2 a_3 = k$ ist, so wäre $b_1 \equiv a_1$, was nicht angeht, da alle Elemente von einander verschieden sind u. s. w. Es kann also $a_2 b_1$ nur durch eines der Elemente $c_3 b_2 c_2 b_3$ ergänzt werden; wir bezeichnen das ergänzende Element mit c_3 , so ist $a_2 b_1 c_3$ ein Tripel. Nun folgt aus

$$a_1 b_1 c_1 = a_1 a_2 a_3 = a_1 c_3 b_2 = k,$$

dass $a_1^2 \cdot a_2 b_1 c_3 \cdot a_3 b_2 c_1 = k^3$, und da $a_1^3 = k$ und $a_2 b_1 c_3 = k$, so ist auch $a_3 b_2 c_1 = k$, und dadurch wieder ein Tripel gefunden. In ähnlicher Weise fährt man mit dem Paare $b_1 b_2$ fort.

Hiernach bestehen also zwischen den neun dreifachen Elementen folgende Relationen:

$$\begin{aligned} a_1^3 &= b_1^3 = c_1^3 = a_2^3 = b_2^3 = c_2^3 = a_3^3 = b_3^3 = c_3^3 \\ a_1^2 &= b_1 c_1 = a_2 a_3 = b_2 c_3 = b_3 c_2 \\ b_1^2 &= a_1 c_1 = b_2 b_3 = a_3 c_3 = a_2 c_3 \\ c_1^2 &= a_1 b_1 = c_2 c_3 = a_2 b_3 = a_3 b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ c_3^2 &= a_3 b_3 = c_1 c_2 = a_1 b_2 = a_2 b_1. \end{aligned}$$

Die vier cyklischen E -Beziehungen mit dreielementigen Gruppen erhält man mit Hilfe folgender Sätze.

Satz I. »Wenn $a_1 b_1 c_1$ ein Cyklus einer E -Beziehung ist, so dass also den Elementen $a_1 b_1 c_1$ der Reihe nach die Elemente $b_1 c_1 a_1$ entsprechen, so sind diese Elemente dreifache Elemente einer J^3 .«

Denn nach Voraussetzung ist

$$a_1 c_1 = b_1^2 \quad a_1 b_1 = c_1^2 \quad b_1 c_1 = a_1^2,$$

somit

$$a_1 b_1 c_1 = a_1^3 = b_1^3 = c_1^3, \text{ w. z. b. w.}$$

Satz II. »Wenn $a_1 b_1$ zwei dreifache Elemente einer J^3 sind, so ist die durch sie gegebene E -Beziehung cyklisch.«

Es ist nämlich nach Voraussetzung $a_1^3 = b_1^3$; ist c_1 das dem b_1 entsprechende Element, so ist $a_1 c_1 = b_1^2$; das dem c_1 entsprechende Element x ist gegeben durch $b_1 x = c_1^2$ oder $b_1 x = \left(\frac{b_1^2}{a_1}\right)^2$, d. h. $a_1^2 b_1 x = b_1^3 = b_1^3 b_1 = a_1^3 b_1$, somit ist $x \equiv a_1$, w. z. b. w.

Satz III. »Jedem weiteren dreifachen Element von J^3 entspricht in der E -Beziehung wieder ein dreifaches Element, welches von $a_1 b_1 c_1$ verschieden ist«

Es sei a_2 ein weiteres dreifaches Element und x das ihm entsprechende; dann muss, weil $a_1 b_1, a_2 x$ zwei Paare der E sind, $a_1 x = a_2 b_1$ sein, also auch $a_1^3 x^3 = a_2^3 b_1^3$; nun ist $a_1^3 = a_2^3$, daher $x^3 = b_1^3$, d. h. x ist ein dreifaches Element. Dass x von a_2 verschieden ist, folgt sofort daraus, dass in jeder E -Beziehung einem Element ein von ihm verschiedenes entspricht; es muss aber x auch von $a_1 b_1 c_1$ verschieden sein, weil ja diese Gruppe in sich geschlossen ist. Wir setzen also $x = b_2$, erhalten dann wie oben noch ein drittes Element c_2 , und die Gruppe $a_2 b_2 c_2$ ist wieder geschlossen. Die letzten drei Elemente $a_3 b_3 c_3$ müssen natürlich auch eine geschlossene Gruppe bilden. (Weiteres siehe im nächsten Abschnitt.)

II. E -Beziehungen auf Trägern vom Geschlechte Eins (C_3).

30. Eine allgemeine eindeutige Punktbeziehung E auf C_3 sei durch a, a' gegeben; ist dann x, x' ein beliebiges Paar der-

selben, so schneiden sich die wechselweisen Verbindungslinien ax' und $a'x$ auf C_3 ,¹ folglich ist $xa' = x'a$ oder aber

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}.$$

Durch diese Gleichung ist eine E -Beziehung auf C_3 charakterisirt. Man könnte sie symbolisch auch in der Form $\frac{x}{x'} = c$, wo c eine Constante bedeutet, darstellen.

Hieraus ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

I. »In einer E -Beziehung gibt es keine oder lauter Doppelpunkte«. Es kann nämlich nie $x' = x$ werden; nur wenn $a \equiv a'$, so ist auch $x \equiv x'$, dann aber immer.

II. »Durch zwei conjugirte Punkte ist eine vertauschungsfähige E -Beziehung gegeben«. Ist $a^2 = a'^2$, so folgt aus $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$ zunächst $\frac{x^2}{x'^2} = \frac{a^2}{a'^2} = 1$, daher $x^2 = x'^2$, d. h. x, x' sind auch conjugirte Punkte. Wird nun $x' = y$ gesetzt, so ist $x \equiv y'$; denn es ist $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ und für $y \equiv x'$ wird $\frac{x}{x'} = \frac{x'}{y'}$, oder $xy' = x'^2$; weil aber $x'^2 = x^2$, so hat man in der That $y' \equiv x$, wodurch die Vertauschungsfähigkeit von E erwiesen ist.

III. Aus $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$ folgt $x^n a'^n = x'^n a^n$, d. h. »wenn man x und a' jeden n -fach gezählt als Gruppe einer J^{2n} deutet, so ist auch $x'a$ eine solche Gruppe derselben J^{2n} «.

IV. Wenn $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$ und $a^n = a'^n$, so ist auch $x^n = x'^n$, d. h. »in der durch zwei n -fache Elemente einer J^n bestimmten E -Beziehung sind jede zwei entsprechende Elemente n -fach für eine J^n «.

Im Folgenden wird die durch das Punktepaar aa' bestimmte E -Beziehung mit $E(aa')$ bezeichnet.

31. V. »Wenn aa' n -fache Elemente einer J^n sind, so ist $E(aa')$ cyclisch«. Ist nämlich $E(aa')$ gegeben und man con-

¹ »Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.« Sitzungsber. Bd. LXXXVII, 2. Abth., S. 843.

struirt die Punktreihe $xx'x''\dots$ derart, dass jedes folgende Element dem vorausgehenden entspricht, so hat man die Relationen

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{x'}{a} = \frac{x''}{a'}, \quad \frac{x''}{a} = \frac{x'''}{a'}, \dots \frac{x^{(k-1)}}{a} = \frac{x^{(k)}}{a'};$$

aus denselben ergibt sich durch Multiplication

$$\frac{xx'x''\dots x^{(k-1)}}{a^k} = \frac{x'x''\dots x^{(k)}}{a'^k}$$

oder aber

$$\frac{x}{a^k} = \frac{x^{(k)}}{a'^k}.$$

Ist nun k Theiler von n , also $n = \lambda k$, und sind aa' k -fache Elemente einer der λ^2 aus J^n abgeleiteten J^k , so sind aa' auch n -fache Elemente für J^n aber so, dass schon $a^k = a'^k$; dann ist $x^{(k)} \equiv x$ und die Gruppe $xx'x''\dots x^{(k-1)}$ geschlossen. Sind aa' nicht Hauptelemente einer solchen abgeleiteten J^k , so muss die obige Gleichungsreihe bis $\frac{x^{(n-1)}}{a} = \frac{x^{(n)}}{a'}$, fortgesetzt werden und man hat $\frac{x}{a^n} = \frac{x^{(n)}}{a'^n}$, woraus wegen $a^n = a'^n$ folgt, dass $x^{(n)} \equiv x$, und es ist der n -elementige Cyklus $xx'\dots x^{(n-1)}$ geschlossen.

Wir wollen eine cyklische E , welche k -elementige Cyklen liefert, mit E_k bezeichnen und uns die Frage vorlegen: Wie viele E_k gibt es?

32. α) Für $k = 2$ ist die Frage bald beantwortet; denn ist xx' ein Cyklus, so muss

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'} \quad \frac{x'}{a} = \frac{x}{a'},$$

also $\frac{xx'}{a^2} = \frac{xx'}{a'^2}$, d. h. $a^2 = a'^2$ sein; aa' sind also conjugirte Punkte. Den drei Systemen conjugirter Punkte entsprechen also die drei E_2 auf C_3 .

33. β) Für $k = 3$ liefert der Cyklus $xx'x''$ die Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'} \quad \frac{x'}{a} = \frac{x''}{a'} \quad \frac{x''}{a} = \frac{x}{a'};$$

dieselben führen zu $\frac{xx'x''}{a^3} = \frac{xx'x''}{a'^3}$ oder zu $a^3 = a'^3$ und zeigen, dass aa' Hauptelemente einer J_3^3 sind.

Es seien nun

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

die neun Hauptelemente einer J^3 in der Artikel 29 erörterten Anordnung. In der $E(a_1b_1)$ entspricht dem Element b_1 das Element c_1 und dem c_1 das a_1 ; denn wird mit u_1 das dem b_1 entsprechende Element bezeichnet, so muss $\frac{b_1}{a_1} = \frac{u_1}{b_1}$ oder $\frac{b_1}{a_1c_1} = \frac{u_1}{b_1c_1}$ sein; nun ist aber $a_1c_1 = b_1^2$, daher hat man weiter $\frac{1}{b_1} = \frac{u_1}{b_1c_1}$, woraus wirklich $u_1 \equiv c_1$ folgt u. s. w. Es ist also $E(a_1b_1) \equiv E_1(b_1c_1) \equiv E(c_1a_1)$ und diese cykliche E_3 möge mit $E(a_1b_1c_1)$ bezeichnet werden; $E(a_2b_2c_2)$, $E(a_3b_3c_3)$ stellen die nämliche E_3 dar; denn wenn $\frac{x}{a_2} = \frac{x'}{b_2}$, so ist auch $\frac{x}{a_1a_2} = \frac{x'}{a_1b_2}$, aber wegen $a_1b_2 = a_2b_1$ gibt dies $\frac{x}{a_1a_2} = \frac{x'}{a_2b_1}$, d. h. $\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1}$, was bewiesen werden sollte. Wir haben also

$$E(a_1b_1c_1) \equiv E(a_2b_2c_2) \equiv E(a_3b_3c_3)$$

ebenso

$$E(a_1a_2a_3) \equiv E(b_1b_2b_3) \equiv E(c_1c_2c_3)$$

$$E(a_1b_2c_3) \equiv E(a_2b_3c_1) \equiv E(a_3b_1c_2)$$

$$E(a_3b_2c_1) \equiv E(a_1b_3c_2) \equiv E(a_2b_1c_3)$$

und dies sind die vier E_3 . Sie sind auch als die $E(a_1b_1)$, $E(a_1b_2)$, $E(a_1a_2)$ und $E(a_1b_3)$ gegeben, und zwar sind es die einzigen vier. Dies erkennt man in folgender Weise. Man darf die Elemente eines Cyklus cyklich permutiren; insbesondere bleibt die cykliche E auch dieselbe, wenn man den Cyklus umkehrt, also z. B. aus $a_1b_1c_1$ macht $c_1b_1a_1$; nimmt man hierauf Rücksicht, so wird man wahrnehmen, dass in den obigen vier E_3 jedes der acht Elemente $b_1c_1 \dots c_3$ als dem a_1 ent-

sprechend schon vorkommt; folglich bleibt für eine weitere E_2 kein Element übrig, welches dem a_1 entsprechen könnte.

Es sei $xx'x''$ irgend ein Cyklus der $E(a_1b_1c_1)$, so muss

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} \quad \frac{x'}{a_1} = \frac{x''}{b_1}$$

oder also $\frac{x'}{a_1b_1} = \frac{x''}{b_1^2}$ sein; nun ist $b_1^2 = a_1c_1$, daher weiter $\frac{x'}{a_1b_1} = \frac{x''}{a_1c_1}$, d. h. $\frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$, so dass für die $E(a_1b_1c_1)$ die Gleichungen bestehen

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$$

und ähnliche Gleichungen gelten für die übrigen.

34. »Wird ein Cyklus $xx'x''$ aus einem Punkte z der C_3 auf diese projicirt (die Projection ganz allgemein durch eine beliebige J^3 hergestellt), so ergibt sich wieder ein Cyklus.«

Bezeichnet man die Projectionen von $xx'x''$ der Reihe nach mit $yy'y''$, so ist $xyz = x'y'z = x''y''z$, also auch

$$xy = x'y' = x''y'',$$

woraus $x : x' : x'' = \frac{1}{y} : \frac{1}{y'} : \frac{1}{y''}$, und da $\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$,

weiter $\frac{1}{a_1y} = \frac{1}{b_1y'} = \frac{1}{c_1y''}$ oder

$$a_1y = b_1y' = c_1y''$$

folgt; stellt man diesen Beziehungen die bekannten

$$a_1c_1 = b_1^2 = a_1c_1$$

gegenüber, so ergibt sich durch Division

$$\frac{y}{c_1} = \frac{y'}{b_1} = \frac{y''}{a_1},$$

wodurch erwiesen ist, dass $y''y'y$ wieder einen Cyklus von $E(a_1b_1c_1)$ darstellen.

35. Es sei $xx'x''$ ein Cyklus in der $E(a_1b_1)$, so ist

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} \quad \frac{x'}{a_1} = \frac{x''}{b_1}$$

also

$$x' = \frac{b_1}{a_1} x \quad x'' = \frac{b_1}{a_1} x' = \frac{b_1^2}{a_1^2} x.$$

Ist $yy'y''$ ein zweiter beliebiger Cyklus derselben E , so hat man ebenso

$$y' = \frac{b_1}{a_1} y \quad y'' = \frac{b_1^2}{a_1^2} y$$

und für einen dritten Cyklus $zz'z''$

$$z' = \frac{b_1}{a_1} z \quad z'' = \frac{b_1^2}{a_1^2} z.$$

Aus diesen drei Gleichungspaaren ergibt sich durch Multiplication

$$x'y'z' = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz$$

$$x''y''z'' = \frac{b_1^6}{a_1^6} xyz = xyz,$$

so dass

$$xyz = x'y'z' = x''y''z'', \quad (1)$$

d. h. die drei Tripel xyz , $x'y'z'$, $x''y''z''$ gehören einer J^3 an.

Da man nun in jedem Tripel die Elemente cyklich vertauschen darf, so ist auch (wenn die Vertauschung in dem Tripel $xx'x''$ vorgenommen wird):

$$x'y'z = x''y'z' = x'y''z'', \quad (2)$$

dagegen erhält man durch Vertauschung der y

$$xy'z = x'y''z' = x''yz'' \quad (3)$$

und durch Vertauschung der z

$$xyz' = x'y'z'' = x''y''z. \quad (4)$$

Weil jedoch

$$x'yz = \frac{b_1}{a_1} xyz, \quad xy'z = \frac{b_1}{a_1} xyz, \quad xyz' = \frac{b_1}{a_1} xyz,$$

so gehören die Tripel (2), (3), (4) wieder einer J^3 an.

Führt man in (2), (3), (4) mit dem x -Tripel nochmalige cyklische Vertauschung aus, so ergeben sich die Relationen

$$x''yz = xy'z' = x'y''z'' \quad (2')$$

$$x'y'z = x''y''z' = xyz'' \quad (3')$$

$$x'yz' = x''y'z'' = xy''z \quad (4')$$

und da

$$x'yz' = \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz, \quad x'y'z = \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz, \quad x'yz' = \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz,$$

so gehören (2'), (3'), (4') wieder einer J^3 an.

Wenn man in (3'), (4') mit der Vertauschung nochmals vorgeht, so kommt man zu

$$x''y'z = xy''z' = x'yz'' \quad (3'')$$

$$x''yz' = xy'y'' = x'y''z \quad (4'')$$

und weil

$$x''y'z = \frac{b_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{b_1}{a_1} xyz = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz$$

$$x''yz' = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz,$$

so gehören (3''), (4'') derselben J^3 an wie (1).

Die drei Cyklen $xx'x''$, $yy'y''$, $zz'z''$ aus $E(a_1, b_1)$ lassen sich also dreimal in drei Tripel der Involution $J^3 \equiv xyz$, dreimal in drei Tripel der Involution $J^3 \equiv \frac{b_1}{a_1} xyz$ und dreimal in drei Tripel von $J^3 \equiv \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz$ ordnen. Weitere J^3 , die man noch herstellen kann, fallen mit den eben gefundenen zusammen: so gibt z. B. $x''y''z = \frac{b_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz = \frac{b_1^4}{a_1^4} xyz = \frac{b_1}{a_1} xyz$, und das

fällt zusammen mit (2), (3), (4); ebenso liefern die reciproken Coëfficienten $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1^2}{b_1^2}$ nichts Neues, weil $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 b_1^3}{a_1^3 b_1} = \frac{b_1^2}{a_1^2}$ und $\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_1^2 b_1^3}{a_1^3 b_1^2} = \frac{b_1}{a_1}$ ist.

Anmerkung. Man kann, wenn $a_1 b_1$ Hauptpunkte einer bestimmten J^3 sind, zu jeder andern gegebenen J^3 zwei andere von der Form $\frac{b_1}{a_1} J^3, \frac{b_1^2}{a_1^2} J^3$ hinzufügen, d. h. wenn diese J^3 durch ein Tripel xyz gegeben ist, so sind die beiden andern durch die Tripel $\frac{b_1}{a_1} xyz, \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz$ bestimmt; der letzten entspricht die erste wie der zweiten die dritte und der ersten die zweite, so dass wir eine cyklische Beziehung von Tripeln der J^3 vor uns haben.

Oben sind die drei von einander verschiedenen Involutionen gegeben durch die Tripel xyz, xyz', xyz'' .

III. Über eine J_3^4 auf C_3 .

36. Die Berührungspunkte der aus einem Punkte p der C_3 an diese geführten Tangenten seien $abcd$, die Berührungspunkte

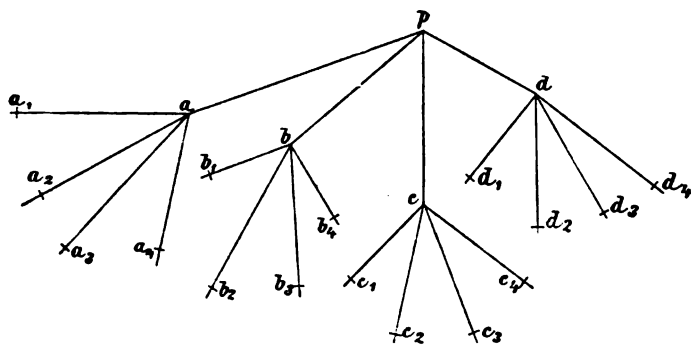


Fig. 4.

der aus $abcd$ gelegten Tangenten seien $a_i b_i c_i d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (siehe die schematische Fig. 4). Man kann dann die $a_i b_i c_i d_i$ durch $a_1 b_1 c_1 d_1$ wie folgt ausdrücken:

$$\begin{array}{llll}
a_1 = a_1 & b_1 = b_1 & c_1 = c_1 & d_1 = d_1 \\
a_2 = \frac{b}{a} a_1 & b_2 = \frac{b}{a} b_1 & c_2 = \frac{b}{a} c_1 & d_2 = \frac{b}{a} d_1 \\
a_3 = \frac{c}{a} a_1 & b_3 = \frac{c}{a} b_1 & c_3 = \frac{c}{a} c_1 & d_3 = \frac{c}{a} d_1 \\
a_4 = \frac{d}{a} a_1 & b_4 = \frac{d}{a} b_1 & c_4 = \frac{d}{a} c_1 & d_4 = \frac{d}{a} d_1;
\end{array}$$

mit andern Worten: Setzt man $\frac{b}{a} = w_2$, $\frac{c}{a} = w_3$, $\frac{d}{a} = w_4$, so sind dies die drei Functionen, mittels welcher man aus einem Punkte x die ihm in den drei Systemen conjugirten Pole erhält. Man hat bei Anwendung dieser Bezeichnungen die Relationen

$$\begin{array}{llll}
b = w_2 a & c = w_3 a & d = w_4 a & \\
a_1 = a_1 & b_1 = b_1 & c_1 = c_1 & d_1 = d_1 \\
a_2 = w_2 a_1 & b_2 = w_2 b_1 & c_2 = w_2 c_1 & d_2 = w_2 d_1 \\
a_3 = w_3 a_1 & b_3 = w_3 b_1 & c_3 = w_3 c_1 & d_3 = w_3 d_1 \\
a_4 = w_4 a_1 & b_4 = w_4 b_1 & c_4 = w_4 c_1 & d_4 = w_4 d_1
\end{array}$$

Es bestehen aber weiter die Beziehungen

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 = c^2 = d^2 \\
a_1^2 &= a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 \\
b_1^2 &= b_2^2 = b_3^2 = b_4^2 \\
c_1^2 &= c_2^2 = c_3^2 = c_4^2 \\
d_1^2 &= d_2^2 = d_3^2 = d_4^2 \\
w_2^2 &= w_3^2 = w_4^2 = 1 \\
a_1^4 &= a_2^4 = \dots = b_1^4 = \dots =
\end{aligned}$$

Weil ferner $a_1 a_2 = a_3 a_4$, so ist

$$\begin{aligned}
&w_3 w_4 = w_2, \\
\text{ebenso} \quad &w_4 w_2 = w_3 \\
&w_2 w_3 = w_4;
\end{aligned}$$

aus der ersten dieser Gleichungen folgt, wenn man sie mit w_2 multiplicirt und berücksichtigt, dass $w_2^2 = 1$ ist,

$$w_2 w_3 w_4 = 1.$$

Hiernach ist

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 = c_1 c_2 c_3 c_4 = d_1 d_2 d_3 d_4 = a_1^4 = \dots = d_4^4.$$

Gilt weiter für ein gerades Tripel auf C_3 die Gleichung $x_1 x_2 x_3 = k$, so hat man

$$a^2 p = b^2 p = c^2 p = d^2 p = k.$$

$$a_i^2 a = b_i^2 b = c_i^2 c = d_i^2 d = k.$$

Weil $w_j^2 = 1$, so gelten die Gleichungen

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = a_4 b_4$$

$$a_1 c_1 = a_2 c_2 = a_3 c_3 = a_4 c_4$$

$$a_1 d_1 = a_2 d_2 = a_3 d_3 = a_4 d_4$$

$$b_1 c_1 = b_2 c_2 = b_3 c_3 = b_4 c_4$$

$$b_1 d_1 = b_2 d_2 = b_3 d_3 = b_4 d_4$$

$$c_1 d_1 = c_2 d_2 = c_3 d_3 = c_4 d_4$$

Aus $a_i^2 a = k$ und $a^2 p = k$ und den analogen Gleichungen folgt

$$\frac{a_i^2}{a} = \frac{b_k^2}{b} = \frac{c_l^2}{c} = \frac{d_m^2}{d} = p.$$

Wegen der Beziehungen $w_3 w_4 = w_2$ u. s. w. ist

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 = a_3 b_4 = a_4 b_3 (= w_2 a_1 b_1)$$

$$a_1 c_2 = a_2 c_1 = a_3 c_4 = a_4 c_3 (= w_2 a_1 c_1)$$

$$a_1 d_2 = a_2 d_1 = a_3 d_4 = a_4 d_3 (= w_2 a_1 d_1)$$

$$b_1 c_2 = b_2 c_1 = b_3 c_4 = b_4 c_3 (= w_2 b_1 c_1)$$

$$b_1 d_2 = b_2 d_1 = b_3 d_4 = b_4 d_3 (= w_2 b_1 d_1)$$

$$c_1 d_2 = c_2 d_1 = c_3 d_4 = c_4 d_3 (= w_2 c_1 d_1)$$

ferner

$$a_1 b_3 = a_3 b_1 = a_2 b_4 = a_4 b_2 (= w_3 a_1 b_1)$$

$$a_1 c_3 = a_3 c_1 = a_2 c_4 = a_4 c_2 (= w_3 a_1 c_1)$$

$$a_1 d_3 = a_3 d_1 = a_2 d_4 = a_4 d_2 (= w_3 a_1 d_1)$$

$$b_1 c_3 = b_3 c_1 = b_2 c_4 = b_4 c_2 (= w_3 b_1 c_1)$$

$$b_1 d_3 = b_3 d_1 = b_2 d_4 = b_4 d_2 (= w_3 b_1 d_1)$$

$$c_1 d_3 = c_3 d_1 = c_2 d_4 = c_4 d_2 (= w_3 c_1 d_1)$$

endlich

$$\begin{aligned} a_1 b_4 &= a_4 b_1 = a_2 b_3 = a_3 b_2 (= w_4 a_1 b_1) \\ a_1 c_4 &= a_4 c_1 = a_2 c_3 = a_3 c_2 (= w_4 a_1 c_1) \\ a_1 d_4 &= a_4 d_1 = a_2 d_3 = a_3 d_2 (= w_4 a_1 d_1) \\ b_1 c_4 &= b_4 c_1 = b_2 c_3 = b_3 c_2 (= w_4 b_1 c_1) \\ b_1 d_4 &= b_4 d_1 = b_2 d_3 = b_3 d_2 (= w_4 b_1 d_1) \\ c_1 d_4 &= c_4 d_1 = c_2 d_3 = c_3 d_2 (= w_4 c_1 d_1) \end{aligned}$$

37. Die Involution J_3^4 auf C_3 , welche wir in Betracht ziehen, sei definiert durch die Gleichung

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = kp.$$

Wir wählen aus jedem der Quadrupel $a_i b_i c_i$ je einen Punkt, z. B. $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ und ergänzen dieses Tripel durch x zu einem Quadrupel der J_3^4 ; dann muss der Definition gemäss

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma x = kp,$$

somit auch $a_\alpha^2 b_\beta^2 c_\gamma^2 x^2 = k^2 p^2$ oder $\frac{k}{a} \frac{k}{b} \frac{k}{c} x^2 = k^3 p^2$, also $kx^2 = abcp^2$ sein; da aber $bc = ad$, so hat man auch $kx^2 = a^2 dp$ und wegen $a^2 = d^2$ weiter $kx^2 = d^3 p^2$; nun ist $d^2 p = k$, somit $x^2 = dp = \frac{k}{d} = d_i^3$; es ist also x einer der Punkte d_i . D. h.:

»Wählt man aus dreien der Quadrupel $a_i b_i c_i d_i$ je ein Element, so wird ein solches Tripel jedesmal durch ein Element des vierten Quadrupels zu einem Quadrupel unserer J_3^4 ergänzt.«

Wir wollen nun jenen der Punkte d_i , welcher mit $a_1 b_1 c_1$ ein Quadrupel der J_3^4 bildet, mit d_1 bezeichnen, also festsetzen, dass

$$a_1 b_1 c_1 d_1 = kp$$

sei. Es handelt sich jetzt darum, alle möglichen Quadrupel aus den Elementen $a_i b_i c_i d_i$ zu ermitteln.

Zunächst überzeugt man sich durch einen Blick auf die letzten drei Gruppen von Relationen in Artikel 36, dass $a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$ ein Quadrupel der J^4 ist, sobald $\alpha\beta\gamma\delta$ von einander verschieden sind; folglich stellen die 24 Glieder der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ebensoviele Quadrupel dar.

Es ist ferner jede Gruppe der Form $a_\kappa b_\kappa c_\lambda d_\lambda$ ($\kappa \leq \lambda$) ein Quadrupel der J^4 ; denn es ist ja $a_\kappa b_\kappa = n_\kappa^2 a_1 b_1$ und $c_\lambda d_\lambda = n_\lambda^2 c_1 d_1$, und weil $n_\kappa^2 = n_\lambda^2 = 1$, so kommt thatsächlich $a_\kappa b_\kappa c_\lambda d_\lambda = a_1 b_1 c_1 d_1$. Es sind also $a_1 b_1 c_1 d_1, a_1 b_1 c_2 d_2, a_1 b_1 c_3 d_3, \dots$ lauter Quadrupel der J^4 ; wie man bemerkt, befinden sich darunter auch die Horizontalreihen obiger Determinante. Die Abzählung dieser Formen ist leicht; aus jeder Zeile lassen sich sechs Paare bilden, und jedes dieser Paare kann mit vier andern verbunden werden; da es nun vier Zeilen gibt, so entstanden $4 \cdot 6 \cdot 4$ Verbindungen, von denen aber jede zweimal vorkommt, so dass noch $\frac{4 \cdot 6 \cdot 4}{2} = 48$ Combinationen blieben; aber jedes der vier Quadrupel $a_\kappa b_\kappa c_\kappa d_\kappa$ ist dabei immer noch dreimal gezählt (nämlich von $a_\kappa b_\kappa, a_\kappa c_\kappa, a_\kappa d_\kappa$ herrührend); es müssen daher von obiger Zahl $2 \cdot 4 = 8$ Einheiten subtrahirt werden. Dies gibt $48 - 8 = 40$ von einander verschiedene Quadrupel der Form $\kappa\lambda\lambda\lambda$ (oder $\kappa\lambda\kappa\lambda$ oder $\lambda\lambda\kappa\kappa$). Dies zu den 24 Gliedern der Determinante und zu den vier Quadrupeln a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) hinzugefügt, gibt vorläufig $24 + 4 + 40 = 68$ Quadrupel.

Um die noch übrig bleibenden zu ermitteln, stellen wir folgende Betrachtung an. Es wird C_3 zum drittenmale geschnitten

$$\begin{aligned} \text{von } a_1 a_2 \text{ oder } a_3 a_4 \text{ in } & \frac{k}{a_1 a_2} = \frac{a_1^2 a}{a_1 \frac{b}{a} a_1} = \frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{b} = b \\ & \text{» } a_1 a_3 \text{ » } a_2 a_4 \text{ » } \frac{k}{a_1 a_3} = \frac{a_1^2 a}{a_1 \frac{c}{a} a_1} = \frac{a^2}{c} = \frac{c^2}{c} = c \\ & \text{» } a_1 a_4 \text{ » } a_2 a_3 \text{ » } \frac{k}{a_1 a_4} = \frac{a_1^2 a}{a_1 \frac{d}{a} a_1} = \frac{a^2}{d} = \frac{d^2}{d} = d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{von } b_1 b_2 \text{ oder } b_3 b_4 \text{ in } \frac{k}{b_1 b_2} = \frac{b_1^2 b}{b_1 \frac{b}{a} b_1} = a \\
& \text{» } b_1 b_3 \text{ » } b_2 b_4 \text{ » } \frac{k}{b_1 b_3} = \frac{b_1^2 b}{b_1 \frac{c}{a} b_1} = \frac{ab}{c} = d \\
& \text{» } b_1 b_4 \text{ » } b_2 b_3 \text{ » } \frac{k}{b_1 b_4} = \frac{b_1^2 b}{b_1 \frac{d}{a} b_1} = \frac{ab}{d} = c \\
& \text{» } c_1 c_2 \text{ » } c_3 c_4 \text{ » } \frac{k}{c_1 c_2} = \frac{c_1^2 c}{c_1 \frac{b}{a} c_1} = \frac{ac}{b} = d \\
& \text{» } c_1 c_3 \text{ » } c_2 c_4 \text{ » } \frac{k}{c_1 c_3} = \frac{c_1^2 c}{c_1 \frac{c}{a} c_1} = a \\
& \text{» } c_1 c_4 \text{ » } c_2 c_3 \text{ » } \frac{k}{c_1 c_4} = \frac{c_1^2 c}{c_1 \frac{d}{a} c_1} = \frac{ac}{d} = b \\
& \text{» } d_1 d_2 \text{ » } d_3 d_4 \text{ » } \frac{k}{d_1 d_2} = \frac{d_1^2 d}{d_1 \frac{b}{a} d_1} = \frac{ad}{b} = c \\
& \text{» } d_1 d_3 \text{ » } d_2 d_4 \text{ » } \frac{k}{d_1 d_3} = \frac{d_1^2 d}{d_1 \frac{c}{a} d_1} = \frac{ad}{c} = b \\
& \text{» } d_1 d_4 \text{ » } d_2 d_3 \text{ » } \frac{k}{d_1 d_4} = \frac{d_1^2 d}{d_1 \frac{d}{a} d_1} = a;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1 b_2, b_3 b_4; c_1 c_3, c_2 c_4; d_1 d_4, d_2 d_3 \text{ durch } a \\
& a_1 a_2, a_3 a_4; c_1 c_4, c_2 c_3; d_1 d_3, d_2 d_4 \text{ » } b \\
& a_1 a_3, a_2 a_4; b_1 b_4, b_2 b_3; d_1 d_2, d_3 d_4 \text{ » } c \\
& a_1 a_4, a_2 a_3; b_1 b_3, b_2 b_4; c_1 c_2, c_3 c_4 \text{ » } d
\end{aligned}$$

Man kann sich dieses Verhalten schematisch wie folgt darstellen: Es geht

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 a_1 a_2 \text{ durch } b & b_2 b_1 \text{ durch } a & c_3 c_1 \text{ durch } a & d_4 d_1 \text{ durch } a \\
 a_1 a_3 & \text{ » } c & b_2 b_3 & \text{ » } c \\
 a_1 a_4 & \text{ » } d & b_2 b_4 & \text{ » } d
 \end{array}
 \begin{array}{c|c|c|c}
 c_3 c_2 & \text{ » } b & d_4 d_2 & \text{ » } b \\
 c_3 c_4 & \text{ » } d & d_4 d_3 & \text{ » } c;
 \end{array}$$

man bemerkt, dass der zweite Index, je nachdem er 1, 2, 3, 4 ist, auf a, b, c, d respective hindeutet; mit Hilfe dieses Schemas ist man im Stande, sofort den dritten Schnittpunkt eines beliebigen $a_x a_\lambda$ oder $b_x b_\lambda$ u. s. w. anzugeben.

Verknüpfen wir $a_1 a_2$ mit irgend einem b_i , z. B. mit b_2 , und ist x der vierte Quadrupelpunkt, so muss $a_1 a_2 b_2 x = a_1 a_2 a_3 a_4$, somit $b_2 x = a_3 a_4 = a_1 a_2$ sein; d. h. $b_2 x$ und $a_1 a_2$ müssen durch denselben Punkt von C_3 gehen; nun geht $a_1 a_2$ dem obigen Schema zufolge durch b , kein $b_2 b_n$ aber läuft durch den Punkt b , somit führt $a_1 a_2 b_2$ zu keinem Quadrupel. Verknüpft man dagegen $a_1 a_2$ mit einem c_i , z. B. c_3 , und nennt den vierten Punkt x , so folgt aus $a_1 a_2 c_3 x = a_1 a_2 a_3 a_4$, dass $c_3 x = a_3 a_4 = a_1 a_2$; nun läuft $c_3 c_2$ ebenso durch b wie $a_1 a_2$, folglich ist $x = c_2$ und $a_1 a_2 c_3 c_2$ das gesuchte Quadrupel.

Allgemein: Es seien $e' e'' e''' e^{IV}$ die Elemente irgend einer Verticalreihe; die Gerade $e' e''$ gehe durch m (wobei m einer der Punkte $abcd$ ist); dann sei e_1 irgend ein Element einer andern Verticalreihe und x das fehlende vierte zu $e' e'' e_1$, so ist $e' e'' e_1 x = e' e'' e''' e^{IV}$, also $e_1 x = e''' e^{IV} = e' e''$, d. h. es ist x so zu bestimmen, dass $\overline{e_1 x}$ durch denselben Punkt geht wie $\overline{e' e''}$.

Nun sind wir in der Lage, jedes Tripel zu einem Quadrupel der J^3 zu vervollständigen. Wäre z. B. $c_2 c_3 a_1$ zu ergänzen, so beachte man, dass $c_2 c_3$ durch b geht, und da $a_1 a_2$ auch durch b geht, so ist $c_2 c_3 a_1 a_2$ das Quadrupel. Soll $c_1 c_4 b_2$ vervollständigt werden, so bemerke man, dass $c_1 c_4$ (wie $c_2 c_3$) durch b geht, und weil b der Tangentialpunkt zu b_2 ist, so ist $c_1 c_4 b_2 b_2$ das Quadrupel u. s. w.

Jetzt lässt sich leicht zeigen, dass man auf dem eben entwickelten Wege noch 48 Quadrupel erhält. Wie ein Blick auf das obige Schema lehrt, liefert $a_1 a_2$ mit b_i kein Quadrupel, dagegen mit c_i und d_i je zwei (nämlich $c_3 c_2$ und $c_1 c_4$, beziehungsweise $d_4 d_2$ und $d_1 d_3$), im Ganzen vier; überhaupt gibt jedes der sechs Paare $a_x a_\lambda$ zu vier Quadrupeln Anlass, daher stammen aus der ersten Colonne $6 \cdot 4 = 24$, aus allen vier

Colonnen 4. $24 = 96$ Combinationen, deren jede aber zweimal vorkommt, so dass wirklich 48 verschiedene Quadrupel der J_3^2 entstehen. Nach dem Schema geordnet sind es die folgenden:

$$\begin{aligned}
 &a_1 a_2 c_1 c_4; a_1 a_2 c_2 c_3; a_1 a_2 d_1 d_3; a_1 a_2 d_2 d_4 \\
 &a_3 a_4 c_1 c_4; a_3 a_4 c_2 c_3; a_3 a_4 d_1 d_3; a_3 a_4 d_2 d_4 \\
 &a_1 a_3 b_2 b_3; a_1 a_3 b_1 b_4; a_1 a_3 d_1 d_2; a_1 a_3 d_3 d_4 \\
 &a_2 a_4 b_2 b_3; a_2 a_4 b_1 b_4; a_2 a_4 d_1 d_2; a_2 a_4 d_3 d_4 \\
 &a_1 a_4 b_1 b_3; a_1 a_4 b_2 b_4; a_1 a_4 c_1 c_2; a_1 a_4 c_3 c_4 \\
 &a_2 a_3 b_1 b_3; a_2 a_3 b_2 b_4; a_2 a_3 c_1 c_2; a_2 a_3 c_3 c_4 \\
 &b_1 b_2 c_1 c_3; b_1 b_2 c_2 c_4; b_1 b_2 d_1 d_4; b_1 b_2 d_2 d_3 \\
 &b_3 b_4 c_1 c_3; b_3 b_4 c_2 c_4; b_3 b_4 d_1 d_4; b_3 b_4 d_2 d_3 \\
 &b_1 b_3 c_1 c_2; b_1 b_3 c_3 c_4 \\
 &b_2 b_4 c_1 c_2; b_2 b_4 c_3 c_4 \\
 &b_1 b_4 d_1 d_2; b_1 b_4 d_3 d_4 \\
 &b_2 b_3 d_1 d_2; b_2 b_3 d_3 d_4 \\
 &c_1 c_3 d_1 d_4; c_1 c_3 d_2 d_3 \\
 &c_2 c_4 d_1 d_4; c_2 c_4 d_2 d_3 \\
 &c_1 c_4 d_2 d_3; c_1 c_4 d_1 d_3 \\
 &c_2 c_3 d_2 d_4; c_2 c_3 d_1 d_3
 \end{aligned}$$

Im Ganzen gibt es also $68 + 48 = 116$ Quadrupel der J_3^2 , welche sich aus je vier von den 16 Elementen $a_i b_i c_i d_i$ zusammensetzen. (Siehe Schroeter, Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species, 1890, S. 81 ff., die Configuration der 16 Wendebertührungspunkte einer R_4 betreffend.)

IV. Über eine allgemeine J^n auf C_3 .

38. »Wenn auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung C_3 eine Involution J^n n ten Grades ($n-1$)ter Stufe gegeben ist, so besteht für eine jede Elementengruppe die Gleichung $x_1 x_2 \dots x_n = C$. Man kann nun C immer in der Form $C = k^n x$ darstellen, wobei $k = u_1 u_2 u_3$ die Gleichung der fundamentalen

J^3 der geraden Tripel (oder einer beliebigen J^3) und α entweder $= a$, oder $= \frac{1}{a}$ oder $= \frac{a}{b}$ ist, wo a, b Punkte der C_3 bedeuten.*

Beweis. Für J^2 hat man $x_1 x_2 = C$, und wenn $x_1 x_2 a = k$, so ist $C = \frac{k}{a}$ (also $\alpha = \frac{1}{a}$ und $\mu = 1$); a ist das Centrum der J^2 .

Für J^3 ist $x_1 x_2 x_3 = C$; ein beliebiges aber festes Tripel dieser Involution gibt $a_1 a_2 a_3 = C$; ist nun $a_2 a_3 b_1 = k$, so ist $a_2 a_3 = \frac{k}{b_1}$ und somit $C = \frac{a_1}{b_1} k$ (also $\alpha = \frac{a_1}{b_1}$ und $\mu = 1$).

Für J^4 ist $x_1 x_2 x_3 x_4 = C$ und wenn $x_1 x_2 x_3 x_4 = k a$ gesetzt wird, so ist $C = k a$ und es bedeutet a das Centrum der J^4 oder den Gegenpunkt aller Quadrupel¹ ($\alpha = a$ und $\mu = 1$).

Für J^5 ist $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = C$; wenn $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 a = k^2$, so dass, wenn k die geraden Tripel charakterisirt, a den sechsten Schnittpunkt des durch $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ gelegten Kegelschnittes bedeutet (das Centrum der Involution $J^{5,2}$) so ist $C = \frac{k^2}{a}$ ($\alpha = \frac{1}{a}$ und $\mu = 2$).

Für J^6 ist $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = C$; für ein beliebiges aber festes Sextupel hat man $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = C$ und wenn $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b_1 = k^2$ ist, so folgt $C = \frac{a_1}{b_1} k^2$ ($\alpha = \frac{a_1}{b_1}$ und $\mu = 2$).

Allgemein gilt Folgendes:

Wenn

$$\frac{n}{3} = \mu \quad \frac{n}{3} = \mu + \frac{1}{3} \quad \frac{n}{3} = \mu + \frac{2}{3}$$

so ist

$$C = k^\mu \frac{a}{b} \quad C = k^\mu a \quad C = \frac{k^{\mu+1}}{a}.$$

Man ersieht hieraus, dass mit einer Involution J^n ein fester Punkt (a) der C_3 verknüpft ist, sobald 3 nicht Theiler des Ord-

¹ Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf Curven vom Geschlechte Eins. Sitzungsber. Bd. LXXXVIII, 2. Abth., Art. 10.

² Ibid., Art. 14.

nungsexponenten n ist, dagegen eine eindeutige Beziehung $E(ab)$, sobald n durch 3 theilbar ist.

V. Einer C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebene Polygone.

39. In der Reihe der Punkte $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}$ auf einer C_3 soll jeder Punkt der Tangentialpunkt des vorhergehenden sein. Hat die fundamentale J^3 der geraden Tripel die Gleichung $u_1 u_2 u_3 = k$, so bestehen zwischen jenen Punkten folgende Relationen:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 &= k \\ x_2^2 x_3 &= k \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1}^2 x_n &= k \\ x_n^2 x_{n+1} &= k \end{aligned} \quad (I)$$

Wir erheben diese Gleichungen der Reihe nach zu den Potenzen $2^{n-1}, 2^{n-2} \dots 2^1, 2^0$ und schreiben sie, die Fälle eines geraden und eines ungeraden n trennend, in folgender Anordnung:

a) Für ein gerades n .

$$\begin{aligned} x_1^{2^n} x_2^{2^{n-1}} &= k^{2^{n-1}} \\ k^{2^{n-2}} &= x_2^{2^{n-1}} x_3^{2^{n-2}} \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1}^{2^2} x_n^{2^1} &= k^{2^0} \\ k^{2^0} &= x_n^{2^1} x_{n+1}^{2^0} \end{aligned} \quad (II^a)$$

Aus dieser Darstellung erkennt man bald, dass das Resultat der Multiplication lautet:

$$x_1^{2^n} k^{2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0} = x_{n+1} k^{2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^1}.$$

Nun ist, weil n gerad,

$$\begin{aligned} 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^1 &= 2 \frac{(2^2)^{\frac{n}{2}} - 1}{2^2 - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{3} \\ 2^{n-2} + 2^{n-4} + \dots + 2^0 &= \frac{(2^2)^{\frac{n}{2}} - 1}{2^2 - 1} = \frac{2^n - 1}{3}; \end{aligned}$$

somit hat man für gerade n endgiltig

$$x_1^{2^n} = x_{n+1} k^{\frac{2^n - 1}{3}}. \quad (\text{III}^a)$$

3) Bei einem ungeraden n ordne man die Gleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} x_1^{2^n} x_2^{2^{n-1}} &= k^{2^{n-1}} \\ k^{2^{n-2}} &= x_2^{2^{n-1}} x_3^{2^{n-2}} \\ &\vdots \\ x_{n-2}^{2^3} x_{n-1}^{2^2} &= k^{2^2} \\ k^{2^1} &= x_{n-1}^{2^2} x_n^{2^1} \\ x_n^{2^1} x_{n+1}^{2^0} &= k^{2^0} \end{aligned} \quad (II^3)$$

ihr Product ist

$$x_1^{2^n} x_{n+1} k^{2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^1} = k^{2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^0};$$

für ein ungerades n hat man aber

$$2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^0 = \frac{(2^2)^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2^2 - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{3}$$

$$2^{n-2} + 2^{n-4} + \dots + 2^1 = 2 \frac{(2^2)^{\frac{n-1}{2}} - 1}{2^2 - 1} = \frac{2^n - 2}{3};$$

folglich lautet die obige Gleichung in reducirter Form

$$x_1^{2^n} x_{n+1} = k^{\frac{2^n+1}{3}}. \quad (\text{III}^5)$$

Man kann übrigens beide Fälle in einer Formel zusammenfassen, wenn man bemerkt, dass der Exponent von k der Werth von $\frac{2^n - (-1)^n}{3}$ und der Exponent von x_{n+1} auf der rechten Seite $+1$ oder -1 ist, je nachdem n gerad oder ungerad. Mithin hat man folgende allgemeine Relation zwischen einem beliebigen Punkte x_1 einer C_3 und seinem n ten Tangentialpunkt x_{n+1} :

$$x_1^{2^n} = x^{(-1)^n} k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \quad (\text{III})$$

40. Wir wollen, bevor wir auf die geschlossenen Polygone eingehen, von dieser Formel Gebrauch machen, um zu zeigen, wie man aus den aufeinanderfolgenden Tangentialpunkten eines Punktes der C_3 seine Tangentialpunkte verschiedener Ordnungen ableiten kann.

Es sei x der gegebene Punkt von C_3 , x_1 sein erster, x_2 sein zweiter, . . . x_n sein n ter Tangentialpunkt; dann ist vermöge der Formel (III)

$$x^{2^n} = x_n^{(-1)^n} k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

Hiernach ist speciell

$$\begin{aligned} x^2 x_1 &= k \\ x^4 &= k x_2 \\ x^8 x_3 &= k^3 \\ x^{16} &= k^5 x_4 \\ x^{32} x_5 &= k^{11} \\ x^{64} &= k^{21} x_6 \text{ u. s. w.} \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Bezeichnet man ferner mit y_1, y_2, \dots, y_μ den Tangentialpunkt 1., 2., . . . μ ter Ordnung von x , d. i. den Punkt, in welchem C_3 von der C_1, C_2, \dots, C_μ , welche sie in x 2-, 5-, . . . $(3\mu - 1)$ -punktig berührt, zum letztenmale geschnitten wird, so gelten für diese die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 y_1 &= k \\ x^5 y_2 &= k^2 \\ x^8 y_3 &= k^3 \\ x^{11} y_4 &= k^4 \\ &\dots \dots \dots \\ x^{3\mu-1} y_\mu &= k^\mu. \end{aligned} \quad (\beta)$$

Durch Verbindung der Gleichungen (α) und (β) ergeben sich nun folgende Constructionen der Punkte y_1, y_2, \dots

1. Es ist $y_1 = x_1$.
2. Aus $x^5 y_2 = k^2$ folgt $x^4 x y_2 = k^2$ und wegen $x^4 = k x_2$ weiter $x x_2 y_2 = k$, d. h. y_2 ist der dritte Schnittpunkt von $x x_2$.
3. $x^8 x_3 = k^3$ mit $x^6 y_3 = k^3$ verglichen zeigt, dass $y_3 = x_3$.

4. $x^{11}y_4 = k^4$ gibt $x^8x^2xy_4 = k^4$, und da $x^8 = \frac{k^3}{x_3}$, $x^2 = \frac{k}{x_1}$, so folgt $xy_4 = x_1x_3$, d. h. man ziehe, um y_4 zu erhalten, aus dem dritten Schnittpunkt von x_1x_3 eine Gerade nach dem gegebenen Punkte x .

5. Aus $x^{14}y_5 = k^5$ folgt $x^{16}y_5 = k^5x^2$, oder da $x^{16} = k^5x_4$ und $x^2 = \frac{k}{x_1}$, so ist $x_1x_4y_5 = k$, d. h. y_5 ergibt sich als dritter Schnittpunkt von x_1x_4 .

6. $x^{17}y_6 = k^6$ in der Form $x^{16}xy_6 = k^6$ geschrieben gibt wegen $x^{16} = k^5x_4$ die Relation $xx_4y_6 = k$, welche lehrt, dass sich y_6 als dritter Schnitt von xx_4 ergibt.

7. Aus $x^{20}y_7 = k^7$ folgt, wenn man beachtet, dass $x^{16} = k^5x_4$ und $x^4 = kx_2$ ist, $x_2x_4y_7 = k$, d. h. y_7 ist der dritte Schnittpunkt von x_2x_4 .

8. Schreibt man $x^{23}y_8 = k^8$ in der Gestalt $\frac{x^{16}x^8}{x}y_8 = k^8$ und bemerkt, dass $x^{16} = k^5x_4$ und $x^8 = \frac{k^3}{x_3}$, so folgt $x_4y_8 = xx_3$; man hat also x_4 aus dem dritten Schnittpunkt von xx_3 auf C_3 zu projeciren, um y_8 zu erhalten.

9. Aus $x^{26}y_9 = k^9$ oder $x^{16}x^8x^2y_9 = k^9$ ergibt sich

$$k^5x_4 \frac{k^3}{x_3} \frac{k}{x_1} y_9 = k^9$$

und daraus $x_4y_9 = x_1x_3$, d. h. der dritte Schnittpunkt von x_1x_3 mit x_4 verbunden gibt y_9 .

10. Stellt man $x^{29}y_{10} = k^{10}$ in der Form $\frac{x^{32}}{x^3}y_{10} = k^{10}$ dar und beachtet, dass $x^{32} = \frac{k^{11}}{x_5}$ und $x^2 = \frac{k}{x_1}$, so folgt $x_1y_{10} = xx_5$; man hat also x_1 mit dem dritten Schnittpunkt von xx_5 zu verbinden.

11. Die Vergleichung von $x^{32}y_{11} = k^{11}$ und $x^{32}x_5 = k^{11}$ gibt $y_{11} = x_5$; die C_{11} , welche die C_3 in 32-punktig berührt, schneidet sie nochmals im fünften Tangentialpunkt.

12. Auf ähnlichem Wege erhält man durch entsprechende Combination von (α) , (β) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 xy_{12} &= x_1x_3 \\
 x_2y_{13} &= x_1x_3 \\
 xy_{14} &= x_3x_5 \\
 x_2y_{15} &= x_3x_5 \\
 x_4y_{16} &= x_1x_5 \\
 x_4y_{17} &= x_1x_5 \text{ u. s. w.,}
 \end{aligned}$$

aus welchen die einfachen Constructionen für $y_{12}, y_{13}, \dots y_{17}$ zu entnehmen sind.

41. Soll das n -Eck $x_1x_2\dots x_{n+1}$ (Art. 39) geschlossen sein, so muss der n te Tangentialpunkt mit dem Ausgangspunkte zusammenfallen, also $x_{n+1} \equiv x_1$ sein; demnach ist ein Punkt x der C_3 , von welchem aus sich ein geschlossenes der C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebenes n -Eck construiren lässt, charakterisirt durch die Gleichung

$$x^{2^n-1} = k^{\frac{2^n-1}{3}} \quad \text{für ein gerades } n \quad (\text{IV}^a)$$

$$x^{2^{n+1}} = k^{\frac{2^{n+1}}{3}} \quad \text{für ein ungerades } n \quad (\text{IV}^b)$$

oder in Zusammenfassung beider Fälle durch die Gleichung

$$x^{2^n-(-1)^n} = k^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}. \quad (\text{IV})$$

Dies gibt den Satz: »Die Ecken der einer C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebenen n -Ecke sind die Hauptpunkte¹ einer Involution vom Grade $2^n-(-1)^n$.

Die fundamentale J^3 hat die Gleichung $x'x''x''' = k$; die $J^{3\mu}$, welche Curven μ ter Ordnung auf C_3 bestimmen, hat die Gleichung

$$x'x''x''' \dots x^{(3\mu-1)}x^{(3\mu-1)}x^{(3\mu)} = k^\mu,$$

ihre Hauptpunkte fliessen aus der Gleichung

$$x^{3\mu} = k^\mu;$$

¹ Wir nennen die n -fachen Elemente einer J^n ihre Hauptelemente.

vergleicht man diese mit der oben abgeleiteten (IV), so erkennt man, dass erstere in letztere übergeht, wenn gesetzt wird $\mu = 3^n - (-1)^n$; es sind also die Ecken der n -Ecke unter denjenigen Punkten, in welchen die C_3 von Curven C_μ , das sind Curven $[2^n - (-1)^n]$ ter Ordnung, 3μ -punktig geschnitten wird.

• Jeder aus der Gleichung (IV) resultirende Punkt hat die Eigenschaft, dass sein n ter Tangentialpunkt mit ihm identisch ist. • Denn nennen wir den letzteren x_{n+1} , so ist nach (III)

$$x^{2^n} = x_{n+1}^{(-1)^n} k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$

nach Voraussetzung aber

$$x^{2^n - (-1)^n} = k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}};$$

daraus folgt durch Division

$$x^{(-1)^n} = x_{n+1}^{(-1)^n},$$

d. h. $x_{n+1} \equiv x$, was bewiesen werden sollte.

Unter den $[2^n - (-1)^n]^2$ Hauptpunkten der Involution J^μ , aus welchen die Ecken der um- und eingeschriebenen n -Ecke hervorgehen, befinden sich immer auch die neun Inflexionspunkte; denn ist $x^3 = k$, so ist auch $x^{3[2^n - (-1)^n]} = k^{2^n - (-1)^n}$, somit

$$x^{2^n - (-1)^n} = k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$

der Gleichung (IV) entsprechend. Scheidet man diese neun Punkte aus, da sie als Ecken nicht auftreten können, so verbleiben noch

$$N_n = [2^n - (-1)^n]^2 - 9$$

Punkte.

Wenn nun n eine Primzahl ist, so ergibt sich als Anzahl der um- und eingeschriebenen n -Ecke

$$r_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9}{n}, \quad (V)$$

welche, da ja n ungerad ist, auch geschrieben werden kann

$$\zeta_n = \frac{8(2^{n-1}-1)(2^{n-2}+1)}{n}.$$

Wenn n nicht Primzahl, sondern aus den Primfactoren n_1, n_2, \dots, n_r , deren keiner $= 2$, zusammengesetzt ist derart, dass $n = n_1 n_2 \dots n_r$, so befinden sich unter den N_n Punkten auch die Gruppen derjenigen, welche n_1 -, n_2 -, \dots -, n_r -Ecke ergeben; somit ist dann die Anzahl der n -Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9 - n_1 \zeta_{n_1} - \dots - n_r \zeta_{n_r}}{n}$$

oder in kürzerer Schreibung

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9 - \sum_1^r n_i \zeta_{n_i}}{n}.$$

Diese Formel bleibt auch aufrecht, wenn $n = 2 n_1 n_2 \dots n_r$, weil es Zweiecke nicht gibt.

Ganz allgemein gilt der Satz: »Sind t_1, t_2, t_3, \dots die sämtlichen von 2 und untereinander verschiedenen Theiler von n , so ist die Anzahl der einer C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebenen n -Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9 - \sum t_i \zeta_{t_i}}{n}. \quad (\text{VI})$$

Anmerkung. Als Zweiecke erhält man bloss die neun Inflexionspunkte. Denn soll $x_1^2 x_2 = k$ und $x_2^2 x_1 = k$ sein, so hat man $x_1^2 x_2 = x_2^2 x_1$ und daraus $x_1 = x_2$; dies in $x_1^2 x_2 = k$ gesetzt gibt $x_1^3 = k$, durch welche Gleichung aber die neun Inflexionspunkte definirt sind.

Nachstehend sind die Gleichungen (IV) und die Werthe ζ_n für $n = 3, 4, \dots, 20$ zusammengestellt.¹

¹ Siehe auch Picquet, »Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques«, Journal de l'École polytechnique, cah. 54.

Eckenzahl	Charakt. Gleichung	Anzahl der Polygone
3	$x^9 = k^3$	$24 = \frac{9^2 - 9}{3}$
4	$x^{15} = k^5$	$54 = \frac{15^2 - 9}{4}$
5	$x^{33} = k^{11}$	$216 = \frac{33^2 - 9}{5}$
6	$x^{63} = k^{21}$	$648 = \frac{63^2 - 9 - 3 \cdot 24}{6}$
7	$x^{119} = k^{43}$	$2376 = \frac{129^2 - 9}{7}$
8	$x^{255} = k^{85}$	$8100 = \frac{255^2 - 9 - 4 \cdot 54}{8}$
9	$x^{513} = k^{171}$	$29232 = \frac{513^2 - 9 - 3 \cdot 24}{9}$
10	$x^{1023} = k^{341}$	$104544 = \frac{1023^2 - 9 - 5 \cdot 216}{10}$
11	$x^{2049} = k^{683}$	$381672 = \frac{2049^2 - 9}{11}$

Eckenzahl	Charakt. Gleichung	Anzahl der Polygone
12	$x^{4095} = k^{1385}$	$1397070 = \frac{4095^2 - 9 - 3 \cdot 24 - 4 \cdot 54 - 6 \cdot 648}{12}$
13	$x^{8193} = k^{2731}$	$5163480 = \frac{8193^2 - 9}{13}$
14	$x^{16383} = k^{5461}$	$19170432 = \frac{16383^2 - 9 - 7 \cdot 2376}{14}$
15	$x^{32769} = k^{10923}$	$71587080 = \frac{32769^2 - 9 - 3 \cdot 24 - 5 \cdot 216}{15}$
16	$x^{65535} = k^{21845}$	$268423200 = \frac{65535^2 - 9 - 4 \cdot 54 - 8 \cdot 8100}{16}$
17	$x^{131073} = k^{43691}$	$1010595960 = \frac{131073^2 - 9}{17}$
18	$x^{262143} = k^{87381}$	$3817704744 = \frac{262143^2 - 9 - 3 \cdot 24 - 6 \cdot 648 - 9 \cdot 29232}{18}$
19	$x^{524289} = k^{174763}$	$14467313448 = \frac{524289^2 - 9}{19}$
20	$x^{1048575} = k^{349525}$	$54975424194 = \frac{1048575^2 - 9 - 4 \cdot 54 - 5 \cdot 216 - 10 \cdot 104544}{20}$

A. Dreiecke.

42. Es sei $x_1 x_2 x_3$ (in kurzer Bezeichnung (x)) ein der C_3 um- und eingeschriebenes Dreieck derart, dass x_2 der Tangentialpunkt von x_1 , x_3 der Tangentialpunkt von x_2 und x_1 der Tangentialpunkt von x_3 ist. In der $E(x_1 x_2)$ entspricht, wie man unmittelbar erkennt, dem x_2 der Punkt x_3 und diesem wieder x_1 , es ist dies also eine der vier E_3 (siehe Artikel 35). Daher bestehen die Gleichungen $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}$, $\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_1}{x_2}$ oder

$$x_1^2 = x_2 x_3 \quad x_2^2 = x_3 x_1 \quad x_3^2 = x_1 x_2,$$

aus welchen sich

$$x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_1 x_2 x_3$$

ergibt.

Es sei nun i_1 ein Inflexionspunkt und u der ihm in der $E(x_1 x_2)$ entsprechende Punkt; dann ist $i_1 x_2 = u x_1$, also $u = \frac{x_2}{x_1} i_1$ und $u^3 = \frac{x_2^3}{x_1^3} i_1^3 = i_1^3$, d. h. es ist u wieder ein Wendepunkt; er möge mit i_2 bezeichnet werden und der ihm in derselben E -Beziehung entsprechende, welcher nothwendig wieder ein Wendepunkt sein wird, mit i_3 , so ist

$$i_2 = \frac{x_2}{x_1} i_1 \quad i_3 = \frac{x_2}{x_1} i_2 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_1.$$

Daraus folgt aber $i_1 i_2 i_3 = i_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} i_1 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 i_1^3 = i_1^3 = k$, mithin liegen die drei Wendepunkte $i_1 i_2 i_3$ in einer Geraden. Geht man jetzt von einem weiteren Inflexionspunkte i_4 aus, so führt die $E(x_1 x_2)$ wieder zu einem Tripel $i_4 i_5 i_6$ und von i_7 gelangt man ebenso zu $i_7 i_8 i_9$, wobei

$$\begin{aligned} i_5 &= \frac{x_2}{x_1} i_4 & i_6 &= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_4 \\ i_8 &= \frac{x_2}{x_1} i_7 & i_9 &= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_7. \end{aligned}$$

Das betrachtete Dreieck $x_1 x_2 x_3$ ist so in bestimmter Weise mit dem Wendepunktsdreieit, dessen Seiten $(i_1 i_2 i_3) \equiv D_{123}$, $(i_4 i_5 i_6) \equiv D_{456}$, $(i_7 i_8 i_9) \equiv D_{789}$ sind, verknüpft. Im Hinblick auf das Tableau der Wendepunkte

$$\begin{array}{ccc} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_4 & i_5 & i_6 \\ i_7 & i_8 & i_9 \end{array}$$

wollen wir $D_{123} D_{456} D_{789}$ als das horizontale, $D_{147} D_{258} D_{369}$ als das verticale, $D_{159} D_{267} D_{348}$ als das positive und $D_{357} D_{681} D_{924}$ als das negative Wendepunktsdreieit bezeichnen.

43. Wenn man das Dreieck (x) aus i_1 auf C_3 projicirt, so ergibt sich ein neues Dreieck $(x^{(1)})$, welches zu demselben Wendepunktsdreieit gehört, weil ja das Tripel $i_1 i_2 i_3$ durch diese Projection in $i_1 i_3 i_2$ übergeht. Die Projectionen von (x) aus i_2, i_3 seien $(x^{(2)}), (x^{(3)})$ respective, so gehören die Dreiecke $(x), (x^{(1)}), (x^{(2)}), (x^{(3)})$ alle demselben Wendepunktsdreieit zu; es wird sich aber sogleich zeigen, dass sie nicht sämmtlich von einander verschieden sind. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{k}{i_1 x_1} = \frac{i_1^3}{i_1 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1} \\ x_2^{(1)} &= \frac{k}{i_1 x_2} = \frac{k}{i_1 \frac{i_2}{i_1} x_1} = \frac{k}{i_2 x_1} = \frac{i_2^2}{x_1} \\ x_3^{(1)} &= \frac{k}{i_1 x_3} = \frac{k}{i_1 \frac{i_3}{i_1} x_1} = \frac{k}{i_3 x_1} = \frac{i_3^2}{x_1} \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{k}{i_2 x_1} = \frac{i_2^2}{x_1} = x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} &= \frac{k}{i_2 x_2} = \frac{k}{i_2 \frac{i_2}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_2^2 x_1} = \frac{i_1 i_2}{x_1} = \frac{i_3^2}{x_1} = x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} &= \frac{k}{i_2 x_3} = \frac{k}{i_2 \frac{i_3}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_2 i_3 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1} = x_1^{(1)} \end{aligned}$$

endlich

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= \frac{k}{i_3 x_1} = \frac{i_3^3}{i_3 x_1} = \frac{i_3^2}{x_1} = x_3^{(1)} \\x_2^{(3)} &= \frac{k}{i_3 x_2} = \frac{k}{i_3 \frac{i_2}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_2 i_3 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1} = x_1^{(1)} \\x_3^{(3)} &= \frac{k}{i_3 x_3} = \frac{k}{i_3 \frac{i_3}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_3^2 x_1} = \frac{i_2^2}{x_1} = x_2^{(1)};\end{aligned}$$

hierbei ist von den Relationen $i_1^3 = i_2^3 = i_3^3 = k = i_1 i_2 i_3$ Gebrauch gemacht worden.

Durch Projection von (x) aus $i_1 i_2 i_3$ erhalten wir also nur ein Dreieck $(x^{(1)}) \equiv (x')$ mit den Ecken

$$x'_1 = \frac{i_1^2}{x_1} \quad x'_2 = \frac{i_2^2}{x_1} \quad x'_3 = \frac{i_3^2}{x_1} \quad (1)$$

und zwar gehen die Geraden

$$\begin{aligned}x_1 x'_1, x_2 x'_2, x_3 x'_3 &\text{ durch } i_1 \\x_1 x'_2, x_2 x'_3, x_3 x'_1 &\text{ „ } i_2 \\x_1 x'_3, x_2 x'_1, x_3 x'_2 &\text{ „ } i_3\end{aligned}$$

Die beiden Dreiecke (x) und (x') erscheinen hiernach durch die Wendepunktsgerade D_{123} mit einander verknüpft.

In gleicher Weise liefert die Projection von (x) aus $i_4 i_5 i_6$ ein mit der Wendepunktsgeraden D_{456} verknüpftes Dreieck (x'') mit den Ecken

$$x''_1 = \frac{i_4^2}{x_1} \quad x''_2 = \frac{i_5^2}{x_1} \quad x''_3 = \frac{i_6^2}{x_1} \quad (2)$$

und es gehen die Geraden

$$\begin{aligned}x_1 x''_1, x_2 x''_2, x_3 x''_3 &\text{ durch } i_4 \\x_1 x''_2, x_2 x''_3, x_3 x''_1 &\text{ „ } i_5 \\x_1 x''_3, x_2 x''_1, x_3 x''_2 &\text{ „ } i_6\end{aligned}$$

Endlich ist mit (x) durch D_{789} ein viertes Dreieck (x''') verbunden, dessen Ecken

$$x_1''' = \frac{i_7^2}{x_1} \quad x_2''' = \frac{i_8^2}{x_1} \quad x_3''' = \frac{i_9^2}{x_1} \quad (3)$$

sind; dabei gehen die Geraden

$$\begin{aligned} x_1 x_1''', x_2 x_2''', x_3 x_3''' & \text{ durch } i_7 \\ x_1 x_2''', x_2 x_3''', x_3 x_1''' & \text{ » } i_8 \\ x_1 x_3''', x_2 x_1''', x_3 x_2''' & \text{ » } i_9 \end{aligned}$$

Wir legen nun das Dreieck (x') zu Grunde und leiten aus demselben in der nämlichen Art Dreiecke ab; mit D_{123} combinirt ergibt (x') wieder das Dreieck (x) , dagegen liefert es mit D_{456} ein neues Dreieck (ξ) , dessen Ecken sind

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k}{i_4 x_1'} = \frac{i_4^2}{x_1'} = \frac{i_4^2}{\frac{i_1^2}{x_1}} = \frac{i_4^2 x_1}{i_1^2} \\ \xi_2 &= \frac{k}{i_4 x_2'} = \frac{i_4^2}{x_2'} = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} \\ \xi_3 &= \frac{k}{i_4 x_3'} = \frac{i_4^2}{x_3'} = \frac{i_4^2 x_1}{i_3^2} \end{aligned}$$

also

$$\xi_1 = \frac{i_4^2 x_1}{i_1^2} \quad \xi_2 = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} \quad \xi_3 = \frac{i_4^2 x_1}{i_3^2} \quad (4)$$

und es gehen die Geraden

$$\begin{aligned} \xi_1 x_1', \xi_2 x_2', \xi_3 x_3' & \text{ durch } i_4 \\ \xi_1 x_2', \xi_2 x_3', \xi_3 x_1' & \text{ » } i_5 \\ \xi_1 x_3', \xi_2 x_1', \xi_3 x_2' & \text{ » } i_6 \end{aligned}$$

wie man durch Combination der Werthe (4) und (1) unter Berücksichtigung der zwischen den i bestehenden Relationen leicht erkennt.

Durch Verbindung von (x') mit D_{789} erhält man das Dreieck (ξ') mit den Ecken

$$\xi_1' = \frac{i_7^2 x_1}{i_1^2} \quad \xi_2' = \frac{i_7^2 x_1}{i_2^2} \quad \xi_3' = \frac{i_7^2 x_1}{i_3^2}, \quad (5)$$

und es gehen die Geraden

$$\begin{aligned}\xi'_1 x'_1, \xi'_2 x'_2, \xi'_3 x'_3 & \text{ durch } i_7 \\ \xi'_1 x'_2, \xi'_2 x'_3, \xi'_3 x'_1 & \text{ » } i_8 \\ \xi'_1 x'_3, \xi'_2 x'_1, \xi'_3 x'_2 & \text{ » } i_9\end{aligned}$$

Wir haben jetzt sechs Dreiecke (x) , (x') , (x'') , (x''') , (ξ) , (ξ') , welche in Bezug auf das horizontale Wendepunktsdreieit eine geschlossene Gruppe bilden in dem Sinne, dass aus irgend einem derselben unter Zugrundelegung irgend einer Seite des genannten Dreieits wieder ein Dreieck dieser Gruppe sich ableitet. Wenn z. B. (ξ) mit D_{789} combinirt wird, so hat das abgeleitete Dreieck laut (3) die Ecken

$$\frac{i_7^2}{\xi_1^2}, \quad \frac{i_8^2}{\xi_2^2}, \quad \frac{i_9^2}{\xi_3^2}$$

da aber $\xi_1 = \frac{i_3^2 x_1}{i_1^2}$, so ist die erste Ecke $\frac{i_7^2 i_1^2}{i_3^2 x_1} = \frac{i_3^2}{x_1} = x_1''$ (weil $i_1 i_3 i_7 = i_3^3$), mithin ist (ξ) mit (x'') durch D_{789} verbunden. Man überzeugt sich durch einfache Rechnung, dass verknüpft sind

$$\begin{array}{lll} \text{durch } D_{123} & \text{die Dreieckspaare } (x)(x'); & (\xi)(x'''); & (\xi')(x'') \\ \text{» } D_{456} & \text{»} & (x)(x''); & (\xi)(x'); & (\xi')(x''') \\ \text{» } D_{789} & \text{»} & (x)(x'''); & (\xi)(x''); & (\xi')(x') \end{array}$$

Es vertheilen sich also die 24 einer C_3 um- und eingeschriebenen Dreiecke in Gruppen zu je 6 auf die 4 Wendepunktsdreiseite.

44. Um weitere Beziehungen zwischen den sechs Dreiecken einer Gruppe kennen zu lernen, möge eine andere Bezeichnung eingeführt werden. Es sei die Ecke x'_1 des ersten Dreiecks (x') gegeben, so ist

$$x'_1 = \frac{i_1 x'_1}{i_1}, \quad x'_2 = \frac{i_2 x'_1}{i_1}, \quad x'_3 = \frac{i_3 x'_1}{i_1}. \quad (6)$$

Aus (x') leiten wir mittels D_{123} das Dreieck (ξ') ab, so ist vermöge (1)

$$\xi'_1 = \frac{i_1^2}{x'_1}, \quad \xi'_2 = \frac{i_2^2}{x'_1}, \quad \xi'_3 = \frac{i_3^2}{x'_1}; \quad (7)$$

durch Vermittlung von D_{456} ergibt sich aus (x') das Dreieck (ξ'') , wobei nach (2)

$$\xi_1'' = \frac{i_4^2}{x_1'}, \quad \xi_2'' = \frac{i_5^2}{x_1'}, \quad \xi_3'' = \frac{i_6^2}{x_1'}, \quad (8)$$

endlich erhält man aus (x') mit Hilfe von D_{789} das Dreieck (ξ''') , für welches nach (3)

$$\xi_1''' = \frac{i_7^2}{x_1'}, \quad \xi_2''' = \frac{i_8^2}{x_1'}, \quad \xi_3''' = \frac{i_9^2}{x_1'} \quad (9)$$

Legt man jetzt (ξ') zu Grunde, so gibt D_{123} wieder (x') , dagegen D_{456} ein neues Dreieck (x'') , für welches laut (4)

$$x_1'' = \frac{i_4^2 x_1'}{i_1^2}, \quad x_2'' = \frac{i_5^2 x_1'}{i_2^2}, \quad x_3'' = \frac{i_6^2 x_1'}{i_3^2} \quad (10)$$

und D_{789} liefert (x''') , wobei nach (5)

$$x_1''' = \frac{i_7^2 x_1'}{i_1^2}, \quad x_2''' = \frac{i_8^2 x_1'}{i_2^2}, \quad x_3''' = \frac{i_9^2 x_1'}{i_3^2} \quad (11)$$

Es gehen nun die Geraden

$$\begin{array}{ll} x_1 \xi_1', x_2 \xi_2', x_3 \xi_3' \text{ durch } i_1 & x_1' \xi_1', x_2' \xi_2', x_3' \xi_3' \text{ durch } i_1 \\ x_1' \xi_2', x_2' \xi_3', x_3' \xi_1' > i_2 & x_1'' \xi_2', x_2'' \xi_3', x_3'' \xi_1' > i_2 \\ x_1 \xi_3', x_2 \xi_1', x_3 \xi_2' > i_3 & x_1' \xi_3', x_2' \xi_1', x_3' \xi_2' > i_3 \\ \\ x_1 \xi_1'', x_2 \xi_2'', x_3 \xi_3'' \text{ durch } i_4 & x_1'' \xi_1', x_2'' \xi_2', x_3'' \xi_3' \text{ durch } i_4 \\ x_1' \xi_2'', x_2' \xi_3'', x_3' \xi_1'' > i_5 & x_1''' \xi_2', x_2''' \xi_3', x_3''' \xi_1' > i_5 \\ x_1 \xi_3'', x_2 \xi_1'', x_3 \xi_2'' > i_6 & x_1'' \xi_3', x_2'' \xi_1', x_3'' \xi_2' > i_6 \end{array}$$

¹ Man kann diesen Ecken auch folgende Darstellung geben. Es ist $i_1^7 i_4^9 i_5^2 = i_1^6$, daraus $\frac{i_4^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_7^2} = \frac{i_1^3}{i_3^2} \cdot \frac{i_7}{i_1} = \frac{i_7}{i_1}$ u. s. w.; in gleicher Weise folgt aus $i_1^7 i_4^9 i_5^2 = i_1^6$, dass $\frac{i_2^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_8^2} = \frac{i_1^3}{i_3^2} \cdot \frac{i_8}{i_1} = \frac{i_8}{i_1}$ u. s. w., so dass man auch setzen kann:

$$\begin{array}{lll} x_1' = \frac{i_1 x_1}{i_1} & x_2' = \frac{i_3 x_1}{i_1} & x_3' = \frac{i_9 x_1}{i_1} \\ x_1'' = \frac{i_7 x_1}{i_1} & x_2'' = \frac{i_8 x_1}{i_1} & x_3'' = \frac{i_9 x_1}{i_1} \\ x_1''' = \frac{i_4 x_1}{i_1} & x_2''' = \frac{i_5 x_1}{i_1} & x_3''' = \frac{i_6 x_1}{i_1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 x'_1 \xi'''_1, x'_2 \xi'''_2, x'_3 \xi'''_3 & \text{durch } i_7 \\
 x'_1 \xi'''_2, x'_2 \xi'''_3, x'_3 \xi'''_1 & \text{» } i_8 \\
 x'_1 \xi'''_3, x'_2 \xi'''_1, x'_3 \xi'''_2 & \text{» } i_7 \\
 x'''_1 \xi'_1, x'''_2 \xi'_2, x'''_3 \xi'_3 & \text{durch } i_7 \\
 x'''_1 \xi'_2, x'''_2 \xi'_3, x'''_3 \xi'_1 & \text{» } i_8 \\
 x'''_1 \xi'_3, x'''_2 \xi'_1, x'''_3 \xi'_2 & \text{» } i_9
 \end{array}$$

Gepaart sind die Dreiecke

$$\begin{array}{ll}
 (x')(\xi'); (x'')(\xi'''); (x''')(\xi'') & \text{durch } D_{123} \\
 (x')(\xi''); (x'')(\xi'); (x''')(\xi''') & \text{» } D_{356} \\
 (x')(\xi'''); (x'')(\xi''); (x''')(\xi') & \text{» } D_{789}
 \end{array}$$

Die sechs Dreiecke erscheinen so in zwei Tripel geordnet, $(x'), (x''), (x''')$ und $(\xi'), (\xi''), (\xi''')$, derart, dass keine zwei Dreiecke desselben Tripels mit einander verknüpft sind, dagegen jedes Dreieck des einen Tripels mit jedem Dreieck des andern. Dass die Ecken zweier gepaarten Dreiecke auf einer C_2 liegen, ist leicht zu erkennen; denn man hat beispielsweise für das erste Paar nach (6) und (7)

$$x'_1 x'_2 x'_3 \xi'_1 \xi'_2 \xi'_3 = \frac{i_1 i_2 i_3 x_1'^3}{i_1^3} \cdot \frac{i_1^2 i_2^2 i_3^2}{x_1'^3} = i_2^3 i_3^3 = k^2;$$

solcher C_2 erhält man $3 \cdot 3 = 9$. Es lässt sich ferner der Satz nachweisen: »Wenn man die Ecken zweier Dreiecke aus der Terne $(x')(x'')(x''')$ mit einander verbindet, so schneiden die neun Geraden die C_3 in den Ecken des dritten Dreiecks.« Selbstverständlich gilt der Satz auch für die andere Terne. Es ist nämlich der dritte Schnitt von

$$\left. \begin{array}{l}
 x'_1 x''_1 \dots \frac{k}{x'_1 x''_1} = \frac{k i_1^2}{i_4^2 x_1'^2} = \frac{k i_1^2 x'_1}{i_4^2 x_1'^3} = \frac{i_1 i_2 x'_1}{i_4^2} = \frac{i_2^2 x'_1}{i_4^2} \equiv x'''_2 \\
 x'_1 x''_2 \dots \frac{k}{x'_1 x''_2} = \frac{k i_2^2}{i_4^2 x_1'^2} = \frac{k i_2^2 x'_1}{i_3^2 x_1'^3} = \frac{i_2^3 x'_1}{i_4^2 i_1} = \frac{i_2^2 x'_1}{i_4^2} = \frac{i_7^2 x'_1}{i_1^2} \equiv x'''_1 \\
 x'_1 x''_3 \dots \frac{k}{x'_1 x''_3} = \frac{k i_3^2}{i_4^2 x_1'^2} = \frac{k i_3^2 x'_1}{i_3^2 x_1'^3} = \frac{i_3^2 i_2 x'_1}{i_4^2 i_1} = \frac{i_3 i_1^2 x'_1}{i_4^2 i_1} = \frac{i_2^2 x'_1}{i_4^2} \equiv x'''_3
 \end{array} \right\} (12)$$

¹ Dabei wird Gebrauch gemacht von der Bemerkung, dass $x_1'^2 x_2' = x_1'^2 \frac{i_2}{i_1} x_1' = k$, also $x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k$ und von den Beziehungen zwischen den i -Punkten.

$$\left. \begin{aligned}
 x_2' x_1'' \dots \frac{k}{x_2' x_1''} &= \frac{k i_1^3}{i_4^2 i_2 x_1'^2} = \frac{k i_2^2 x_1'}{i_4^2 x_1'^3} = \frac{i_2^3 x_1'}{i_4^2 i_1} = \frac{i_1^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_1''' \\
 x_2' x_2'' \dots \frac{k}{x_2' x_2''} &= \frac{k i_1 i_2^2}{i_4^2 i_2 x_1'^2} = \frac{i_2^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_3''' \\
 x_2' x_3'' \dots \frac{k}{x_2' x_3''} &\equiv x_2''' \\
 x_3' x_1'' \dots \frac{k}{x_3' x_1''} &= \frac{k i_1^3}{i_4^2 i_3 x_1'^2} = \frac{k i_3^2 x_1'}{i_4^2 x_1'^3} = \frac{i_3^2 i_2 x_1'}{i_4^2 i_1} = \frac{i_2^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_3''' \\
 x_3' x_2'' \dots \frac{k}{x_3' x_2''} &= \frac{k i_2^2 i_1}{i_4^2 i_3 x_1'^2} = \frac{k i_2^2 i_1 x_1'}{i_4^2 i_3 x_1'^3} = \frac{i_2^3 x_1'}{i_4^2 i_3} = \frac{i_2^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_2''' \\
 x_3' x_3'' \dots \frac{k}{x_3' x_3''} &\equiv x_1'''
 \end{aligned} \right\} (12)$$

Es liegen also je in einer Geraden die Punktetripel

$$\begin{aligned}
 &x_1' x_1'' x_2'''; \quad x_1' x_2'' x_1'''; \quad x_1' x_3'' x_3''' \\
 &x_2' x_1'' x_1'''; \quad x_2' x_2'' x_3'''; \quad x_2' x_3'' x_2''' \\
 &x_3' x_1'' x_3'''; \quad x_3' x_2'' x_2'''; \quad x_3' x_3'' x_1'''
 \end{aligned}$$

Man findet ebenso, dass je in einer Geraden liegen die Punkte

$$\begin{aligned}
 &\xi_1' \xi_1'' \xi_2'''; \quad \xi_1' \xi_2'' \xi_1'''; \quad \xi_1' \xi_3'' \xi_3''' \\
 &\xi_2' \xi_1'' \xi_1'''; \quad \xi_2' \xi_2'' \xi_3'''; \quad \xi_2' \xi_3'' \xi_2''' \\
 &\xi_3' \xi_1'' \xi_3'''; \quad \xi_3' \xi_2'' \xi_2'''; \quad \xi_3' \xi_3'' \xi_1'''
 \end{aligned}$$

Die neun x , neun ξ und neun i bilden also eine solche Configuration, dass je drei x , drei ξ und drei i auf einer Geraden liegen (das gibt $3 \cdot 12 = 36$ Gerade) und dass je ein x , ein ξ und ein i einer Geraden angehören (das gibt $9 \cdot 9 = 81$ Gerade); im Ganzen sind also die 27 Punkte auf 117 Geraden zu je dreien vertheilt. Offenbar bilden die neun x , neun ξ und neun i drei connexe Gruppen.

45. Die vier cyclischen E_3 sind gegeben durch die Verhältnisse $\frac{i_2}{i_1}, \frac{i_4}{i_1}, \frac{i_5}{i_1}, \frac{i_6}{i_1}$, so zwar, dass die einem Punkte z in ihnen entsprechenden Punkte der Reihe nach $\frac{i_2}{i_1} z, \frac{i_4}{i_1} z, \frac{i_5}{i_1} z,$

$\frac{i_6}{i_1}$ z. Man erkennt leicht, dass der $E(i_1 i_2)$ folgende Tripel an-
gehören:

$$\begin{aligned} x'_1 x'_2 x'_3, & x''_1 x''_2 x''_3, & x'''_1 x'''_2 x'''_3 \\ \xi'_1 \xi'_2 \xi'_3, & \xi''_1 \xi''_2 \xi''_3, & \xi'''_1 \xi'''_2 \xi'''_3 \\ i_1 i_2 i_3, & i_4 i_5 i_6, & i_7 i_8 i_9. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die $E(i_1 i_4)$, so bemerken wir, dass die-
selbe zunächst die Tripel $i_1 i_4 i_7$, $i_2 i_5 i_8$, $i_3 i_6 i_9$ enthält. Der
dem x'_1 entsprechende Punkt ist $\frac{i_4 x'_1}{i_1} \equiv x'''_1$ (s. Fussnote S. 410)
und diesem wieder entspricht $\frac{i_4^2 x'_1}{i_1^2} \equiv x''_1$; man findet so das
folgende Tableau der Tripel in $E(i_1 i_4)$:

$$\begin{aligned} x'_1 x'''_1 x''_1, & x'_2 x'''_2 x''_2, & x'_3 x'''_3 x''_3 \\ \xi'_1 \xi'''_1 \xi''_1, & \xi'_2 \xi'''_2 \xi''_2, & \xi'_3 \xi'''_3 \xi''_3 \\ i_1 i_4 i_7, & i_2 i_5 i_8, & i_3 i_6 i_9. \end{aligned}$$

Ebenso erkennt man, dass der $E(i_1 i_6)$ angehören die
Tripel

$$\begin{aligned} x'_1 x'''_3 x''_2, & x''_1 x'_3 x''_2, & x'_1 x'_3 x'_2 \\ \xi'_1 \xi'''_3 \xi''_2, & \xi''_1 \xi'_3 \xi''_2, & \xi'_1 \xi'_3 \xi'_2 \\ i_1 i_6 i_8, & i_2 i_4 i_9, & i_3 i_5 i_7. \end{aligned}$$

Endlich kommen in der $E(i_1 i_5)$ die Tripel vor:

$$\begin{aligned} x'_1 x'''_2 x''_3, & x''_1 x'_2 x''_3, & x'''_1 x''_2 x'_3 \\ \xi'_1 \xi'''_2 \xi''_3, & \xi''_1 \xi'_2 \xi''_3, & \xi'''_1 \xi''_2 \xi'_3 \\ i_1 i_5 i_9, & i_2 i_6 i_7, & i_3 i_4 i_8. \end{aligned}$$

46. Es entsteht die Frage, welche von den gefundenen
Relationen bestehen bleiben, wenn der Ausgangspunkt x'_1 ein
beliebiger Punkt der Curve ist. Aus ihm ergeben sich durch
Projection aus den neun i die neun ξ , für welche die Gleichungen
(7), (8), (9) geltend bleiben; ebenso bleiben die Gleichungen (6),
(10) und (11) und die darauffolgenden Tableaux aufrecht; da-
gegen gelten die Gleichungen (12) und die sich daran an-
schliessenden Bemerkungen nur, wenn $x_1^3 = \frac{i_1}{i_2} k$. Die Be-
trachtungen des Art. 45 haben allgemeine Geltung.

47. Aus den Gleichungen (6) bis (12) findet man, dass

$$x_1'^3 = x_2'^3 = x_3'^3 = \frac{i_1}{i_2} k, \quad x_1''^3 = x_2''^3 = x_3''^3 = x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k,$$

$$x_1'''^3 = x_2'''^3 = x_3'''^3 = x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k$$

und

$$\xi_1'^3 = \xi_2'^3 = \xi_3'^3 = \frac{i_2}{i_1} k, \quad \xi_1''^3 = \xi_2''^3 = \xi_3''^3 = \frac{i_2}{i_1} k,$$

$$\xi_1'''^3 = \xi_2'''^3 = \xi_3'''^3 = \frac{i_2}{i_1} k,$$

also allgemein

$$x^3 = \frac{i_1}{i_2} k, \quad \xi^3 = \frac{i_2}{i_1} k.$$

Es sind hiernach die neun x die Wurzeln der Gleichung $x^3 = \frac{i_1}{i_2} k$, d. h. die dreifachen Elemente jener J^3 , deren Gleichung lautet $u_1 u_2 u_3 = \frac{i_1}{i_2} k$, wenn k die Involution der geraden Tripel charakterisirt. Ebenso sind die neun ξ die dreifachen Elemente der Involution $v_1 v_2 v_3 = \frac{i_2}{i_1} k$. Diese beiden J^3 sind residual,¹ weil $u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 = k^2$ ist. Wir erhalten noch drei Paare solcher J^3 , entsprechend den Quotienten $\frac{i_1}{i_4}, \frac{i_4}{i_1}, \frac{i_1}{i_5}, \frac{i_5}{i_1}, \frac{i_1}{i_6}, \frac{i_6}{i_1}$. Im Ganzen also haben wir acht J^3 in residuale Paare geordnet; es sind dies offenbar diejenigen acht J^3 , welche mit der fundamentalen $w_1 w_2 w_3 = k$ zusammen aus der J^9 abgeleitet werden können, deren Gleichung lautet: $z_1 z_2 \dots z_9 = k^3$.

Wenn man aus drei Inflexionspunkten ein Tripel bildet, so ist durch dasselbe eine der neun J^3 bestimmt; liegen die drei i in gerader Linie, so ist die J^3 die Fundamentale $x'x''x''' = k$; liegen sie nicht in einer Geraden, so erhält man eine der obigen acht J^3 ; denn sind $i'i''i'''$ die ausgewählten drei Inflexionspunkte und liegen sie nicht in einer Geraden, so wird beispiels-

¹ Sitzungsber., Bd. LXXXVIII, Abth. II a, S. 438.

weise i_0 mit $i''i'''$ in einer Geraden enthalten sein und man hat $i'i''i''' = \frac{i' \cdot i''i'''i_0}{i_0} = \frac{i'}{i_0} k$, w. z. b. w.

Es entsteht die Frage: Wann sind die durch zwei i -Tripel bestimmten J^3 residual? Wir können annehmen, dass die beiden Tripel ein Elementenpaar $i'i''$ gemein haben; sind dann ii_0 die nichtgemeinsamen Elemente, so muss, damit die J^3 residual seien, $i'i''i \cdot i'i''i_0 = k^2 = i'^2i''^2j^2$ (dabei bedeutet j den mit $i'i''$ in einer Geraden liegenden Wendepunkt), also $ii_0 = j^2$, d. h. i und i_0 müssen mit j in einer Geraden liegen. So sind z. B. $i_1i_2i_4$ und $i_1i_2i_8$ zwei Tripel, welche residuale J^3 bestimmen.

Wir haben hiernach folgende vier Paare von Tripeln mit dem gemeinsamen Elementenpaar i_1i_2 , welche die vier Paare residualer J^3 bestimmen:

$$\begin{array}{llll} i_1i_2i_4; i_1i_2i_8 & \text{entsprechend den Werthen} & \frac{i_5}{i_1} k, & \frac{i_1}{i_5} k; \\ i_1i_2i_5; i_1i_2i_7 & & \frac{i_6}{i_1} k, & \frac{i_1}{i_6} k; \\ i_1i_2i_6; i_1i_2i_9 & & \frac{i_4}{i_1} k, & \frac{i_1}{i_4} k; \\ i_1i_2i_1; i_1i_2i_2 & & \frac{i_2}{i_1} k, & \frac{i_1}{i_2} k. \end{array}$$

Anmerkung I. Dem Tripel $i_1i_2i_3$ entspricht die fundamentale $J^3(k)$.

Anmerkung II. Jedes Paar $i'i''$ kann auf vier verschiedene Arten durch ein anderes Paar und einmal durch ein Quadrat ersetzt werden, z. B. $i_1i_2 = i_4i_8 = i_5i_7 = i_6i_9 = i_3^2$. Die neun Punkte i lassen sich auf neun verschiedene Arten in 12 Tripel einer J^3 ordnen. Statt des Tripels $i_1i_2i_1 = i_1^2i_2$ kann beispielsweise auch $i_2i_4i_7$ (weil $i_1^2 = i_4i_7$) und statt $i_1i_2i_2 = i_1i_2^2$ auch $i_1i_5i_8$ (weil $i_2^2 = i_5i_8$) geschrieben werden.

Durch jedes der obigen (oder ein ihm äquivalentes) Tripel gehen nun neun C_2 , welche die C_3 osculiren, und die neun Osculationspunkte sind die neun x -Punkte; dem Nebentripel entsprechen in gleicher Weise die neun ξ -Punkte; dies gibt die 24 Dreiecke und ihre Gruppierung.

Es ist (Artikel 44)

$$\begin{aligned}x'_1 x'_2 x'_3 &= x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k \\x''_1 x''_2 x''_3 &= x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k \\x'''_1 x'''_2 x'''_3 &= x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k,\end{aligned}$$

diese drei Dreiecke gehören als Tripel der $J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$ an.

Weiter ist

$$\xi'_1 \xi'_2 \xi'_3 = \frac{(i_1 i_2 i_3)^2}{x_1'^3} = \frac{k^2}{\frac{i_1}{i_2} k} = \frac{i_2}{i_1} k$$

und ebenso

$$\xi''_1 \xi''_2 \xi''_3 = \xi'''_1 \xi'''_2 \xi'''_3 = \frac{i_2}{i_1} k,$$

so dass diese Tripel der residualen $J^3\left(\frac{i_2}{i_1} k\right)$ entsprechen; es liegen also je eines der x - und der ξ -Tripel auf einer C_2 .

Es ist ξ'_2 der Tangentialpunkt von ξ'_1 , daher $\xi_1'^2 \xi'_2 = k$; dagegen ist

$$\xi'_1 \xi_2'^2 = \frac{i_1^2 i_2^3}{x_1'^3} = \frac{i_1^2 i_2^3}{\frac{i_1}{i_2} k} = \frac{i_1 i_2^6}{i_2 k} = \frac{i_1}{i_2} k,$$

also ist $\xi'_1 \xi'_2 \xi'_2$ auch eine Gruppe der $J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$ und wird daher mit irgend einem Tripel der residualen $J^3\left(\frac{i_2}{i_1} k\right)$, also wieder mit einem ξ -Tripel in einer C_2 liegen. Das heisst: »Der Kegelschnitt, welcher durch ein ξ -Tripel und ein Elementenpaar eines zweiten ξ -Tripels hindurchgeht, berührt C_3 in jenem Punkte des Paares, welcher der Tangentialpunkt des andern ist.« Dasselbe gilt von seinem x -Tripel und einem x -Paar.

Betrachten wir jetzt zwei Tripel, welche zwei verschiedenen nicht residualen J^3 angehören, z. B.

$$x'_1 x'_2 x'_3 \text{ aus der } J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$$

und

$$y'_1 y'_2 y'_3 \text{ aus der } J^3\left(\frac{i_1}{i_4} k\right);$$

so ist $x^3 = \frac{i_1}{i_2} k$, $y^3 = \frac{i_1}{i_4} k$. Der restliche Schnitt von $\bar{x}\bar{y}$ mit C_3

sei z , so hat man $z = \frac{k}{xy}$, somit $z^3 = \frac{k^3}{x^3 y^3} = \frac{i_2 i_4}{i_1^2} k = \frac{i_1 i_5}{i_1^2} k$, also $z^3 = \frac{i_5}{i_1}$; d. h. durch Verbindung der Punkte zweier Tripel, deren eines $J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$, das andere $J^3\left(\frac{i_1}{i_4} k\right)$ angehört, ergibt sich ein Tripel der $J^3\left(\frac{i_5}{i_1} k\right)$.

48. Um eine Übersicht über die acht Involutionen J^3 zu gewinnen, wollen wir eine neue Bezeichnung derselben einführen, welche sich auf die Bemerkung gründet, dass man alle neun J^3 erhält (die fundamentale mitgezählt), wenn man einen Inflexionspunkt z. B. i_1 als Doppelement mit jedem der i zu einem Tripel verbindet, also von den Tripeln $i_1^2 i_1$, $i_1^2 i_2$, ... $i_1^2 i_9$ ausgeht; diese Involutionen sollen der Reihe nach mit $J^3(i_1^2 i_1)$, $J^3(i_1^2 i_2)$... oder kürzer, mit Weglassung des i_1^2 , durch $J^3(i_1)$, $J^3(i_2)$, ... $J^3(i_9)$ bezeichnet werden.

Die erste, $J^3(i_1)$, ist die fundamentale Involution der geraden Tripel, weil $i_1^3 = k$. Für die übrigen hat man folgende Ansätze:

$$J^3(i_2) \dots u_1 u_2 u_3 = i_1^2 i_2 = i_1^3 \frac{i_2}{i_1} = \frac{i_2}{i_1} k \text{ also } J^3(i_2) = J^3\left(\frac{i_2}{i_1} k\right)$$

$$J^3(i_3) \dots = i_1^2 i_3 = \frac{i_3}{i_1} k = \frac{i_1}{i_2} k \quad \triangleright \quad J^3(i_3) = J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$$

$$J^3(i_4) \dots = i_1^2 i_4 = i_1^3 \frac{i_4}{i_1} = \frac{i_4}{i_1} k \quad \triangleright \quad J^3(i_4) = J^3\left(\frac{i_4}{i_1} k\right)$$

$$J^3(i_5) \dots = i_1^2 i_5 = i_1^3 \frac{i_5}{i_1} = \frac{i_5}{i_1} k \quad \triangleright \quad J^3(i_5) = J^3\left(\frac{i_5}{i_1} k\right)$$

$$J^3(i_6) \dots = i_1^2 i_6 = i_1^3 \frac{i_6}{i_1} = \frac{i_6}{i_1} k \quad \triangleright \quad J^3(i_6) = J^3\left(\frac{i_6}{i_1} k\right)$$

$$J^3(i_7) \dots = i_1^2 i_7 = \frac{i_7}{i_1} k = \frac{i_1}{i_4} k \quad \triangleright \quad J^3(i_7) = J^3\left(\frac{i_1}{i_4} k\right)$$

$$J^3(i_8) \dots = i_1^2 i_8 = \frac{i_8}{i_1} k = \frac{i_1}{i_6} k \quad \triangleright \quad J^3(i_8) = J^3\left(\frac{i_1}{i_6} k\right)$$

$$J^3(i_9) \dots = i_1^2 i_9 = \frac{i_9}{i_1} k = \frac{i_1}{i_5} k \quad \triangleright \quad J^3(i_9) = J^3\left(\frac{i_1}{i_5} k\right)$$

Die vier Paare residualer J^3 sind also

$$\begin{array}{ll} J^3(i_5), & J^3(i_9) \\ J^3(i_6), & J^3(i_8) \\ J^3(i_4), & J^3(i_7) \\ J^3(i_2), & J^3(i_3). \end{array}$$

Man kann dies in folgender Weise ausdrücken: Zu einer $J^3(i_m)$ ist eine $J^3(i_n)$ dann residual, wenn $i_m i_n$ mit i_1 in gerader Linie liegen. Die $J^3(i_1)$ ist sich selbst residual. Die Tripel der x gehören der $J^3(i_3)$, jene der ξ der $J^3(i_2)$ an.

Der am Schlusse des vorigen Artikels erörterte Zusammenhang lässt sich jetzt in folgendem Satze aussprechen: »Wird ein Tripel, welches der $J^3(i_m)$ angehört, mit einem Tripel der $J^3(i_n)$ verbunden, und ist i_p der mit i_m und i_n in gerader Linie liegende Inflexionspunkt, so schneiden die neun Geraden die C_3 in einem Tripel der $J^3(i_p)$ «.

Denn ist $x^3 = i_1^2 i_m$, $y^3 = i_1^2 i_n$ und $z = \frac{k}{xy}$, so ist

$$z^3 = \frac{k^3}{i_1^4 i_m i_n} = \frac{k^2}{i_1 i_m i_n} = \frac{k^2 i_p}{i_1 i_m i_n i_p} = \frac{k i_p}{i_1} = \frac{i_1^3 i_p}{i_1} = i_1^2 i_p,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Man kann dieses Ergebniss noch kürzer ausdrücken, wenn man die Tripel, welche der $J^3(i_r)$ angehören, kurzweg mit (x_r) bezeichnet, nämlich wie folgt: »Aus einem Tripel (x_m) und einem Tripel (x_n) folgt ein Tripel (x_p) , wenn $i_m i_n i_p$ in einer Geraden liegen.«

Selbstverständlich kann man aus den (x_m) und (x_n) alle drei Tripel (x_p) ableiten. Wird jedoch $m = n$, so erhält man das eine Tripel (x_p) dreimal.

Sind $J^3(i_m)$, $J^3(i_n)$ zwei residuale Involutionen, so ist $i_p = i_1$ und demzufolge sind die drei Tripel (x_p) auf drei Inflexionspunkte reducirt, welche in gerader Linie, und zwar auf einer Seite desjenigen Wendepunktsdreiseits liegen, durch welches (x_m) und (x_n) verknüpft sind. Man erkennt übrigens leicht, dass die zu residualen Involutionen gehörigen Tripel $(x_m)(x_n)$ durch jenes Dreiseit verknüpft sind, in welchem $\overline{i_m i_n}$ eine Seite ist. So sind demnach verknüpft

die sechs Dreiecke (x_2) und (x_3) durch das horizontale Wendepunktsdreieit;

die sechs Dreiecke (x_4) und (x_7) durch das verticale Wendepunktsdreieit;

die sechs Dreiecke (x_5) und (x_9) durch das positive Wendepunktsdreieit;

die sechs Dreiecke (x_6) und (x_8) durch das negative Wendepunktsdreieit.

B. Vierecke.

49. Es sei (siehe Artikel 40) x_1 ein Punkt auf C_3 , welcher der Gleichung

$$x^{15} = k^5 \quad (1)$$

genügt; dann bildet er einen Eckpunkt eines der C_3 um- und eingeschriebenen Vierecks, dessen Eckpunkte sind:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{k}{x_2^2} = \frac{x_1^4}{k}, \quad x_4 = \frac{k}{x_3^2} = \frac{k^3}{x_1^8}. \quad (2)$$

Der dritte Schnittpunkt der Diagonale x_1x_3 mit C_3 ist

$$\eta_1 = \frac{k}{x_1x_3} = \frac{k^2}{x_1^5}, \text{ woraus } \eta_1^3 = \frac{k^6}{x_1^{15}} = k; \quad (3)$$

der dritte Schnittpunkt der Diagonale x_2x_4

$$\eta_2 = \frac{k}{x_2x_4} = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{x_1^{15}}{k^3x_1^5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1, \quad (4)$$

d. h. »die beiden Diagonalen eines der C_3 um- und eingeschriebenen Vierecks schneiden sich auf der Curve und zwar in einem Inflexionspunkte derselben.« Hieraus kann schon der Schluss gezogen werden, dass sich die 54 Vierecke in Gruppen zu je sechs auf die neun Inflexionspunkte vertheilen werden.

50. »Es seien $y_1y_2y_3y_4$ die Tangentialpunkte μ ter Ordnung von $x_1x_2x_3x_4$, d. h. die letzten Schnitte der die C_3 in den Punkten $x_1x_2x_3x_4$ respective $(3\mu-1)$ -punktig berührenden C_μ , so bilden $y_1y_2y_3y_4$ wieder ein um- und eingeschriebenes Viereck.«

Für $\mu = 1$ ist $y_1 = \frac{k}{x_1^2} = x_2$, es entsteht also das ursprüngliche Viereck.

Für $\mu = 2$ ist $y_1 = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1$, somit fällt y_1 und mit ihm auch $y_2 y_3 y_4$ in einen Inflexionspunkt, und zwar in denjenigen, in welchem sich die Diagonalen des ursprünglichen Vierecks schneiden.

Für $\mu = 3$ hat man $y_1 = \frac{k^3}{x_1^8} = x_3$, für

$$\mu = 4 \dots y_1 = \frac{k^4}{x_1^{11}} = \frac{k^4 x_1^4}{x_1^{15}} = \frac{x_1^4}{k} = x_3,$$

für

$$\mu = 5 \dots y_1 = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{k^5 x_1}{x_1^{15}} = x_1,$$

in allen diesen Fällen kommt man also auf das nämliche Viereck zurück.

Allgemein ist der Tangentialpunkt μ^{ter} Ordnung von x_1

$$y_1 = \frac{k^\mu}{x_1^{3\mu-1}};$$

bringt man die Zahl μ auf die Form $\mu = 5\nu + r$, so dass r den Rest bedeutet, welchen sie bei der Division durch fünf zurücklässt, so ist

$$y_1 = \frac{k^{5\nu+r}}{x_1^{15\nu+3r-1}} = \left(\frac{k^5}{x_1^{15}}\right)^\nu \frac{k^r}{x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}};$$

ertheilt man r der Reihe nach die möglichen Werthe 0, 1, 2, 3, 4, so ergibt sich, wie oben entwickelt wurde,

$$\begin{array}{ll} \text{für } r = 0 & y_1 = x_1 \\ \text{» } r = 1 & y_1 = x_2 \\ \text{» } r = 2 & y_1 = \eta_1 \\ \text{» } r = 3 & y_1 = x_3 \\ \text{» } r = 4 & y_1 = x_3. \end{array}$$

Man kommt auf diesem Wege immer entweder wieder in das ursprüngliche Viereck zurück oder in dem ihm entsprechenden Inflexionspunkt; neue Vierecke lassen sich also in dieser Weise nicht ableiten. Das Ergebniss aber kann man folgendermassen aussprechen: »Die im Punkte x_1 die $C_3(3\mu-1)$ -

punktig berührende C_μ trifft sie zum letztenmale in $x_1, x_2, \eta_1, x_3, x_3$, je nachdem der bei der Division $\frac{\mu}{5}$ verbleibende Rest 0, 1, 2, 3, 4 ist.*

Die Gruppe der sechs zu einem Wendepunkt gehörigen Vierecke lässt sich ergänzen, sobald zwei dieser Vierecke bekannt sind, und zwar auf Grund folgenden Satzes: »Sind $x_1x_2x_3x_4$ und $x'_1x'_2x'_3x'_4$ zwei zu einem i gehörige Vierecke, so erhält man die Ecken der vier andern als dritte Schnitte der Geraden $x'_mx_1, x'_mx_2, x'_mx_3, x'_mx_4$ ($m = 1, 2, 3, 4$).« Denn, ist ξ_1 der dritte Schnittpunkt von x'_mx_1 , so ist

$$\xi_1 = \frac{k}{x'_mx_1},$$

daher

$$\xi_1^{15} = \frac{k^{15}}{x_m'^{15} x_1^{15}} = \frac{k^{15}}{k^{10}} = k^5,$$

also ξ_1 thatsächlich Ecke eines Vierecks und der zugehörige Inflexionspunkt nach (3)

$$\eta'_1 = \frac{k^2}{\xi_1^5} = \frac{x_m'^{15} x_1^{15}}{k^3};$$

weil aber die beiden gegebenen Vierecke zu demselben Inflexionspunkte gehören, so ist $\frac{x_m'^{15}}{k^2} = \frac{x_1^{15}}{k^2}$, daher weiter

$$\eta'_1 = k \left(\frac{x_1^{15}}{k^2} \right)^2 = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{x_1^{15}}{k^3 x_1^5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1, \text{ w. z. b. w.}$$

51. Ist i der dem Viereck $x_1x_2x_3x_4$ adjungirte Inflexionspunkt, so findet man auf Grund der Gleichungen (3) und (2), dass

$$i = \frac{k^2}{x_1^5} = \frac{k^2}{x_2^5} = \frac{k^2}{x_3^5} = \frac{k^2}{x_4^5},$$

so dass also

$$x_1^5 = x_2^5 = x_3^5 = x_4^5 = \frac{k^2}{i} = \frac{(i^3)^2}{i} = i^5;$$

demnach sind die 24 Ecken der mit i verknüpften 6 Vierecke die weiteren 24 fünffachen Elemente jener J^5 , welche i zum fünffachen Punkte hat.

Wird das Viereck, welches wir jetzt kurz (x) nennen, aus einem zweiten Inflexionspunkt i_1 auf die C_3 projecirt, so entsteht ein neues Viereck (x'), und zwar ist wegen $x_\lambda x'_\lambda i_1 = k$

$$x'_\lambda = \frac{k}{x_\lambda i_1} = \frac{i_1^3}{x_\lambda i_1} = \frac{i_1^2}{x_\lambda},$$

so dass $\frac{i_1^2}{x_1}, \frac{i_1^2}{x_2}, \frac{i_1^2}{x_3}, \frac{i_1^2}{x_4}$ die Ecken eines der andern 54 Vierecke darstellen.¹

Wir projeciren nun (x') aufs Neue aus einem dritten Wendepunkt i_2 nach (x''), wobei allgemein $x''_\lambda = \frac{i_2^2}{x'_\lambda} = \frac{i_2^2 x_\lambda}{i_1^2}$, dann (x'') weiter aus i_3 nach (x'''), wobei $x'''_\lambda = \frac{i_3^2}{x''_\lambda} = \frac{i_1^2 i_3^2}{i_2^2 x_\lambda}$ und stellen uns nun die Frage, wann (x''') wieder mit dem ursprünglichen Inflexionspunkt i verknüpft ist. Die hiefür nothwendige Bedingung lautet $x'''_1 x'''_3 = x_1 x_3$, also nach Einsetzung der Werthe für x'''_1, x'''_3

$$\frac{i_1^4 i_3^4}{i_2^4 x_1 x_3} = x_1 x_3,$$

oder wegen $i_1^3 = i_2^3 = i_3^3 = k$ weiter

$$\frac{k i_1 i_3}{i_2} = (x_1 x_3)^2 = \left(\frac{k}{i}\right)^2 = \frac{k i^3}{i^2} = k i,$$

woraus $i_1 i_3 = i i_2$, d. h. die Geraden $i i_2$ und $i_1 i_3$ müssen sich auf der C_3 schneiden.

52. Es sei i_1 der dem Viereck $x_1 x_2 x_3 x_4$ adjungirte Inflexionspunkt, so dass $x_1^3 = i_1^3$ ist. In der durch $i_1 x_1$ bestimmten eindeutigen Beziehung $E(i_1 x_1)$ ist die Reihe der einander entsprechenden Punkte (siehe Abschnitt II)

$$i_1; \quad x_1; \quad \frac{x_1^2}{i_1} = \frac{x_1^{10}}{i_1 x_1^8} = \frac{i_1^{10}}{i_1 x_1^8} = \frac{k^3}{x_1^8} = x_4;$$

$$\frac{x_1^3}{i_1^2} = \frac{x_1^5}{i_1^2 x_1^3} = \frac{i_1^3}{x_1^2} = \frac{k}{x_1^2} = x_2; \quad \frac{x_1^4}{i_1^3} = \frac{x_1^4}{k} = x_3; \quad \frac{x_1^5}{i_1^4} = i_1;$$

¹ Man überzeugt sich leicht, dass jeder folgende dieser vier Punkte Tangentialpunkt des vorangehenden und der erste Tangentialpunkt des letzten ist.

es ist also $i_1 x_1 x_2 x_3$ ein fünfgliedriger Cyklus der $E(i_1 x_1)$; seine Elemente können auf Grund der eben geführten Rechnung in der Form

$$i_1, \quad x_1, \quad \frac{i^9}{x_1^8}, \quad \frac{i_1^3}{x_1^2}, \quad \frac{x_1^3}{i_1^3}$$

dargestellt werden.

Wir projeciren nun x_1 aus i_2 auf C_3 und den sich ergebenden Punkt u aus i_3 , wodurch y_1 erhalten werden möge; dabei setzen wir voraus, dass $i_1 i_2 i_3$ in einer Geraden liegen. Zunächst ist

$$u = \frac{k}{i_2 x_1} = \frac{i_2^3}{i_2 x_1} = \frac{i_2^2}{i_1^3}$$

und dann

$$y_1 = \frac{k}{i_3 u} = \frac{i_3^2}{u} = \frac{i_3^2}{i_2^2} x_1 = \frac{i_2}{i_3} x_1;$$

da $y_1 = \frac{i_2^5}{i_3^5} x_1 = \frac{(i_1 i_2)^5}{i_3^5} = \frac{i_3^{10}}{i_3^5} = i_3^5$, so ist y_1 Eckpunkt eines zu i_3 gehörigen Vierecks, und zu demselben Wendepunkt gehört auch das von u aus construirte Viereck, weil

$$u^5 = \frac{(i_2^2)^5}{x_1^5} = \frac{(i_1 i_2)^5}{i_1^5} = i_3^5$$

ist. Wir erhalten also den Satz: »Die Projection eines zu i_1 gehörigen Vierecks aus i_1 ist wieder ein zu i_1 gehöriges Viereck (nämlich das ursprüngliche); die Projection desselben Vierecks aus i_2 ist ein zu i_3 gehöriges Viereck, wenn $i_1 i_2 i_3$ in einer Geraden liegen.«

Die Betrachtung des Wendepunktschemas

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_4 & i_5 & i_6 \\ i_7 & i_8 & i_9 \end{vmatrix}$$

ergibt nun, wenn man von diesem Satze Gebrauch macht, folgenden Sachverhalt: Ist x_1 ein zu i_1 gehöriger Eckpunkt, so ist seine Projection aus i_2 ein zu i_3 gehöriger Eckpunkt

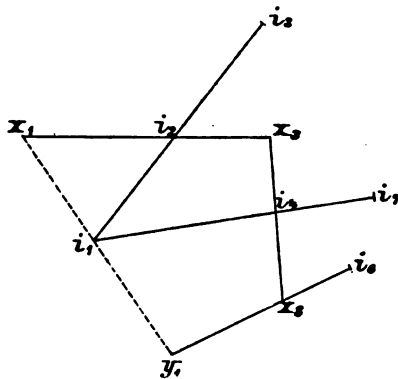


Fig. 5.

x_3 ; wird dieser aus i_4 projicirt, so ergibt sich ein zu i_8 gehöriger Eckpunkt x_8 , welcher aus i_8 projicirt wieder einen zu i_1 gehörigen Eckpunkt y_1 ergibt (siehe die schematische Figur 5).

Es ist die Frage von Interesse, in welcher Beziehung dieser letzte Punkt zum Ausgangspunkt x_1 steht. Man hat

$$x_3 = \frac{i_2^2}{x_1}; \quad x_8 = \frac{i_4^2}{x_3} = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} = \frac{i_2}{i_4} x_1;$$

$$y_1 = \frac{i_6^2}{x_8} = \frac{i_6^2 i_4}{i_2 x_1} = \frac{i_2 i_4 i_7}{i_2 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1};$$

es ist also y_1 die Gegenecke zu x_1 in dem ursprünglichen Vierecke.

C. Fünfecke.

53. Es sei x_1 ein Punkt, welcher der Gleichung

$$x^{33} = k^{11} \quad (1)$$

genügt; dann kann er zum Ausgangspunkte für die Construction eines der C_3 um- und eingeschriebenen Fünfecks genommen werden, und zwar sind die Ecken des letzteren

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{x_1^3}{k}, \quad x_4 = \frac{k^3}{x_1^8}, \quad x_5 = \frac{x_1^{16}}{k^5}. \quad (2)$$

Bezeichnet man die dritten Schnittpunkte der Diagonalen $x_1 x_3, x_2 x_4, x_3 x_5, x_4 x_1, x_5 x_2$ der Reihe nach mit $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$ (Fig. 6), so ist

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k}{x_1 x_3} = \frac{k^2}{x_1^5} \\ \xi_2 &= \frac{k}{x_2 x_4} = \frac{x_1^{10}}{k^3} \\ \xi_3 &= \frac{k}{x_3 x_5} = \frac{k^7}{x_1^{20}} \\ \xi_4 &= \frac{k}{x_4 x_1} = \frac{x_1^7}{k^2} \\ \xi_5 &= \frac{k}{x_5 x_2} = \frac{k^5}{x_1^{14}} \end{aligned} \quad (3)$$

oder wenn man unter Beachtung von (1) auf ξ_1 zurückführt

$$\xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{k}{\xi_1^2}, \quad \xi_3 = \frac{\xi_1^4}{k}, \quad \xi_4 = \frac{k^3}{\xi_1^8}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_1^{16}}{k^5}; \quad (3^*)$$

weil überdies $\xi_1^{33} = \frac{k^{88}}{x_1^{165}} = k^{11}$, so ist $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$, wieder ein der C_3 um- und eingeschriebenes Fünfeck.

Versucht man auf dieses den nämlichen Vorgang anzuwenden, so ergibt sich als erste Ecke

$$\xi'_1 = \frac{k^2}{\xi_1^5} = \frac{k^2}{\left(\frac{k^2}{x_1^5}\right)^5} = \frac{x_1^{25}}{k^8} = \frac{x_1^{33}}{k^8 x_1^8} = \frac{k^8}{x_1^8} = x_4,$$

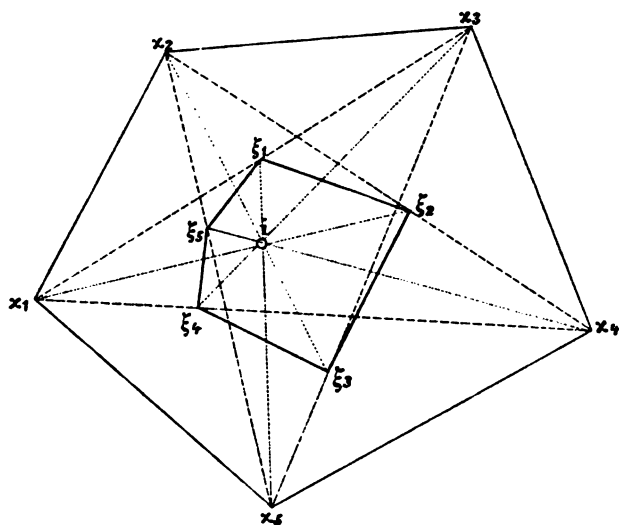


Fig. 6.

d. h. man kommt wieder auf das ursprüngliche Fünfeck zurück, so dass sich auf dem angedeuteten Wege nur ein zweites Fünfeck gewinnen lässt.

54. »Der durch die Ecken eines der C_3 um- und eingeschriebenen Fünfecks gelegte Kegelschnitt schneidet die Curve zum sechstenmale in einem Inflexionspunkte.«

Erster Beweis. Wenn die sechs Punkte x_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) der C_3 auf einer C_2 liegen, so liegen ihre Tangentialpunkte auch auf einer C_2 (siehe Artikel 22); diese beiden Kegelschnitte müssen

aber als durch die fünf Punkte $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ gehend identisch sein und C_3 weiter in einem Punkte schneiden, der sein eigener Tangentialpunkt, also ein Inflexionspunkt ist.

Zweiter Beweis. Auf Grund von (2) ist der sechste Schnittpunkt

$$x_6 = \frac{k^2}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = \frac{k^4}{x_1^{11}},$$

also ist

$$x_6^3 = \frac{k^{12}}{x_1^{33}}$$

und mit Rücksicht auf (1)

$$x_6^3 = k,$$

wodurch die Behauptung ebenfalls erwiesen ist.

Für das aus dem Fünfeck (x) abgeleitete Fünfeck (ξ) ist der sechste Schnittpunkt der ihm umschriebenen C_2

$$\xi_6 = \frac{k^4}{\xi_1^{11}} = \frac{k^4}{\left(\frac{k^2}{x_1^5}\right)^{11}} = \frac{x_1^{55}}{k^{18}} = \frac{x_1^{66}}{k^{18} x_1^{11}} = \frac{k^4}{x_1^{11}} = x_6;$$

es geht hienach der dem abgeleiteten Fünfeck umschriebene Kegelschnitt durch denselben Inflexionspunkt, welchen das ursprüngliche Fünfeck ergeben hat.

55. Aus dem Bisherigen ist der Schluss zu ziehen, dass die 216 Fünfecke in Gruppen von je 24 unter einander gepaarten Fünfecken auf die 9 Inflexionspunkte sich vertheilen werden, und es handelt sich darum, die 24 Fünfecke einer solchen Gruppe zu finden. Zunächst könnte der Versuch hiezu auf Grund der folgenden Sätze unternommen werden.

Satz I. »Wenn x_2 der Tangentialpunkt von x_1 und $y_2 y_1$ die Tangentialpunkte μ^{ter} Ordnung von $x_2 x_1$ sind, so ist auch y_2 der Tangentialpunkt von y_1 «.

Denn nach Annahme ist

$$x_1^2 x_2 = k \quad x_1^{3\mu-1} y_1 = k^\mu \quad x_2^{3\mu-1} y_2 = k^\mu,$$

quadriert man die zweite Gleichung und multiplicirt sie mit der dritten, so ergibt sich

$$(x_1^2 x_2)^{3\mu-1} y_1^2 y_2 = k^{3\mu}$$

und daraus wegen der ersten Gleichung thatsächlich

$$y_1^2 y_2 = k.$$

Allgemeiner noch ist

Satz II. »Wenn x_2 der Tangentialpunkt ν ter Ordnung von x_1 und $y_2 y_1$ respective die Tangentialpunkte μ ter Ordnung von $x_2 x_1$ sind, so ist auch y_2 der Tangentialpunkt ν ter Ordnung von y_1 «.

Laut Annahme ist nämlich

$$x_1^{3\nu-1} x_2 = k^\nu \quad x_1^{3\mu-1} y_1 = k^\mu \quad x_2^{3\mu-1} y_2 = k^\mu;$$

erhebt man die zweite Gleichung in die Potenz $3\nu-1$ und multiplicirt dann mit der dritten, so kommt

$$(x_1^{3\nu-1} x_2)^{3\mu-1} y_1^{3\nu-1} y_2 = k^{3\mu\nu}$$

und dies gibt vermöge der ersten Gleichung

$$y_1^{3\nu-1} y_2 = k^\nu, \text{ w. z. b. w.}$$

Aus dem ersten dieser Sätze folgt weiter:

Satz III. »Ist $x_1 x_2 \dots x_n$ ein der C_3 um- und eingeschriebenes n -Eck und sind $y_1 y_2 \dots y_n$ die Tangentialpunkte μ ter Ordnung seiner Ecken, so ist $y_1 y_2 \dots y_n$ auch ein um- und eingeschriebenes n -Eck«. Dazu muss jedoch bemerkt werden, dass sich dieses letztere, wenn p ein Theiler von n ist, auch auf ein p -Eck reduciren, beziehungsweise dass es in einen Inflexionspunkt übergehen kann. Das n -Eck $y_1 y_2 \dots y_n$ soll als » n -Eck der Tangentialpunkte μ ter Ordnung« bezeichnet werden.

Wir suchen nun die auf diesem Wege aus einem gegebenen n -Eck sich ergebenden abgeleiteten n -Ecke und führen diese Betrachtung für $n = 3$ und $n = 5$ durch.

Es sei also $x_1 x_2 x_3$ ein der C_3 um- und eingeschriebenes Dreieck, daher

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{x_1^3}{k} \text{ und } x_1^9 = k^3.$$

Für $\mu = 1$ ergibt sich selbstverständlich immer das nämliche Polygon; für $\mu = \mu$ ist

$$y_1 = \frac{k^\mu}{x_1^{3\mu-1}} = \frac{k^\mu x_1}{x_1^{3\mu}};$$

ist nun μ durch 3 theilbar, also $\mu = 3\nu$, so hat man

$$y_1 = \frac{k^{3\nu} x_1}{(x_1^3)^{3\nu}} = \frac{k^{3\nu} x_1}{k^{3\nu}} = x_1;$$

ist dagegen μ nicht theilbar durch 3, also $\mu = 3\nu \pm 1$, so ist

$$y_1 = \frac{k^{3\nu \pm 1} x_1}{x_1^{9\nu} x_1^{\pm 3}} = \frac{k^{3\nu \pm 1} x_1}{k^{3\nu} x_1^{\pm 3}} = k^{\pm 1} x_1^{1 \mp 3},$$

also entweder $y_1 = \frac{k}{x_1^2} = x_2$ oder $y_1 = \frac{x_1^4}{k} = x_3$. Aus einem Dreiecke kann daher in dieser Art ein neues Dreieck nicht abgeleitet werden.

An zweiter Stelle sei x_1 eine Ecke eines um- und eingeschriebenen Fünfecks und y_1 ihr Tangentialpunkt μ^{ter} Ordnung. Dann ist

$$x_1^{33} = k^{11} \text{ und } y_1 = \frac{k^\mu}{x_1^{3\mu-1}};$$

bringt man μ auf die Form $\mu = 11\nu + r$, so wird

$$y_1 = \frac{k^{11\nu+3}}{x_1^{33\nu+3r-1}} = \frac{k^{11\nu+r}}{k^{11\nu} x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}},$$

worin der Reihe nach $r = 0, 1, 2, \dots, 10$ zu setzen ist. Man erhält

$$\text{für } r = 0 \dots y_1 = x_1$$

$$» \quad = 1 \quad = \frac{k}{x_1^2} = x_2$$

$$» \quad = 3 \quad = \frac{k^3}{x_1^8} = x_4$$

$$» \quad = 6 \quad = \frac{k^6}{x_1^{17}} = \frac{k^6 x_1^{16}}{x_1^{33}} = \frac{x_1^{16}}{k^5} = x_5$$

$$» \quad = 10 \quad = \frac{k^{10}}{x_1^{29}} = \frac{k^{10} x_1^4}{x_1^{33}} = \frac{x_1^4}{k} = x_3$$

$$» \quad r = 4 \dots y_1 = \frac{k^4}{x_1^{11}}, \text{ daher } y_1^3 = \frac{k^{12}}{x_1^{33}} = k;$$

$$\begin{aligned}
 \text{für } r = 2 \dots y_1 &= \frac{k^2}{x_1^5} = \xi_1 \\
 \text{» } = 5 &= \frac{k^5}{x_1^{14}} = \xi_5 \\
 \text{» } = 7 &= \frac{k^7}{x_1^{20}} = \xi_3 \\
 \text{» } = 8 &= \frac{k^8}{x_1^{23}} = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \xi_2 \\
 \text{» } = 9 &= \frac{k^9}{x_1^{26}} = \frac{x_1^7}{k^2} = \xi_4.
 \end{aligned}$$

Aus einem Fünfeck lässt sich also durch die Tangentialpunkte höherer Ordnungen nur ein zweites ableiten, und zwar ist es dasselbe, welches wir gleich eingangs aus den dritten Schnittpunkten der Diagonalen gebildet haben. Insbesondere entsteht aus dem Punkte x_1

für $r = 0, 1, 3, 6, 10$ respective $x_1 x_2 x_4 x_5 x_3$

» $r = 4$ der adjungirte Inflexionspunkt

» $r = 2, 5, 7, 8, 9$ respective $\xi_1 \xi_5 \xi_3 \xi_2 \xi_4$.

56. »Die beiden Fünfecke $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ und $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$ liegen perspectivisch in Bezug auf den Inflexionspunkt, mit welchem sie verknüpft sind.«

Dem Artikel 54 zufolge ist nämlich dieser Inflexionspunkt

$$i = \frac{k^4}{x_1^{11}}; \quad (4)$$

demnach ist, wenn wir die Projection von x_m aus i auf C_3 mit x'_m bezeichnen,

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= \frac{k}{ix_1} = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \xi_2 \\
 x'_2 &= \frac{k}{ix_2} = \frac{x_1^{13}}{k^4} = \frac{k^7}{x_1^{20}} = \xi_3 \\
 x'_3 &= \frac{k}{ix_3} = \frac{x_1^7}{k^2} = \xi_4
 \end{aligned}$$

$$x'_4 = \frac{k}{ix_4} = \frac{x_1^{10}}{k^6} = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \xi_5$$

$$x'_5 = \frac{k}{ix_5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \xi_1.$$

Dadurch ist die perspektivische Lage erwiesen, und zwar gehen durch i die Geraden $x_1\xi_2, x_2\xi_3, x_3\xi_4, x_4\xi_5, x_5\xi_1$.

Mit Hilfe der Gleichung (4) und der aus ihr resultierenden

$$i^{11} = \frac{k^{44}}{x_1^{121}} = \frac{x_1^{132}}{x_1^{121}} = x_1^{11} \quad (= x_2^{11} = \dots = x_5^{11}) \quad (5)$$

lassen sich sämtliche Punkte x und ξ durch i und x_1 darstellen; man erhält, von den Gleichungen (2) und (3) Gebrauch machend:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 & \xi_1 &= \frac{k^2}{x_1^5} = \frac{k^4}{k^2 x_1^5} = \frac{i x_1^{11}}{i^6 x_1^5} = \frac{i^6}{x_1^5} \\ x_2 &= \frac{k}{x_1^2} = \frac{k^4}{k^3 x_1^2} = \frac{i x_1^{11}}{i^9 x_1^2} = \frac{i^3}{x_1^2} & \xi_2 &= \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{k x_1^{10}}{k^4} = \frac{k x_1^{10}}{i x_1^{11}} = \frac{i^2}{x_1} \\ x_3 &= \frac{x_1^4}{k} = \frac{k^3 x_1^4}{k^4} = \frac{i^9 x_1^4}{i x_1^{11}} = \frac{x_1^4}{i^3} & \xi_3 &= \frac{k^7}{x_1^{20}} = \frac{k^3 i x_1^{11}}{x_1^{20}} = \frac{i^{11} x_1^{11}}{i x_1^{20}} = \frac{x_1^2}{i} \\ x_4 &= \frac{k^3}{x_1^8} = \frac{k^4}{k x_1^8} = \frac{i x_1^{11}}{i^3 x_1^8} = \frac{x_1^3}{i^2} & \xi_4 &= \frac{x_1^7}{k^2} = \frac{k^2 x_1^7}{i x_1^{11}} = \frac{i^5}{x_1^4} \\ x_5 &= \frac{x_1^{16}}{k^5} = \frac{x_1^{16}}{k i x_1^{11}} = \frac{x_1^5}{i^4} & \xi_5 &= \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{k i x_1^{11}}{x_1^{14}} = \frac{i^4}{x_1^3} \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Darstellung erkennt man nun leicht, dass die elf Punkte i, x und ξ einen elfgliedrigen Cyklus in der E -Beziehung $E(ix_1)$ bilden; in der That ist in $E(ix_1)$ die Reihenfolge der Punkte, in welcher jeder folgende dem vorangehenden entspricht, die nachstehende:

$$\begin{array}{cccccccccccc} i & x_1 & \frac{x_1^2}{i} & \frac{x_1^3}{i^2} & \frac{x_1^4}{i^3} & \frac{x_1^5}{i^4} & \frac{i^6}{x_1^5} & \frac{i^5}{x_1^4} & \frac{i^4}{x_1^3} & \frac{i^3}{x_1^2} & \frac{i^2}{x_1} & (i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ i & x_1 & \xi_3 & x_4 & x_3 & x_5 & \xi_1 & \xi_4 & \xi_5 & x_2 & \xi_2 & (i \end{array}$$

Den 12 existirenden E_{11} entsprechen, von i ausgehend, 12 solche Gruppen, von denen jede i und zwei in Bezug auf

dieses perspectivische Fünfecke enthält, so dass man thatsächlich zu den $2 \cdot 12 = 24$ mit i verknüpften Fünfecken gelangt.

D. Sechsecke.

57. Es sei x_1 ein Punkt, welcher der Gleichung

$$x^{63} = k^{21} \quad (1)$$

genügt; dann lässt sich von ihm aus ein der C_3 um- und eingeschriebenes Sechseck (oder Dreieck, weil die Gleichung (1) eine Folgerung der Gleichung $x^9 = k^3$ ist) construiren, dessen aufeinanderfolgende Ecken sind:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{x_1^4}{k}, \quad x_4 = \frac{k^3}{x_1^8}, \\ x_5 = \frac{x_1^{16}}{k^5}, \quad x_6 = \frac{k^{11}}{x_1^{32}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Bestimmt man die dritten Schnitte der Diagonalen $x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, x_4x_6, x_5x_1, x_6x_2$ mit C_3 , so ergibt sich ein neues um- und eingeschriebenes Sechseck (ξ), dessen Ecken sind:¹

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \frac{k}{x_1x_3} = \frac{k^2}{x_1^5}, \quad \xi_2 = \frac{x_1^{10}}{k^3}, \quad \xi_3 = \frac{k^7}{x_1^{20}}, \quad \xi_4 = \frac{x_1^{40}}{k^{18}}, \\ \xi_5 = \frac{k^6}{x_1^{17}}, \quad \xi_6 = \frac{x_1^{34}}{k^{11}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Verfährt man mit diesem Sechseck in derselben Weise, so kommt ein drittes, (ξ'), zu Stande, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 = \frac{k}{\xi_1\xi_3} = \frac{x_1^{25}}{k^8}, \quad \xi'_2 = \frac{x_1^{13}}{k^4}, \quad \xi'_3 = \frac{k^9}{x_1^{26}}, \\ \xi'_4 = \frac{k^4}{x_1^{11}}, \quad \xi'_5 = \frac{x_1^{22}}{k^7}, \quad \xi'_6 = \frac{x_1^{19}}{k^6}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wiederholt man denselben Vorgang auch mit diesem, so ergibt sich als erster Punkt

¹ Man überzeugt sich leicht, dass jeder folgende Punkt Tangentialpunkt des vorangehenden, der erste Tangentialpunkt des letzten ist.

$$\xi_1'' = \frac{k}{\xi_1 \xi_3'} = \frac{k^{21}}{x_1^{62}} = \frac{k^{21} x_1}{x_1^{63}} = x_1;$$

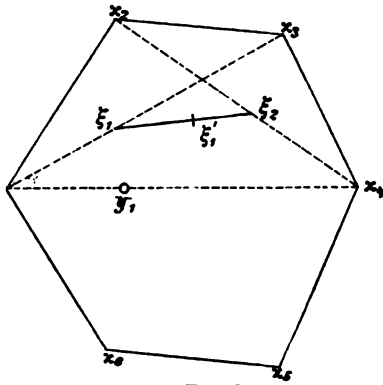


Fig. 7.

man kommt mithin wieder auf das ursprüngliche Sechseck zurück. Es lassen sich also aus jedem Sechseck noch zwei andere ableiten, so dass sich die der C_3 um- und eingeschriebenen Sechsecke zu dreien gruppieren (siehe Fig. 7).

Die dritten Schnittpunkte der Diagonalen x_1x_4 , x_2x_5 , x_3x_6 seien der Reihe nach y_1 , y_2 , y_3 ; dann ist

$$y_1 = \frac{k}{x_1 x_4} = \frac{x_1^7}{k^2}, \quad y_2 = \frac{k}{x_2 x_5} = \frac{k^5}{x_1^{13}}, \quad y_3 = \frac{k}{x_3 x_6} = \frac{x_1^{28}}{k^9};$$

man überzeugt sich aber durch leichte Rechnung, bei welcher auf die Gleichung (1) Rücksicht zu nehmen ist, dass

$$y_1^2 y_2 = k, \quad y_2^2 y_3 = k, \quad y_3^2 y_1 = k;$$

mithin liegen die drei Punkte $y_1 y_2 y_3$ derart, dass sie die Ecken eines der C_3 um- und eingeschriebenen Dreiecks bilden.

Die analogen Punkte für das Sechseck (ξ) sind

$$\eta_1 = \frac{\xi_1^7}{k^2} = \frac{k^{12}}{x_1^{35}} = \frac{k^{12} x_1^{28}}{x_1^{63}} = \frac{x_1^{28}}{k^9} = y_3, \quad \eta_2 = y_2, \quad \eta_3 = y_1;$$

und für das Sechseck (ξ')

$$\eta_1' = \frac{\xi_1'^{17}}{k^2} = \frac{k^5}{x_1^{19}} = y_2, \quad \eta_2' = y_3, \quad \eta_3' = y_1.$$

»Es gehören also die drei Sechsecke eines Tripels (x) (ξ) (ξ') zu einem und demselben der C_3 um- und eingeschriebenen Dreiecke.«

58. Der Tangentialpunkt μ ter Ordnung von x_1 heisse z_1 , und es werde μ auf die Form $\mu = 21\nu + r$ gebracht; dann ist wegen (1)

$$z_1 = \frac{k^\mu}{x_1^{3\mu-1}} = \frac{k^{21\nu+r}}{x_1^{63\nu} x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}},$$

worin der Reihe nach $r = 0, 1, 2, \dots, 20$ zu setzen ist. Diese Substitutionen führen zu dem folgenden Tableau:

$r =$	$z_1 =$	$r =$	$z_1 =$
0 ...	x_1	11 ...	x_6
1 ...	x_2	12 ...	y_3
2 ...	ξ_1	13 ...	ξ'_1
3 ...	x_3	14 ...	ξ'_5
4 ...	ξ'_3	15 ...	ξ'_8
5 ...	y_2	16 ...	x_5
6 ...	ξ_5	17 ...	ξ'_2
7 ...	ξ_3	18 ...	ξ_2
8 ...	ξ_4	19 ...	y_1
9 ...	ξ'_3	20 ...	x_3
10 ...	ξ_6		

Es ist also

- für $r = 0, 1, 3, 11, 16, 20 \dots z_1 \equiv x_1 x_2 x_4 x_6 x_5 x_3$
 » $r = 2, 6, 7, 8, 10, 18 \dots z_1 \equiv \xi_1 \xi_5 \xi_3 \xi_4 \xi_6 \xi_2$
 » $r = 4, 9, 13, 14, 15, 17 \dots z_1 \equiv \xi'_4 \xi'_5 \xi'_1 \xi'_6 \xi'_3 \xi'_2$
 » $r = 5, 12, 19 \dots z_1 \equiv y_2 y_3 y_1.$

Man erhält demnach durch Benützung der Tangentialpunkte beliebig hoher Ordnung immer nur dieselben drei Sechsecke und das mit ihnen verknüpfte Dreieck.

59. Ausser den Sechsecken der eben betrachteten Art, welche mit Dreiecken associirt sind, gibt es noch Sechsecke einer zweiten Art, welche zu Inflexionspunkten gehören. Es sind dies solche, deren Ecken nicht allein der Gleichung (1), sondern auch der engeren

$$x^{21} = x^7 \quad (5)$$

genügen, von welcher (1) eine Folgerung ist. Findet nämlich diese Gleichung statt, so ist

$$y_1 = \frac{x_1^7}{k^2}, \quad y_2 = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{k^5 x_1^7}{x_1^{21}} = \frac{x_1^7}{k^2}, \quad y_3 = \frac{x_1^{28}}{k^9} = \frac{x_1^7}{k^2},$$

also

$$y_1 = y_2 = y_3 = \frac{x_1^7}{k^2} = y$$

und

$$y^3 = \frac{x_1^{21}}{k^6} = k,$$

d. h. das Dreieck $y_1 y_2 y_3$ reducirt sich in diesem Falle auf einen Inflexionspunkt i . Aber auch die drei oben gefundenen Sechsecke (x) , (ξ) , (ξ') fallen in eines zusammen, da

$$\xi_1 = \frac{k^2}{x_1^5} = \frac{k^2 x_1^{16}}{x_1^{21}} = \frac{x_1^{16}}{k^5} = x_5$$

$$\xi'_1 = \frac{x_1^{25}}{k^8} = \frac{k^7 x_1^4}{k^8} = \frac{x_1^4}{k} = x_3,$$

und dieses eine Sechseck ist in Beziehung auf den Punkt i perspectivisch; denn man hat

$$x_1 i x_4 = x_1 \cdot \frac{x_1^7}{k^2} \cdot \frac{k^3}{x_1^8} = k$$

$$x_2 i x_5 = \frac{k}{x_1^2} \cdot \frac{x_1^7}{k^2} \cdot \frac{x_1^{16}}{k^5} = k$$

$$x_3 i x_6 = \frac{x_1^4}{k} \cdot \frac{x_1^7}{k^2} \cdot \frac{k^{11}}{x_1^{32}} = k.$$

Die zu einem Inflexionspunkt i gehörigen Sechsecke ergeben sich durch Vervollständigung des siebenelementigen Cyklus in der $E(i x_1)$:

$$i, \quad x_1, \quad \frac{x_1^2}{i} = x_5, \quad \frac{x_1^3}{i^2} = x_6, \quad \frac{x_1^4}{i^3} = x_3, \quad \frac{x_1^5}{i^4} = x_2, \quad \frac{x_1^6}{i^5} = x_4;$$

solcher siebengliedrigen Cyklen ergeben sich $7+1=8$, so dass jeder Inflexionspunkt zu acht Sechsecken der zweiten Art Veranlassung gibt.

VI. Einer Raumcurve R_4 vierter Ordnung erster Species gleichzeitig um- und eingeschriebene Polygone.

60. In der Reihe der Punkte $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ auf einer R_4 sei jeder Punkt der Schnittpunkt der Schmiegungebene des vorangehenden Punktes. Wird die Involution J_3^4 der ebenen Quadrupel durch die Gleichung $xx'x''x''' = k$ charakterisirt, so bestehen zwischen obigen Punkten die Relationen

$$\begin{aligned} x_1^3 x_2 &= k \\ x_2^3 x_3 &= k \\ &\dots \\ x_n^3 x_{n+1} &= k. \end{aligned}$$

Erhebt man diese Gleichungen der Reihe nach zu den Potenzen $3^{n-1}, 3^{n-2}, \dots, 3^0$, so wird

<p>für gerade n:</p> $\begin{aligned} x_1^{3^n} x_2^{3^{n-1}} &= k^{3^{n-1}} \\ k^{3^{n-2}} &= x_2^{3^{n-1}} x_3^{3^{n-2}} \\ &\dots \\ x_{n-1}^3 x_n^3 &= k^3 \\ k &= x_n^3 x_{n+1} \end{aligned}$	<p>für ungerade n:</p> $\begin{aligned} x_1^{3^n} x_2^{3^{n-1}} &= k^{3^{n-1}} \\ k^{3^{n-2}} &= x_2^{3^{n-1}} x_3^{3^{n-2}} \\ &\dots \\ k^3 &= x_{n-1}^3 x_n^3 \\ x_n^3 x_{n+1} &= k; \end{aligned}$
--	---

durch Multiplication dieser Gleichungssysteme erhält man

für gerade n : $x_1^{3^n} k^{3^{n-2}+3^{n-4}+\dots+3^0} = x_{n+1} k^{3^{n-1}+3^{n-3}+\dots+3^1}$

für ungerade n : $x_1^{3^n} x_{n+1} k^{3^{n-2}+3^{n-4}+\dots+3^1} = k^{3^{n-1}+3^{n-3}+\dots+3^0}$

und nach Summirung der geometrischen Progressionen

für gerade n : $x_1^{3^n} = x_{n+1} k^{\frac{3^n-1}{4}}$

für ungerade n : $x_{n+1} x_1^{3^n} = k^{\frac{3^{n+1}-1}{4}};$

beide Gleichungen lassen sich in die eine zusammenfassen:

$$x_1^{3^n} = (x_{n+1})^{(-1)^n} k^{\frac{3^n - (-1)^n}{4}}. \quad (1)$$

Sollen die Punkte ein geschlossenes Polygon, ein n -Eck bilden, so muss der letzte mit dem ersten zusammenfallen, also $x_{n+1} \equiv x_1$ sein; demnach hat ein Punkt auf R_1 , von welchem ausgehend sich derselben ein n -Eck um- und eingeschreiben lässt, der Gleichung

$$x^{3^n - (-1)^n} = k^{\frac{3^n - (-1)^n}{4}} \quad (2)$$

zu genügen.

Hiernach lauten die charakteristischen Gleichungen für Zwei-, Drei-, ... Siebenecke... wie folgt:

$$\begin{aligned} n = 2 & \quad x^8 = k^2 \\ & = 3 \quad x^{28} = k^7 \\ & = 4 \quad x^{80} = k^{20} \\ & = 5 \quad x^{244} = k^{61} \\ & = 6 \quad x^{728} = k^{182} \\ & = 7 \quad x^{2188} = k^{547} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Da sich unter den $[3^n - (-1)^n]^2$ Lösungen der Gleichung (2) (siehe Artikel 41) auch die 16 Wendeberührungspunkte als Wurzeln der Gleichung $x^4 = k$ befinden, so bleiben nach Ausscheidung dieser, da sie als Ecken nicht auftreten können, noch

$$N_n = [3^n - (-1)^n]^2 - 16$$

Punkte übrig; daher ist die Anzahl der einer R_1 um- und eingeschriebenen n -Ecke, sofern n eine Primzahl bedeutet,

$$\xi_n = \frac{[3^n - (-1)^n]^2 - 16}{n}; \quad (3)$$

hat dagegen n die von einander verschiedenen Theiler t_1, t_2, \dots (mit Einschluss von 2), so gilt die Formel

$$\zeta_n = \frac{[3^n - (-1)^n]^2 - 16 - \sum t_i \zeta_{t_i}}{n} \quad (4)$$

Für die oben angeführten speciellen Werthe von n gibt diese Formel:

Eckenzahl	Anzahl der Polygone
2	$24 = \frac{8^2 - 16}{2}$
3	$256 = \frac{28^2 - 16}{3}$
4	$1584 = \frac{80^2 - 16 - 2 \cdot 24}{4}$
5	$11904 = \frac{244^2 - 16}{5}$
6	$88192 = \frac{728^2 - 16 - 2 \cdot 24 - 3 \cdot 256}{6}$
7	$683904 = \frac{2188^2 - 16}{7}, \text{ u. s. w.}$

VII. Die Küpper'schen Sätze über die Steiner'schen Polygone.¹

61. Auf C_3 sei eine Reihe fester Fundamentalpunkte $abcde \dots$ gegeben; man ziehe von dem beliebigen Punkte 0 der C_3 ausgehend nach einander die Geraden $0a1, 1b2, 2c3, 3d4, \dots$ derart, dass die Punkte $1, 2, 3, 4, \dots, \nu, \dots, \nu + \delta, \dots$ ebenso wie 0 auf C_3 liegen. [δ möge als Abstand des Punktes $\nu + \delta$ von dem Punkte ν bezeichnet werden; hiernach hat der Punkt $\nu - \delta$ von ν den Abstand $-\delta$; unter »Abstand der Punkte $2k$ und $2l + 1$ « soll immer der Abstand des unpaaren von dem paaren, also die Differenz $2l + 1 - 2k = 2(l - k) + 1$ verstanden sein.]

Auf Grund des Entstehungsgesetzes obiger Punktreihe gelten die Gleichungen

$$0a1 = 1b2 = 2c3 = 3d4 = \dots = k.$$

Wir betrachten nun die Punkte ν und $\nu + \delta$ (wobei δ eine ungerade Zahl sein soll) und nennen die zwischenliegenden Fundamentalpunkte $a_1 a_2 \dots a_z$; dann ist

$$\begin{aligned} \nu a_1(\nu + 1) &= (\nu + 1) a_2(\nu + 2) = (\nu + 2) a_3(\nu + 3) = \dots = \\ &= (\nu + \delta - 1) a_z(\nu + \delta) = k; \end{aligned}$$

¹ Mathem. Annalen, Bd. XXIV.

daraus folgt

$$\begin{aligned} v(v+1) &= \frac{k}{a_1} \\ \frac{k}{a_2} &= (v+1)(v+2) \\ (v+2)(v+3) &= \frac{k}{a_3} \\ &\dots\dots\dots \\ (v+\delta-1)(v+\delta) &= \frac{k}{a_\delta} \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit einander, so ergibt sich

$$v(v+\delta) = \frac{a_2 a_4 \dots a_{\delta-1}}{a_1 a_3 \dots a_\delta} k;$$

bezeichnet man den dritten Schnittpunkt der Geraden $\overline{v(v+\delta)}$ mit C_3 durch f , so ist

$$f = \frac{k}{v(v+\delta)} = \frac{a_1 a_3 \dots a_\delta}{a_2 a_4 \dots a_{\delta-1}};$$

d. h. »die Gerade, welche einen bestimmten Punkt v mit dem um eine bestimmte ungerade Zahl $+\delta$ von ihm entfernten Punkte verbindet, trifft die C_3 in einem festen Punkte, dessen Lage nämlich von der Wahl des Ausgangspunktes 0 , also von der Punktreihe, in der man sich gerade befindet, unabhängig ist.«

62. Es seien nur zwei von einander verschiedene Fundamentalepunkte a, b gegeben, welche abwechselnd der obigen Vorschrift gemäss benutzt werden, so dass die Reihe $abcd\dots$ übergeht in $abab\dots$. Man hat dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0a1 &= 1b2 = 2a3 = 3b4 = \dots \\ &= 2va(2v+1) = \dots = (2\mu-1)b.2\mu = \dots = k, \end{aligned}$$

aus welchen sich ergibt

$$\begin{array}{ll}
 1 = \frac{k}{a0} & 2 = \frac{k}{b1} = \frac{a0}{b} \\
 3 = \frac{k}{a2} = \frac{kb}{a^2 0} & 4 = \frac{k}{b3} = \frac{a^2 0}{b^2} \\
 5 = \frac{k}{a4} = \frac{kb^2}{a^3 0} & 6 = \frac{k}{b5} = \frac{a^3 0}{b^3} \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

also in zusammenfassender Darstellung:

$$\begin{array}{ll}
 1 = \frac{k}{a0} & 2 = \frac{a}{b} 0. \\
 3 = \frac{b}{a} \frac{k}{a0} & 4 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 0 \\
 5 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{k}{a0} & 6 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 0 \\
 \dots & \dots \\
 2\nu+1 = \left(\frac{b}{a}\right)^\nu \frac{k}{a0} & 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^\nu 0.
 \end{array}$$

Auf Grund der allgemeinen Endformeln dieser zwei Reihen lässt sich nun der folgende Satz beweisen: »Die Gerade, welche zwei Punkte verbindet, deren Abstand eine bestimmte ungerade Zahl ist, geht durch einen festen, d. i. von der Lage des Ausgangspunktes 0 unabhängigen Punkt der C_3 «.

Die beiden Punkte mögen mit μ , μ' bezeichnet werden. Zunächst sei μ gerad, etwa $\mu = 2\nu$; dann ist $\mu' = 2\nu + \delta$ und daher

$$\begin{aligned}
 \mu &= 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^\nu 0 \\
 \mu' &= [2\nu + (\delta - 1)] + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu + \frac{\delta-1}{2}} \frac{k}{a0};
 \end{aligned}$$

somit hat man

$$\mu\mu' = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\delta-1}{2}} \frac{k}{a};$$

wird der dritte Schnittpunkt von $\mu\mu'$ mit C_3 durch f bezeichnet, so ist

$$f = \frac{k}{\mu\mu'} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\delta-1}{2}} a,$$

also f thatsächlich ein Punkt, dessen Lage nur von a , b und δ abhängt.

Ist hingegen μ ungerad $= 2\nu - \delta$, so ist $\mu' = 2\nu$, der Abstand beider Punkte $\mu - \mu' = -\delta$ negativ. Es ist dann

$$\mu = [2\nu - (\delta + 1)] + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu - \frac{\delta+1}{2}} \frac{k}{a^0}$$

$$\mu' = 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} 0,$$

folglich

$$\mu\mu' = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{\delta+1}{2}} \frac{k}{a}$$

und der dritte Schnittpunkt f' von $\overline{\mu\mu'}$ mit C_3

$$f' = \frac{k}{\mu\mu'} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{\delta+1}{2}} a$$

wieder ein fester Punkt. Die Gerade $\overline{ff'}$ schneide C_3 weiter in c , so ist

$$= \frac{k}{\overline{ff'}} = \frac{k}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} a^2} = \frac{k}{a b}.$$

Da dieser Punkt von δ nicht mehr abhängt — es ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie der Fundamentalepunkte — so gelangt man zu dem Satze:

»Die Punkte f , welche als Schnittpunkte der C_3 mit den Verbindungslinien von je einem paaren und unpaaren Punkte in allen denkbaren Reihen auftreten, liegen zu je zweien auf den Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel c auf C_3 liegt.«

Soll sich das Polygon schliessen, nachdem jeder Fundamentalpunkt n -mal durchlaufen wurde, so muss $2n \equiv 0$ werden, also

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n 0 = 0,$$

d. h. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1$ oder $a^n = b^n$ sein; sind also die Fundamentalpunkte a, b Hauptpunkte einer Involution J_{n-1}^n n ten Grades, so schliesst sich das Steiner'sche Polygon zu einem $2n$ -Eck, von welchem Punkte der C_3 man auch ausgehen mag.

Dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen

von

Dr. Eduard Suchanek.

Schreibt man die ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe nach Einführung symbolischer Exponenten als sogenannte dyadische Producte, so bilden die letzteren lauter Specialisirungen des Gleichungssystems:

$$D_1 = 1^{c_1}, \quad D_2 = 1^{c_1} 0^{c_2} 1^{c_3}, \dots$$

$$D_r = 1^{c_1} 0^{c_2} 1^{c_3} \dots 0^{c_{2r-2}} 1^{c_{2r-1}} \dots$$

und begründen daher eine Eintheilung aller ungeraden Zahlen in solche erster, zweiter, ... r ter Ordnung, welche — unter s_k allgemein die Summe:

$$c_k + c_{k+1} + c_{k+2} + \dots + c_{2r-1}$$

verstanden — bekanntlich auch durch die Ausdrücke:

$$D_1 = 2^{c_1} - 1, \quad D_2 = 2^{c_1+c_2+c_3} - 2^{c_2+c_3} + 2^{c_3} - 1, \dots$$

$$D_r = 2^{s_1} - 2^{s_2} + 2^{s_3} - \dots + 2^{s_{2r-1}} - 1, \dots$$

definirbar sind.¹ Hiebei bedeuten $c_1, c_2, \dots, c_{2r-1}$ nunmehr Potenzexponenten, deren jeweilige Summen direct die An-

¹ Man vergleiche hierüber Dr. O. Simony's Abhandlung: Über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung (Sitzb. der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, 96. Bd., II. Abth., S. 191—286), auf welche sich auch alle folgenden Citate beziehen. Dieselbe Arbeit enthält bereits die dyadische Coordination der bis $2^{14}=16384$ vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen.

zahlen: $A_1, A_2, \dots A_r$ der zur vollständigen dyadischen Aufschreibung der betreffenden Zahlen erster, zweiter, ... r^{ter} Ordnung nöthigen Ziffern bestimmen. — Die Fortsetzung der Transcription von 3, 5, 7 ... in $1^2, 101, 1^3, \dots$ bis zu irgend einer Potenz von 2, etwa 2^n , liefert dann im Ganzen $2^{n-1} - 1$ dyadische Producte und zwar in unmittelbarem Zusammenhange mit der binomischen Entwicklung von 2^{n-1} speciell $n-1$ Zahlen erster Ordnung, ferner:

$$\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} = \binom{n}{3}$$

Zahlen zweiter Ordnung und allgemein:

$$\binom{n-1}{2k-2} + \binom{n-1}{2k-1} = \binom{n}{2k-1}$$

Zahlen k^{ter} Ordnung, so dass für gerade Werthe von n im Ganzen noch n Zahlen die höchste überhaupt vorkommende Ordnungszahl $\frac{1}{2}n$ besitzen, während für ungerade Werthe von n noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Zahlen die Ordnungszahl $\frac{1}{2}(n-1)$ aufweisen und nur einer einzigen Zahl, nämlich:

$$2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 1 = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$$

die höchste überhaupt vertretene Ordnungszahl $\frac{1}{2}(n+1)$ zukommt.

Die charakteristischen Exponenten: c_1, c_2, c_3, \dots der verschiedenen ungeraden Zahlen vermitteln ihrerseits eigenthümliche Kriterien für deren Theilbarkeit durch 3, sobald man aus c_1, c_2, c_3, \dots nach dem Schema:

$$I = \frac{1}{c_1 + 1 + \frac{1}{c_2 + 1 + \frac{1}{c_3 + \dots}}}$$

in inf.

Kettenbrüche bildet und dieselben in gemeine Brüche verwandelt, welche augenscheinlich insgesamt der Reihe der

aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche von $I: \frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \dots, \frac{Z_p}{N_p} \dots$ angehören. Es besitzen nämlich die auf solche Art abgeleiteten gemeinen Brüche gerade oder ungerade Nenner: N_p , je nachdem die erzeugenden Zahlen durch 3 theilbar sind oder nicht, in welch' letzterem Falle N_{p-1} für Zahlen von der Form $6l-1$ gerade, hingegen für jene von der Gestalt $6l+1$ ungerade ist.¹

Andererseits treten die den Nennern: N_{p-1}, N_p zugehörigen Zähler: Z_{p-1}, Z_p in eine bisher unbekannt gebliebene Beziehung zur jeweiligen Anzahl: A der dyadischen Ziffern der erzeugenden Zahl, welcher Zusammenhang sich zunächst für beliebige Zahlen zweiter Ordnung leicht mathematisch präcisiren lässt. — Indem wir hiebei gerade und ungerade Specialisirungen von $c_1, c_2, c_3, A_2; Z_2, Z_3; N_2, N_3$ durch Zuordnung der Buchstaben: g und u von einander sondern, ergibt sich auf Grundlage der Gleichungen:

$$\begin{aligned} Z_2 &= c_2, & N_2 &= c_1 c_2 + 1; \\ Z_3 &= c_2 c_3 + 1, & N_3 &= c_1 c_2 c_3 + c_1 + c_3 \end{aligned}$$

das alle möglichen Fälle umfassende Schema:

c_1	c_2	c_3	A_2	Z_2	Z_3	N_2	N_3	D_2
g	g	g	g	g	u	u	g	$3l$
u	g	u	u	g	u	u	u	$6l+1$
u	u	g	u	u	u	u	g	$3l$
u	u	u	g	u	g	u	u	$6l+1$
u	g	g	u	g	u	u	u	$6l+1$
u	g	u	g	g	u	u	g	$3l$
u	u	g	g	u	u	g	u	$6l-1$
u	u	u	u	u	g	g	u	$6l-1$

Hieraus entspringen folgende Wahrscheinlichkeitsschlüsse:

(I) Für jede durch 3 theilbare Zahl bleibt der Zähler: Z_p des ihren dyadischen Exponenten coordinirten Bruches ungerade, während dessen letzter Näherungsbruch einen geraden oder ungeraden Zähler: Z_{p-1} besitzt, je nachdem die dyadische Stellenzahl: A gerade oder ungerade ist.

¹ Vergl. Simony a. a. O. S. 227—230.

(II) Für jede Zahl von der Form $6l-1$ ist Z_p eine ungerade oder gerade Zahl, je nachdem A gerade oder ungerade ist, während Z_{p-1} ungerade bleibt.

(III) Für jede Zahl von der Form $6l+1$ ist Z_p zugleich mit A gerade oder ungerade, während Z_{p-1} ungerade oder gerade wird, je nachdem A eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt.

Da 2^s-1 stets durch 3 theilbar ist, mithin

$$2^n-1 = 2(2^{n-1}-1) + 1$$

ausnahmslos die Form $6l+1$ besitzt, und dem zu D_1 gehörigen Bruche; $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{c_1}$ im Einklange mit den Sätzen (I) und (III) die beiden fictiven Gleichungen: $Z_0 = 0$, $N_0 = 1$ coordinirt werden können, gelten die Schlüsse (I), (II), (III) offenbar auch für alle Zahlen dritter und höherer Ordnungen, sobald unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit für Zahlen r ter Ordnung: D_r dieselben Schlüsse für Zahlen $(r+1)$ ter Ordnung: D_{r+1} resultiren. — Dass das Letztere in der That der Fall ist, lässt sich leicht zeigen, wenn wir hiebei die für alle Näherungsbrüche von I giltige Relation:

$$Z_{2r-1}N_{2r-2} - Z_{2r-2}N_{2r-1} = 1$$

berücksichtigen. Vermöge dieser Beziehung kommen nämlich für Z_{2r-2} , Z_{2r-1} ; N_{2r-2} , N_{2r-1} überhaupt nur sechs Zahlencombinationen:

$$\begin{array}{lll} g, u, u, g; & u, u, u, g; & u, u, g, u; \\ u, g, g, u; & u, g, u, u; & g, u, u, u \end{array}$$

in Betracht, welche den Zahlencharakter von A_r und D_r , sowie jenen von Z_{2r} , Z_{2r+1} ; N_{2r} , N_{2r+1} ; A_{r+1} und D_{r+1} unter Verwerthung der bekannten Formeln:

$$Z_p = c_p Z_{p-1} + Z_{p-2}, \quad N_p = c_p N_{p-1} + N_{p-2}$$

für jede der vier möglichen Zahlencombinationen von c_{2r} , c_{2r+1} eindeutig feststellen lassen. Die diesbezüglichen Ergebnisse gestatten die nachstehende Gruppierung, welche die allgemeine Übertragbarkeit der Schlüsse (I), (II), (III) von D_r auf D_{r+1} klar ersichtlich macht:¹

¹ Wie in der Rubrik von D_r ist auch in jener von D_{r+1} jede der drei Zahlenformen: $3l$, $6l-1$ und $6l+1$ achtmal vertreten.

Z_{2r-2}	Z_{2r-1}	N_{2r-2}	N_{2r-1}	A_r	D_r	c_r	c_{2r+1}	Z_{2r}	Z_{2r+1}	N_{2r}	N_{2r+1}	A_{r+1}	D_{r+1}
g	u	u	g	g	$3l$	g	g	g	u	u	g	g	$3l$
u	u	u	u	u	u	g	u	u	u	u	g	u	$6l+1$
u	u	u	u	u	u	u	g	u	g	u	u	u	$3l$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	g	u	u	g	$6l+1$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$3l$
u	u	u	u	u	$6l-1$	g	g	u	u	g	u	g	$6l-1$
u	u	u	u	u	u	u	g	u	g	u	u	u	$6l-1$
u	u	u	u	u	u	u	u	g	u	u	u	u	$6l+1$
u	g	g	u	u	$6l-1$	g	g	u	g	g	u	g	$3l$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$6l-1$
u	g	u	u	g	$6l+1$	g	g	u	g	u	g	g	$6l+1$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$3l$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	g	u	u	g	$6l+1$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$3l$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$6l-1$
g	u	u	u	u	$6l+1$	g	g	u	g	g	u	g	$6l+1$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$3l$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$6l-1$
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	$6l-1$

Die hier entwickelten Eigenschaften von $N_p, N_{p-1}, Z_p, Z_{p-1}$ bilden zugleich einfache qualitative Kriterien für die Richtigkeit der Rechnung, falls man zu irgend welchen ungeraden Zahlen die coordinirten Brüche aufsucht, deren Nennern: N_p , dann auch umgekehrt die erzeugenden Zahlen durch die Zähler: Z_p zugeordnet werden können.

Eine derartige Zuordnung, welche sich nach ihrem Ursprunge naturgemäss als dyadische bezeichnen lässt, ist hier auf alle bis 100.000 vorkommenden Primzahlen (Z) von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ ausgedehnt worden, wobei auch gewisse topologisch-arithmetische Inductionsschlüsse in weiterem Umfange als bisher eine empirische Bestätigung gefunden haben.

Dieselben betreffen jene stabilen Knotengruppen, welche nach wiederholter Durchschneidung ringförmig geschlossener, von einer einzigen Randcurve begrenzter Streifen längs deren Mittellinien als integrirende Bestandtheile secundärer transformirter Knotenverschlingungen auftreten und sich hinsichtlich ihrer Anordnung — unter U, V die Typensymbole zweier nur durch ihre Windungszahlen verschiedener einfacher Knoten, unter $a_1, a_2 \dots a_{2n-1}$ lauter positive ganze, der Einheit mindestens gleiche Zahlen verstanden — stets durch Ausdrücke von der Form:

$$P = V^{a_1} U^{a_2} V^{a_3} \dots U^{a_{2n-2}} V^{a_{2n-1}}$$

charakterisiren lassen.¹ Falls nämlich schon der ursprünglich gegebene Streifen speciell mit einer solchen Knotenverbindung versehen war, wie sie in einem unverdrehten, biegsamen Ringe durch einen nach u -Umläufen und t -Drehungen um je 360° längs dessen Mittellinie in sich selbst zurücklaufenden Schnitt erzeugt werden kann, bleiben die Anzahl und Anordnung der die Gruppe P constituirenden Knoten bei allen möglichen Drehungszahlen unverändert und bestimmen durch Vermittlung des der Gruppe P zugeordneten dyadischen Productes:

$$D_n = 1^{a_1} 0^{a_2} 1^{a_3} \dots 0^{a_{2n-2}} 1^{a_{2n-1}}$$

erfahrungsgemäss eine Primzahl von der Form $6l-1$ oder $6l+1$.

¹ Vergl. Simony a. a. O. S. 200—206, 213 und 225.

je nachdem die primäre Umlaufszahl: u ungerade oder gerade ist. Da anderseits die Verwandlung des aus der Exponentenreihe von D_u gebildeten Kettenbruches:

$$K = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{2n-1}}}}}$$

in einen gemeinen Bruch als Nenner des letzteren im ersten Falle direct die Zahl u , im zweiten $u-1$ liefert, erscheinen jene beiden Primzahlen einer und derselben ungeraden Zahl (N) zugleich dyadisch coordinirt. Ausserdem werden aber der letzteren durch die Reihe der relativen Primzahlen zu N als Zähler durchgängig noch weitere Primzahlen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ dyadisch zugeordnet, an welche Thatsache sich unmittelbar die Frage knüpft, ob jene mittelbar durch topologische Experimente gewonnenen Primzahlen vielleicht auch in arithmetischer Hinsicht spezifische Merkmale besitzen?

Die vorliegende Arbeit liefert für alle bisher bekannt gewordenen stabilen Knotengruppen — 705 an der Zahl — die empirische Bestätigung, dass die denselben entsprechenden Primzahlen die kleinsten sind, welche sich den betreffenden Specialisirungen von N dyadisch coordiniren lassen.

Hieraus entspringt die Folgerung, dass umgekehrt jede Primzahl von der zuletzt angegebenen Beschaffenheit eine stabile Knotengruppe charakterisirt, welche der Umlaufszahl N oder $N+1$ angehört, je nachdem jener Primzahl die Form $6l-1$ oder $6l+1$ zukommt. Es erscheint insoferne angemessen, derartige Primzahlen in der Folge durchwegs als topologische zu bezeichnen und in eine selbstständige aufsteigende Reihe zu bringen, aus welcher dann die Anzahlen: n_1, n_2, \dots, n_k aller überhaupt vorkommenden drei-, vier-, \dots ($k+2$)-gliedrigen stabilen Knotengruppen P durch Abzählen der bei dyadischer Schreibweise drei-, vier-, \dots ($k+2$)-gliedrigen topologischen Primzahlen zu gewinnen sind.

Auf solche Art ergibt sich das vorläufig bis n_{14} reichende Gleichungssystem:

$n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = 6$, $n_6 = 9$, $n_7 = 14$, $n_8 = 33$,
 $n_9 = 37$, $n_{10} = 64$, $n_{11} = 112$, $n_{12} = 145$, $n_{13} = 250$, $n_{14} = 421$,
 welches bis incl. n_{13} auch nach topologischen Untersuchungen
 der Wirklichkeit entspricht. Ebenso hat sich das bereits bei
 der topologischen Feststellung aller fünfzehngliedrigen stabilen
 Knotengruppen erhaltene Resultat, dass bis zur Umlaufszahl:
 $u = 2^{10}$ höchstens siebzehngliedrige stabile Knotengruppen
 auftreten, deren zugehörige Primzahlen nur für

$$\begin{aligned} u = 861, \quad P &= V^2 UVU^3 V^3 UVUV^3, \\ u = 951, \quad P &= V^2 U^3 VUVU^2 WU^3 V^2 \end{aligned}$$

gemäss den Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_3 &= 1^2 0 10^2 1^5 0 101^3 = 108503 \quad (Z_9 = 332) \\ D_3 &= 1^2 0^3 1010^2 10^4 1^2 = 100931 \quad (Z_9 = 418) \end{aligned}$$

über 100.000 liegen, nunmehr durch directe Bestimmung der
 den Primzahlen 16411 bis 99991 dyadisch coordinirten Zahlen
 als richtig herausgestellt.¹

Die Einbeziehung weiterer Primzahlen erschien um so
 weniger nothwendig, als gemäss den einleitenden Bemerkungen
 schon die Reihe der ungeraden Zahlen bis 1024 neun Zahlen
 erster Ordnung, ferner je 120 Zahlen zweiter und vierter Ordnung,
 252 Zahlen dritter und zehn Zahlen fünfter Ordnung, nämlich:

$$\begin{aligned} 341 &= 101010101, & 597 &= 10^2 1010101, & 661 &= 1010^2 10101, \\ 677 &= 101010^2 101, & 681 &= 10101010^2 1, & 683 &= 101010101^2, \\ 685 &= 1010101^2 01, & 693 &= 10101^2 0101, & 725 &= 101^2 010101, \\ & & 853 &= 1^2 01010101 \end{aligned}$$

umfasst, welch' letzteren sich nach den Resultaten der vor-
 liegenden Arbeit noch:

¹ Anlässlich zweier am 20. und 23. September 1887 in der mathematischen
 Section der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Wiesbaden
 abgehaltener topologischer Vorträge hat Dr. Simon, wie aus seinen dies-
 bezüglichlichen mir zur Einsicht überlassenen Rechnungen hervorgeht, die zu 861
 und 951 gehörigen topologischen Primzahlen, sowie jene von 2047, nämlich:

$$\begin{aligned} D_6 &= 10^2 1^3 0120^2 1010^2 1^2 = 161363 \quad (Z_{11} = 1421) \\ D_7 &= 1010^2 1010^4 10101^2 = 169003 \quad (Z_{13} = 1296) \end{aligned}$$

mittels der charakteristischen Exponenten aller dyadischen Coordinirten
 von 861, 951 und 2047 direct arithmetisch controlirt, wonach meinerseits
 weitere Proberechnungen überflüssig gewesen wären.

$1109 = 10^3 1010101$, $1173 = 10^2 10^2 10101$, $1189 = 10^2 1010^2 101$,
 $1193 = 10^2 101010^2 1$, $1205 = 10^2 101^2 0101$, $1237 = 10^2 1^2 010101$,
 $1317 = 1010^2 10^2 101$, $1321 = 1010^2 1010^2 1$, $1323 = 1010^2 10101^2$,
 $1325 = 1010^2 101^2 01$, $1333 = 1010^2 1^2 0101$, $1357 = 101010^2 1^2 01$,
 $1363 = 10101010^2 1^2$, $1367 = 101010101^3$, $1387 = 10101^2 0101^2$,
 $1397 = 10101^3 0101$, $1429 = 101^2 0^2 10101$, $1493 = 101^3 010101$,

sowie die einzige dyadisch elfzifferige Zahl sechster Ordnung:

$$\frac{1}{3}(2^{12} - 1) = 1365 = 10101010101$$

mit ausnahmslos unter 100.000 gelegenen topologischen Primzahlen anschliessen. Sollte mithin zwischen den dyadischen Exponenten ungerader Zahlen und jenen ihrer coordinirten topologischen Primzahlen irgend ein mathematisch präcisirbarer Zusammenhang bestehen, so dürften die betreffenden Formeln durch die hier mitgetheilten empirischen Resultate bereits ausreichend controlirt werden können.

Vermöge der vollen Übereinstimmung zweier umfangreicher Reihen specieller Ergebnisse, welche scheinbar völlig heterogenen Forschungszweigen, der Lehre von den Primzahlen und jener von den möglichen Verschlingungen ringförmig geschlossener, aus gegenseitig undurchdringlichen Elementen bestehenden Gebilde angehören, gewinnt consequent die topologische Gliederung der Primzahlen in zwei Hauptgruppen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ ein hervorragendes Interesse, welches auch eine selbstständige Zählung der Glieder beider Gruppen rechtfertigt.

Im Hinblick hierauf enthält die nachstehende Exponententabelle der von 2^{14} bis 100.000 vorkommenden Primzahlen, welche behufs völliger Sicherung aller numerischer Angaben einerseits von dem Verfasser anderseits auf dessen Kosten von einem langjährigen Calculator des k. k. österr. Gradmessungsbureaus, Herrn J. Strobl, separat berechnet worden ist, die jeweiligen Anzahlen: z' , z'' beider Zahlenformen bis zur nebenstehenden Zahl Z in gesonderter Numerirung, sowie schliesslich der neben jedem Bruchnenner: N angegebene Nenner: \bar{N} des letzten Näherungsbruches eine directe Controle der Form von Z ermöglicht.

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	940	16411	09, 202	31	83	—	951	16551	05, 4, 002	75	191	—	963	16921	04, 04, 2, 20	157	221
—	941	16417	08, 04	49	59	—	952	16557	05, 03, 00	129	163	—	964	16927	04, 04, 5	29	151
960	—	16421	08, 02, 000	68	107	974	—	16601	05, 03, 00000	156	251	987	—	16931	04, 03, 3, 2	110	249
961	—	16427	08, 00, 002	48	125	975	—	16673	05, 02, 04	128	155	988	—	16937	04, 03, 00, 020	214	295
962	—	16433	08, 2, 30	66	85	976	—	16691	05, 02, 2, 2, 2	114	275	989	—	16943	04, 03, 004	52	237
—	942	16447	08, 6	9	55	—	953	16693	05, 02, 2, 0000	181	295	—	965	16963	04, 02, 04, 2	109	241
963	—	16451	07, 04, 2	44	97	—	954	16699	05, 02, 3, 02	87	241	990	—	16979	04, 02, 00, 02, 2	166	395
—	943	16453	07, 03, 000	79	123	977	—	16703	05, 02, 6	20	127	—	966	16981	04, 02, 00, 00, 0000	269	435
—	944	16477	07, 00, 300	77	137	—	955	16729	05, 00, 00, 02, 20	205	291	—	967	16987	04, 02, 00, 02	143	389
964	—	16481	07, 2, 40	76	93	—	956	16741	05, 00, 02, 2, 0000	191	303	—	968	16993	04, 02, 2, 40	177	217
965	—	16487	07, 2, 2, 3	42	143	—	957	16747	05, 00, 02, 00, 02	125	329	—	969	17011	04, 02, 3, 2, 2	131	319
966	—	16493	07, 2, 02, 00	92	159	—	958	16759	05, 00, 03, 03	59	223	991	—	17021	04, 02, 5, 00	108	199
—	945	16519	06, 04, 3	39	125	978	—	16763	05, 00, 04, 02	72	203	992	—	17027	04, 00, 05, 2	96	209
967	—	16529	06, 02, 30	116	147	979	—	16787	05, 2, 2, 02, 2	122	289	—	970	17029	04, 00, 04, 000	175	271
968	—	16547	06, 00, 03, 2	84	191	980	—	16811	05, 2, 00, 00, 02	134	351	993	—	17033	04, 00, 03, 020	220	299
969	—	16553	06, 00, 00, 020	160	221	981	—	16823	05, 2, 02, 03	70	261	—	971	17041	04, 00, 02, 030	231	293
946	—	16561	06, 00, 02, 30	129	167	982	—	16829	05, 2, 04, 00	108	197	—	972	17047	04, 00, 02, 003	107	385
—	947	16567	06, 00, 02, 03	53	197	—	959	16831	05, 2, 06	19	127	—	973	17053	04, 00, 02, 3, 000	197	349
948	—	16573	06, 00, 04, 00	83	151	—	960	16843	05, 3, 2, 00, 02	107	277	—	974	17077	04, 00, 00, 02, 0000	275	449
—	949	16603	06, 2, 02, 02	81	221	983	—	16871	05, 4, 2, 3	56	193	994	—	17093	04, 00, 02, 3, 000	218	341
970	—	16607	06, 2, 05	22	125	—	961	16879	05, 4, 04	31	149	995	—	17099	04, 00, 02, 2, 00, 02	162	419
971	—	16619	06, 3, 00, 02	80	211	984	—	16883	05, 5, 2, 2	68	167	—	975	17107	04, 00, 02, 00, 2	173	413
972	—	16631	06, 4, 03	36	137	985	—	16889	05, 6, 20	80	117	996	—	17117	04, 00, 02, 3, 000	184	329
950	—	16633	06, 5, 20	79	115	986	—	16901	04, 06, 000	88	135	997	—	17123	04, 00, 3, 2	128	295
973	—	16649	05, 04, 020	116	157	—	962	16903	04, 06, 3	41	129	—	976	17137	04, 00, 4, 30	161	211

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1065	1060	18583	220322223	125 447	1081	—	18911	18911	2202, 305	48 277	83 397
1066	—	18587	2203222, 202	178 481	—	1069	18913	18913	2202, 4, 40	203 251	97 309
1067	—	18593	22032224	246 290	1082	—	18917	18917	2202, 4, 2000	203 417	176 449
—	1061	18617	2203222, 20	276 397	—	1070	18919	18919	2202, 4, 2, 3	107 369	255 431
—	—	18637	2203, 2, 2, 200	283 483	1083	—	18947	18947	2202, 7, 2	84 179	219 517
—	1062	18661	2203, 3, 2000	275 437	1084	—	18959	18959	2202, 5, 4	62 259	61 323
1068	—	18671	2203, 304	64 305	—	1071	18973	18973	2202, 4, 300	215 379	301 617
—	1063	18679	2203, 403	79 301	—	1072	18979	18979	2202, 303, 2	193 437	355 459
—	1064	18691	220206, 2	101 217	1085	—	19001	19001	2202, 3, 20	302 433	190 527
1069	—	18701	220204, 200	228 385	—	1073	19009	19009	2202, 2050	229 269	197 437
1070	—	18713	220203, 2, 20	310 437	1086	—	19013	19013	2202, 203000	338 527	419 573
1071	—	18719	220203, 5	56 295	1087	—	19031	19031	2202, 200003	178 643	426 605
1072	—	18731	2202200002	250 653	1088	—	19037	19037	2202, 2000300	316 563	390 619
1073	—	18743	220202, 203	138 511	—	1074	19051	19051	2202, 200002	265 697	347 601
1074	—	18749	220202, 400	220 399	—	1075	19069	19069	2202, 500	185 341	118 447
—	1065	18757	22020003000	339 539	1089	—	19073	19073	2202, 600	192 321	239 371
1075	—	18773	22020000000000	458 741	1090	—	19079	19079	2202, 4, 3	134 431	324 559
—	1066	18787	2202002, 3, 2	227 521	—	1076	19081	19081	2202, 3020	373 597	210 509
1077	—	18793	2202200020	413 573	—	1077	19087	19087	2202, 3, 4	105 449	331 541
1076	—	18797	2202202200	346 599	1091	—	19121	19121	2202, 200002, 30	416 539	153 427
1077	—	18803	2202003, 2, 2	212 517	1092	—	19139	19139	2202, 2, 4, 2	206 459	32 217
1078	—	18839	2202, 2, 2003	152 545	—	1078	19141	19141	2202, 2, 3000	365 571	174 451
—	1068	18859	2202, 2000002	263 689	1093	—	19157	19157	2202, 2000000000	466 755	259 369
1079	—	18869	2202, 2000000	374 611	1094	—	19163	19163	2202, 200002	242 661	188 337
1080	—	18899	2202, 3002, 2	218 521	1095	—	19181	19181	2202, 30200	314 545	39 227

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1106	—	19427	02005, 3, 2	124 287	1117	—	19661	02, 2, 2, 2, 2, 200	338 577	1128	—	19913	02, 203, 2020	326	447		
—	1094	19429	02005, 2000	209 333	—	1108 19681	02, 2, 2, 3, 40	249 307	1129	—	19919	02, 203, 2, 4	84	373			
1107	—	19433	020050020	216 301	—	1109 19687	02, 2, 2, 3, 2, 3	133 457	—	1122	19927	02, 2030003	131	477			
—	1095	19441	02006, 30	145 191	1118	—	19697	02, 2, 2, 4, 30	242 317	1130	—	19937	02, 204, 40	198	245		
—	1096	19447	0200603	53 205	—	1110 19699	02, 2, 2, 4, 2, 2	167 409	1131	—	19949	02, 2040200	218	379			
1108	—	19457	02, 2, 90	66 73	1119	—	19709	02, 2, 2, 600	126 235	1132	—	19961	02, 206, 20	144	211		
1109	—	19463	02, 2, 7, 3	52 163	—	1111 19717	02, 2005000	207 319	—	1123	19963	02, 20602	77	221			
1110	—	19469	02, 2, 6, 200	142 239	1120	—	19727	02, 2004, 4	78 329	1133	—	19973	02, 3, 6000	136	209		
—	1097	19471	02, 2, 6, 4	45 187	1121	—	19739	02, 2003, 202	200 539	1134	—	19979	02, 3, 5002	116	295		
—	1098	19477	02, 2, 500000	211 339	1122	—	19751	02, 200202, 3	166 559	1135	—	19991	02, 3, 4003	96	341		
—	1099	19483	02, 2, 5, 202	121 325	—	1112 19753	02, 200200020	437 603	—	1124	19993	02, 3, 4, 2, 20	235	331			
—	1100	19489	02, 2, 400	183 221	—	1113 19759	02, 2002004	105 481	1136	—	19997	02, 3, 4, 300	182	321			
—	1101	19501	02, 2, 400200	245 421	1123	—	19763	02, 2002, 2, 2, 2	254 613	—	1125	20011	02, 3, 300002	195	509		
—	1102	19507	02, 2, 4, 2, 2, 2	169 407	—	1114 19777	02, 2000050	247 291	1137	—	20021	02, 3, 3, 20000	294	479			
—	1103	19531	02, 2, 302002	203 523	1124	—	19793	02, 200000030	416 531	—	1126	20023	02, 3, 3, 203	109	403		
1111	—	19541	02, 2, 30000000	368 595	—	1115 19801	02, 2000002, 20	443 629	—	1127	20029	02, 3, 3, 400	175	317			
—	1104	19543	02, 2, 300003	141 509	—	1116 19813	02, 20002, 2000	409 649	—	1128	20047	02, 3, 202, 4	89	389			
1112	—	19553	02, 2, 3, 40	244 299	—	1117 19819	02, 200020002	267 703	1138	—	20051	02, 3, 20002, 2	234	557			
1113	—	19559	02, 2, 3, 2, 2, 3	134 457	1125	—	19841	02, 202, 60	172 199	1139	—	20063	02, 3, 2005	56	313		
1114	—	19571	02, 2, 3, 3, 2	182 443	—	1118 19843	02, 202, 5, 2	145 317	—	1129	20071	02, 3, 2, 2, 3	135	461			
1115	—	19577	02, 2, 3, 4, 20	230 333	1126	—	19853	02, 202, 3, 200	300 509	—	1130	20089	02, 3, 2, 4, 20	227	329		
1116	—	19583	02, 2, 3, 7	24 175	—	1119 19861	02, 202, 200000	401 647	—	1131	20101	02, 3004000	233	361			
—	1105	19597	02, 2, 203, 200	291 493	—	1120 19867	02, 202, 2, 202	219 593	—	1132	20107	02, 3003002	187	479			
—	1106	19603	02, 2, 20202, 2	243 575	1127	—	19889	02, 20202, 30	340 441	—	1133	20113	02, 3002030	305	387		
—	1107	19609	02, 2, 202, 2, 20	373 527	—	1121 19891	02, 20202, 2, 2	239 579	—	1140	—	20117	02, 300200000	364	587		

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1141	—	20123	02, 3, 002, 202	200	541	—	1145	20359	02, 5, 4, 3	67	217	1166	—	20639	000492, 5	48	257
1142	—	20139	02, 3, 00004	272	331	1155	—	20369	02, 5, 2030	188	239	—	1159	20641	00040004	223	271
—	1134	20143	02, 3, 00004	95	439	—	1146	20389	02, 5, 00000	213	337	1167	—	20663	000400203	110	409
1143	—	20147	02, 3, 0002, 2, 2	226	547	1156	—	20393	02, 5, 000020	232	321	1168	—	20681	0004, 2, 2020	290	397
—	1135	20149	02, 3, 00020000	337	583	1157	—	20399	02, 5, 00004	54	251	1169	—	20693	0004, 2, 000000	318	515
—	1136	20161	02, 3, 02, 50	193	259	—	1147	20407	02, 5, 0203	73	273	—	1160	20707	0004, 3, 3, 2	149	343
—	1137	20173	02, 3, 02, 2, 200	201	497	1158	—	20411	02, 5, 0302	92	257	1170	—	20717	0004, 3, 0200	222	385
1144	—	20177	02, 3, 020030	394	389	—	1148	20431	02, 6, 2, 4	41	183	—	1161	20719	0004, 3, 04	59	281
1145	—	20183	02, 3, 020003	134	487	1159	—	20441	02, 6, 02, 20	148	211	—	1162	20731	0004, 5, 02	87	247
1146	—	20201	02, 3, 030020	284	395	—	1149	20443	02, 6, 0202	85	233	—	1163	20743	0003, 5, 3	81	257
1147	—	20219	02, 3, 0502	88	231	1160	—	20477	02, 10, 00	34	65	1171	—	20747	0003, 04, 002	148	377
1148	—	20231	02, 4, 5, 3	68	217	—	1150	20479	02, 12	32	67	1172	—	20749	0003, 04, 200	251	363
—	1138	20233	02, 4, 4, 020	191	259	1161	—	20483	00010, 2	3	37	—	—	20753	0003, 03, 00	254	321
1149	—	20249	02, 4, 3, 20	236	333	1162	—	20507	0007, 202	72	193	1173	—	20759	0003, 03, 003	120	427
1150	—	20261	02, 4, 202000	268	423	—	1151	20509	0007, 300	95	167	1174	—	20771	0003, 02, 03, 2	198	449
—	1139	20269	02, 4, 2, 00200	255	439	—	1152	20521	0006, 0020	175	241	—	1165	20773	0003, 02, 02000	343	541
—	1140	20287	02, 4, 2, 6	29	187	—	1153	20533	0006, 20000	169	275	1175	—	20789	0003, 02, 20000	354	577
1151	—	20297	02, 4, 002020	280	393	1163	—	20543	0006, 6	20	123	1176	—	20807	0003, 00, 3	142	465
—	1141	20323	02, 4, 02, 3, 2	151	347	1164	—	20549	0005, 3000	174	271	—	1166	20809	0003, 00, 02020	387	529
1152	—	20327	02, 4, 02, 2, 3	106	393	—	1154	20551	0005, 3	77	251	1177	—	20849	0003, 00, 3, 00	292	381
—	1142	20333	02, 4, 020200	228	395	—	1155	20563	0005, 0002, 2	151	359	—	1167	20857	0003, 00, 4, 20	253	367
—	1143	20347	02, 4, 030000	215	353	—	1156	20593	0005, 3, 30	179	233	1178	—	20873	0003, 2, 3, 020	308	419
—	1143	20347	02, 4, 0402	93	203	—	1157	20599	0005, 303	71	267	1179	—	20879	0003, 2, 3, 4	86	369
—	1144	20353	02, 5, 60	99	115	—	1158	20611	0004, 05, 2	99	215	—	1168	20887	0003, 2, 2, 003	147	527
1154	—	20357	02, 5, 4, 0000	150	233	1165	—	20627	0004, 0202, 2	178	421	1180	—	20897	0003, 2, 0004	280	341

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	1169	20899	0003, 2003, 2	219	499	1193	—	21143	000200000003	188	673	—	1194	21391	0002, 3, 3, 4	89	383
1181	—	20903	0003, 2002, 3	158	535	1194	—	21149	00020002, 300	346	613	—	1195	21397	0002, 3, 200000	391	631
1182	—	20921	0003, 203, 20	302	435	—	1182	21157	00020000000000	493	779	1206	—	21401	0002, 3, 2, 2, 20	364	515
—	1170	20920	0003, 3, 50	191	227	—	1183	21163	00020000000000	335	877	1207	—	21407	0002, 3, 2, 5	62	337
1183	—	20939	0003, 3, 2002	202	523	—	1184	21169	0002000002, 30	433	561	1208	—	21419	0002, 30000002	256	671
—	1171	20947	0003, 3002, 2	213	509	1195	—	21179	0002000000302	226	629	—	1196	21433	0002, 303, 20	299	431
—	1172	20959	0003, 305	47	271	—	1185	21187	00020002, 4, 2	215	479	1209	—	21467	0002, 40202	164	449
1184	—	20963	0003, 4, 3, 2	152	351	1196	—	21191	00020002, 3, 3	166	547	—	1197	21481	0002, 50000	239	333
1185	—	20981	0003, 50000	196	323	—	1186	21193	00020002, 2020	449	615	—	1198	21487	0002, 504	51	247
—	1173	20983	0003, 503	69	265	—	1187	21211	000200020202	253	691	1210	—	21491	0002, 6, 2, 2	110	271
—	1174	21001	000205020	211	285	1197	—	21221	00020003, 2000	378	601	—	1199	21493	0002, 60000	169	279
1186	—	21011	00020402, 2	178	419	1198	—	21227	000200030002	242	639	—	1200	21499	0002, 702	67	193
1175	21013	00020400000	293	471	—	1188	21247	00020008	19	163	1211	—	1201	21503	0002, 10	8	83
1187	—	21017	000204, 2, 20	282	397	1199	—	21269	0002, 2, 300000	382	615	—	1201	21517	000006, 200	167	281
—	1176	21019	000204, 202	167	449	—	1189	21277	0002, 2, 3, 300	279	493	1212	—	21521	000005030	204	257
1188	—	21023	000204, 5	52	271	—	1190	21283	0002, 2, 203, 2	241	547	—	1202	21523	00000502, 2	151	355
—	1177	21031	00020302, 3	145	487	—	1191	21313	0002, 20050	257	303	—	1203	21529	000005, 2, 20	241	339
1189	—	21059	00020204, 2	194	429	1200	—	21317	0002, 2003000	376	587	1213	—	21557	000004, 20000	320	521
—	1178	21061	00020203000	347	541	—	1192	21319	0002, 2003, 3	165	541	—	1204	21559	000004, 203	119	439
—	1179	21067	00020202002	265	683	1201	—	21323	0002, 2002002	284	733	1214	—	21563	000004, 302	156	431
1190	—	21089	000202, 2, 40	314	385	1202	—	21341	0002, 200300	338	603	1215	—	21569	000003050	214	251
1191	—	21101	000202, 20200	374	647	1203	—	21347	0002, 202, 3, 2	246	565	—	1205	21577	00000302020	383	523
1192	—	21107	000202, 3, 2, 2	232	565	1204	—	21377	0002, 3, 60	170	197	1216	—	21587	0000030002, 2	272	647
—	1180	21121	000200060	199	229	—	1193	21379	0002, 3, 5, 2	143	313	—	1206	21589	0000030000000	441	713
—	1181	21139	00020000202, 2	297	703	1205	—	21383	0002, 3, 4, 3	116	375	1217	—	21599	0000030005	66	367

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1255	—	22343	0003003, 3	146	479	1268	—	22619	002, 400302	174	473	1283	—	22853	002, 20003000	380	593
1256	—	22349	0003002, 200	356	607	—	1257	22621	002, 400300	223	397	1284	—	22859	002, 20002002	288	743
1257	—	22367	0003005	64	361	1269	—	22637	002, 4, 20200	262	453	—	1267	22861	002, 20002, 200	409	697
—	1245	22369	000302, 40	279	343	—	1258	22639	002, 4, 204	71	333	1285	—	22871	002, 20000003	196	709
—	1246	22381	0003020200	325	503	1270	—	22643	002, 4, 3, 2	164	399	1286	—	22877	002, 20000300	346	617
1258	—	22391	00030303	110	417	—	1259	22651	002, 4, 402	115	323	1287	—	22901	002, 20030000	370	607
1259	—	22397	00030300	156	289	—	1260	22669	002, 303, 200	271	459	1288	—	22907	002, 200402	162	457
1260	—	22409	0004, 3020	268	365	1271	—	22679	002, 302003	144	515	—	1268	22921	002, 2, 2, 3020	355	483
1261	—	22433	00040040	232	283	1272	—	22691	002, 30003, 2	222	505	1289	—	22937	002, 2, 2, 2, 20	408	577
—	1247	22441	0004000020	339	469	1273	—	22697	002, 30000020	422	583	1290	—	22943	002, 2, 2, 2, 5	70	379
—	1248	22447	00040004	79	367	—	1261	22699	002, 30000002	261	683	1291	—	22961	002, 2, 202, 30	374	485
—	1249	22453	0004020000	293	479	1274	—	22709	002, 30000000	378	617	—	1269	22963	002, 2, 202, 2, 2	263	637
1262	—	22469	0005, 3000	206	323	—	1262	22717	002, 300400	217	395	1292	—	22973	002, 2, 20400	234	427
1263	—	22481	00050030	216	277	1275	—	22721	002, 3, 2, 50	212	251	—	1270	22993	002, 2, 30030	335	429
—	1250	22483	0005002, 2	155	371	1276	—	22727	002, 3, 2, 3, 3	134	441	1293	—	23003	002, 2, 30202	200	547
—	1251	22501	0006, 2000	175	279	1277	—	22739	002, 3, 2002, 2	246	587	—	1271	23011	002, 2, 4, 3, 2	171	395
1264	—	22511	000604	38	185	—	1263	22741	002, 3, 20000000	397	643	—	1272	23017	002, 2, 40020	301	419
—	1252	22531	002, 9, 2	47	99	1278	—	22751	002, 3, 205	56	319	1294	—	23021	002, 2, 40200	248	431
1265	—	22541	002, 7, 200	116	195	1279	—	22769	002, 3, 4, 30	236	309	1295	—	23027	002, 2, 5, 2	142	349
—	1253	22543	002, 7, 4	37	153	—	1264	22777	002, 3, 5, 20	197	287	—	1273	23029	002, 2, 50000	219	361
—	1254	22549	002, 600000	175	281	—	1265	22783	002, 3, 8	17	141	1296	—	23039	002, 2, 9	12	113
—	1255	22567	002, 502, 3	91	305	1280	—	22787	002, 206, 2	114	245	—	1274	23041	0020080	103	115
1266	—	22571	002, 500002	150	301	—	1266	22807	002, 203003	143	509	—	1275	23053	002005, 200	213	359
—	1256	22573	002, 500200	209	359	1281	—	22811	002, 203, 202	206	555	1297	—	23057	002004030	256	323
1267	—	22613	002, 40000000	326	527	1282	—	22817	002, 202040	298	361	—	1276	23059	00200402, 2	189	445

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1298	—	23063	000004003	122 433	122 433	1310	—	23337	00002, 3, 5	64	339	1334	—	23603	003, 4, 2, 2, 2	164	395
1299	1277	23071	000004, 5	55 287	1311	—	—	23333	00002, 200000	410	647	1335	—	23609	003, 4, 3, 20	224	321
1299	—	23081	0000030000	404 557	1312	—	—	23339	00002, 200000	282	737	1301	—	23623	003, 3, 3, 3	113	369
1300	—	23087	000003004	98 447	1313	—	—	23337	00002, 2, 400	244	443	1336	—	23627	003, 300002	196	505
1301	—	23099	000003, 302	184 509	1314	—	—	23359	00002000020	438	599	—	1302	23629	003, 302, 200	279	475
1302	—	23117	00000002, 200	394 671	—	1290	—	23371	00002000002	277	715	1337	—	23633	003, 300030	302	385
1298	23131	0000000020	265 721	1315	—	—	—	23399	0000202, 2, 3	108	575	1338	—	23663	003, 3, 204	76	357
1279	23143	000002, 2, 2, 3	179 611	1316	—	—	—	23417	0000204, 20	272	395	1339	—	23669	003, 3, 30000	274	449
1303	—	23159	000002, 303	136 513	—	1291	—	23431	00003, 4, 3	111	359	—	1303	23671	003, 3, 303	99	373
—	1280	23167	000002, 7	31 229	1317	—	—	23447	00003, 2003	144	517	—	1304	23677	003, 3, 500	145	267
—	1281	23173	00000004000	317 491	1318	—	—	23459	00003003, 2	210	479	1330	—	23687	003, 204, 3	108	347
1304	—	23189	000000000000	498 803	—	1292	—	23473	0000302, 30	309	401	—	1305	23689	003, 203020	301	409
1282	23197	00000002, 300	355 620	—	1293	—	—	23497	00004, 2020	285	391	—	1306	23719	003, 20002, 3	163	551
1305	—	23201	0000000040	374 455	—	1294	—	23509	000040000000	299	485	1331	—	23741	003, 200400	218	397
—	1283	23203	0000000003, 2	293 667	1319	—	—	23531	0000500002	134	355	—	1307	23743	003, 2006	39	257
—	1284	23209	000000000000	555 767	1320	—	—	23537	00006, 30	148	195	1332	—	23747	003, 2, 2, 4, 2	172	383
—	1285	23227	000000000302	231 643	—	1295	—	23539	00006, 2, 2	101	249	1333	—	23753	003, 2, 2, 2020	360	493
—	1286	23251	0000000002, 2	307 733	1321	—	—	23549	0000800	68	129	—	1308	23761	003, 2, 20030	337	431
—	1287	23269	00000003, 2000	383 609	—	1296	—	23557	003, 7000	109	167	—	1309	23767	003, 2, 20003	149	541
1306	—	23279	0000000304	88 421	1322	—	—	23561	003, 6020	146	197	—	1310	23773	003, 2, 20300	259	463
1307	—	23291	0000000502	126 359	—	1297	—	23563	003, 6002	95	241	1334	—	23789	003, 2, 30200	268	465
1288	23293	0000000600	145 271	1323	—	—	—	23567	003, 6, 4	44	183	1335	—	23801	003, 2, 5, 20	190	277
1308	—	23297	00002, 70	140 159	—	1298	—	23581	003, 5, 300	155	273	1336	—	23813	003005000	194	299
1289	23311	00002, 4, 4	83 351	—	1299	—	—	23593	003, 400020	275	379	1337	—	23819	003004002	162	413
1309	—	23321	00002, 3, 2, 20	358 505	—	1300	—	23599	003, 4004	67	305	—	1311	23827	00300302, 2	203	479

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1372	—	24593	2, 803e	74	93	—	1366	24889	2, 4e2, 3, 2e	239	343	—	1378	25153	2, 3e2e5e	195	229
1373	—	24611	2, 793, 2	66	149	—	1367	24907	2, 4e2e2e2e	195	503	—	—	25163	2, 3e2e2e2e	220	567
1374	—	24621	2, 79e4	32	145	1384	—	24917	2, 4e2e2e2e2e2e	348	563	1398	—	25169	2, 3e2e2e3e	338	431
—	1353	24631	2, 7, 2e3	47	173	—	1368	24919	2, 4e2e2e2e2e	133	481	—	1379	25171	2, 3e2e2e2e, 2	245	583
1375	—	24659	2, 6e2e2, 2	114	271	1385	—	24923	2, 4e2e2e2e2e	184	501	—	1380	25183	2, 3e2e2e5	59	329
1376	—	24671	2, 6e2e5	28	155	—	1369	24943	2, 4e2e2e4	71	335	—	1381	25189	2, 3e2, 2, 2e2e	345	547
1377	—	24677	2, 6, 2, 2e2e	166	263	1386	—	24953	2, 4e2e4, 2e	202	293	—	1382	25219	2, 3e2e5, 2	141	307
1378	—	24683	2, 6, 2e2e2	110	289	—	1370	24967	2, 4, 2, 4, 3	89	287	1399	—	25229	2, 3e2e3, 2e2	298	505
—	1354	24691	2, 6, 3, 2	95	231	1387	—	24971	2, 4, 2, 3e2e	158	405	—	1383	25237	2, 3e2e2e2e2e2e	405	653
—	1355	24697	2, 6, 4, 2e	121	175	1388	—	24977	2, 4, 2, 2e3e	256	325	—	1384	25243	2, 3e2e2, 2e2	223	603
—	1356	24709	2, 5e4e2e	139	215	—	1371	24979	2, 4, 2, 2e2, 2	187	443	1400	—	25247	2, 3e2e2, 5	66	355
1379	—	24733	2, 5e2, 3e2	161	285	1389	—	24989	2, 4, 2, 2, 3e2e	216	383	1401	—	25253	2, 3e2e2e2e2e2e	412	651
—	1361	24749	2, 5e2e2e	220	379	1390	—	25013	2, 4, 2e2e2e2e	292	477	—	1385	25261	2, 3e2e2e2e2e2e	387	667
—	1358	24763	2, 5e2e3e2	109	303	1391	—	25031	2, 4, 3, 3, 3	96	317	1402	—	25301	2, 3e2e2e2e2e2e	408	661
1380	—	24767	2, 5e2e6	24	157	—	1372	25033	2, 4, 3, 2e2e	259	355	—	1386	25303	2, 3e2e2e2e3	155	563
—	1359	24781	2, 5, 2, 2, 2e2e	201	343	1392	—	25037	2, 4, 3, 2, 2e2e	230	393	1403	—	25307	2, 3e2e2e2e2e	212	579
—	1360	24793	2, 5, 2e2, 2e	223	317	—	1373	25057	2, 4, 4, 4e	161	199	—	1387	25309	2, 3e2e2e3e2e	269	481
—	1361	24799	2, 5, 2e5	35	199	1393	—	25073	2, 4, 5, 3e	150	197	—	1388	25321	2, 3e2e3e2e2e	333	463
1381	—	24809	2, 5, 3e2e2e	208	289	—	1374	25087	2, 4, 9	9	83	—	1389	25339	2, 3e2e5e2	105	299
1382	—	24821	2, 5, 4e2e2e	160	263	1394	—	25097	2, 3e5e2e	174	235	1404	—	25343	2, 3e2e8	16	137
—	1362	24841	2, 4e4e2e	181	245	—	1375	25117	2, 3e4e2e3	95	337	1405	—	25349	2, 3, 2, 5e2e2e	190	293
—	1363	24847	2, 4e4, 4	53	223	—	1376	25119	2, 3e4, 3e2e	181	319	—	1390	25357	2, 3, 2, 4, 2e2e	229	387
1383	—	24851	2, 4e3e2, 2	148	349	1395	—	25121	2, 3e3e4e	206	249	1406	—	25367	2, 3, 2, 3e2e3	126	449
—	1364	24859	2, 4e3, 2e2	137	369	1396	—	25127	2, 3e3e2, 3	120	403	1407	—	25373	2, 3, 2, 3, 3e2e	236	417
—	1365	24877	2, 4e2e2e2e	261	449	—	1377	25147	2, 3e3, 3e2	145	401	1408	—	25391	2, 3, 2, 2e2e4	94	431

z'	z''	Z	Exponenten	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	z'	z''	Z	Exponenten	N
1409	—	25409	2, 3, 20050	218 257	—	1404	25657	2, 204, 3, 20	245 351	1433	—	25919	2, 20002, 6	50 319
—	1391	25411	2, 3, 2004, 2	179 397	1421	—	25667	2, 20304, 2	158 349	1434	—	25931	2, 200002002	312 805
—	1392	25423	2, 3, 2002, 4	101 443	1422	—	25673	2, 2030020	342 407	—	1417	25933	2, 2000002, 200	443 755
1410	—	25439	2, 3, 20005	62 349	1423	—	25679	2, 20302, 4	92 401	—	1418	25939	2, 20000002, 2	343 817
—	1393	25447	2, 3, 202, 2, 3	147 503	—	1405	25683	2, 20300300	269 479	1435	—	25943	2, 2000000003	212 767
—	1394	25453	2, 3, 2020200	317 549	1424	—	25703	2, 203, 2, 2, 3	144 491	—	1419	25951	2, 200000005	81 455
1411	—	25457	2, 3, 203, 30	278 363	—	1406	25717	2, 203, 30000	397 593	—	1420	25969	2, 200003, 30	367 479
1412	—	25463	2, 3, 20303	108 409	1425	—	25733	2, 20204000	272 421	—	1421	25981	2, 20000500	205 379
1413	—	25469	2, 3, 20500	154 285	—	1407	25741	2, 20203, 200	317 537	1436	—	25997	2, 2002, 3, 200	346 587
—	1395	25471	2, 3, 207	23 177	—	1408	25747	2, 2020202, 2	265 627	—	1422	25999	2, 2002, 3, 4	105 451
1414	—	25523	2, 3, 302, 2, 2	196 475	—	1409	25759	2, 20202, 5	71 381	1437	—	26003	2, 2002, 202, 2	284 673
—	1396	25537	2, 3, 4, 50	157 187	1426	—	25763	2, 2020003, 2	258 587	—	1423	26017	2, 20020040	339 413
1415	—	25541	2, 3, 4, 3000	224 351	—	1410	25771	2, 2020000002	303 793	1438	—	26021	2, 2002002000	456 721
—	1397	25561	2, 3, 402, 20	245 349	1427	—	25793	2, 202, 2, 50	244 289	—	1424	26029	2, 2002000200	425 733
1416	—	25577	2, 3, 50020	206 287	1428	—	25799	2, 202, 2, 3, 3	154 507	—	1425	26041	2, 200203, 20	363 523
—	1398	25579	2, 3, 50002	125 331	—	1411	25801	2, 202, 2, 2020	417 571	—	1426	26053	2, 2003, 3000	325 509
1417	—	25583	2, 3, 504	44 213	—	1412	25819	2, 202, 20202	237 647	—	1427	26083	2, 2004, 3, 2	177 409
1418	—	25589	2, 3, 60000	146 241	1429	—	25841	2, 202, 4, 30	268 351	1439	—	26099	2, 2005, 2, 2	146 359
1419	—	25601	2, 2090	68 75	1430	—	25847	2, 202, 403	102 389	—	1428	26107	2, 200602	91 261
—	1399	25603	2, 208, 2	61 129	—	1413	25849	2, 202, 5, 20	223 325	1440	—	26111	2, 2009	12 115
—	1400	25609	2, 206020	155 209	—	1414	25867	2, 20004002	195 497	—	1429	26113	2, 2, 2, 80	101 113
—	1401	25621	2, 20500000	221 355	—	1415	25873	2, 20003030	333 421	—	1430	26119	2, 2, 2, 6, 3	77 243
—	1402	25633	2, 204040	193 233	1431	—	25889	2, 20002040	326 395	1441	—	26141	2, 2, 2, 4, 300	224 395
—	1403	25639	2, 20402, 3	113 379	—	1416	25903	2, 20002004	119 545	1442	—	26153	2, 2, 2, 300020	388 535
1420	—	25643	2, 20400002	186 485	1432	—	25913	2, 20002, 3, 20	388 537	—	1431	26161	2, 2, 2, 3, 2, 30	323 417

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1443	—	26171	2, 2, 2, 3, 302	176 487	151 509	—	1441	26407	2, 2, 3, 202, 3	151 509	1473	—	26687	2005, 6	28 173		
1444	—	26177	2, 2, 2, 2050	234 275	324 419	1459	—	26417	2, 2, 3, 2, 2, 30	324 419	1474	—	26693	200403000	242 377		
1445	—	26183	2, 2, 2, 203, 3	152 497	134 497	1460	—	26423	2, 2, 3, 2, 203	134 497	1475	—	26699	200402002	186 479		
1446	—	26189	2, 2, 2, 202, 200	374 637	39 251	—	1442	26431	2, 2, 3, 2, 6	39 251	—	1452	26701	2004002, 200	265 451		
—	1432	26203	2, 2, 2, 200202	251 683	317 495	—	1443	26437	2, 2, 3003000	317 495	1476	—	26711	200400003	130 469		
—	1433	26209	2, 2, 2, 2, 2, 40	309 379	361 461	—	1444	26449	2, 2, 3000030	361 461	—	1453	26713	2004002, 20	311 441		
—	1434	26227	2, 2, 2, 3, 2, 2	227 553	222 605	1461	—	26459	2, 2, 3000202	222 605	1477	—	26717	2004000300	232 413		
1447	—	26237	2, 2, 2, 2, 500	186 343	83 393	—	1445	26479	2, 2, 30204	83 393	1478	—	26723	2004, 2, 3, 2	176 403		
1448	—	26249	2, 2, 2003020	370 593	232 337	1462	—	26489	2, 2, 304, 20	232 337	1479	—	26729	2004, 20020	324 449		
—	1435	26251	2, 2, 2003002	237 607	137 159	—	1446	26497	2, 2, 4, 60	137 159	—	1454	26731	2004, 20002	199 523		
1449	—	26261	2, 2, 2002000000	462 745	208 323	1463	—	26501	2, 2, 4, 4000	208 323	—	1455	26737	2004, 3, 30	245 319		
—	1436	26263	2, 2, 20020003	179 641	262 333	1464	—	26513	2, 2, 4, 2030	262 333	1480	—	26759	200304, 3	110 353		
1450	—	26267	2, 2, 2002, 202	254 687	201 527	—	1447	26539	2, 2, 4000002	201 527	1481	—	26777	200302, 2, 20	366 517		
—	1437	26293	2, 2, 200200000	455 743	157 287	—	1448	26557	2, 2, 40400	157 287	1482	—	26783	200302, 5	64 343		
1451	—	26297	2, 2, 20003, 20	380 547	140 167	1465	—	26561	2, 2, 5, 50	140 167	1483	—	26801	2003002, 30	356 461		
1452	—	26309	2, 2, 202, 3000	356 557	204 349	1466	—	26573	2, 2, 5, 2, 200	204 349	1484	—	26813	200300400	228 415		
—	1438	26317	2, 2, 202, 2, 200	373 637	32 187	1467	—	26591	2, 2, 505	32 187	—	1456	26821	2003, 2, 3000	323 505		
1453	—	26321	2, 2, 2020030	390 499	170 271	1468	—	26597	2, 2, 6, 2000	170 271	—	1457	26833	2003, 20030	359 459		
1454	—	26339	2, 2, 203, 3, 2	206 475	48 101	1469	—	26627	2009, 2	48 101	—	1458	26839	2003, 20003	159 577		
—	1439	26347	2, 2, 2030002	223 589	124 167	1470	—	26633	2007020	124 167	1485	—	26849	2003, 3, 40	254 313		
1455	—	26357	2, 2, 20400000	274 451	147 185	—	1449	26641	2006030	147 185	1486	—	26861	2003, 30200	290 503		
—	1440	26371	2, 2, 3, 6, 2	107 231	71 251	—	1450	26647	2006003	71 251	—	1459	26863	2003, 304	77 367		
1456	—	26387	2, 2, 3, 302, 2	202 477	216 371	1471	—	26669	200500200	216 371	1487	—	26879	2003, 8	18 149		
1457	—	26393	2, 2, 3, 3, 2, 20	314 443	206 295	1472	—	26681	2005, 3, 20	206 295	—	1460	26881	2002070	139 157		
1458	—	26399	2, 2, 3, 3, 5	56 297	117 323	—	1451	26683	2005, 302	117 323	1488	—	26891	200204002	188 479		

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	1461	26893	200204, 200	273	461	1501	—	27143	200006, 3	86	271	—	1487	27457	200020050	279	329
1489	—	26903	200203003	152	541	1502	—	27179	20000300002	274	715	1513	—	27479	20002000003	208	753
1490	—	26921	20020200000	482	665	1503	—	27191	200003, 203	154	569	—	1488	27481	2000200002, 20	495	703
1491	—	26927	2002020004	116	531	1504	—	27197	200003, 400	248	449	—	1489	27487	2000200005	79	445
—	1462	26947	200200004, 2	227	503	—	1474	27211	20002020002	303	781	1514	—	27509	20002030000	382	627
1492	—	26951	200200003, 3	178	583	1505	—	27239	200002, 2, 2, 3	196	669	1515	—	27527	20003, 4, 3	124	401
—	1463	26953	20020000200	485	663	—	1475	27241	200002, 20000	507	703	—	1490	27529	20003, 3000	343	467
—	1464	26959	200200002, 4	129	565	—	1476	27253	200002, 30000	413	677	1516	—	27539	20003, 2002, 2	256	607
1493	—	26981	20020002, 2000	462	733	—	1477	27259	200002, 402	183	515	—	1491	27541	20003, 200000	417	673
1494	—	26987	200200020002	302	795	—	1478	27271	20000004, 3	157	505	1517	—	27551	20003, 2, 5	66	359
1495	—	26993	20020003, 30	364	475	—	1479	27277	20000003, 200	403	683	1518	—	27581	200030400	214	391
1496	—	27011	2002, 2, 5, 2	168	367	1506	—	27281	20000002030	458	581	—	1492	27583	20003006	37	251
1497	—	27017	2002, 2, 3000	380	517	—	1480	27283	2000000202, 2	335	793	1519	—	27611	200040202	172	471
—	1465	27031	2002, 2, 2003	181	649	1507	—	27299	2000000003, 2	322	733	1520	—	27617	20005, 40	188	233
—	1466	27043	2002, 2003, 2	269	613	1508	—	27329	2000002, 50	296	351	—	1493	27631	2000504	53	257
1498	—	27059	2002, 202, 2, 2	282	683	—	1481	27337	20000002, 2020	503	689	1521	—	27647	200010	8	85
—	1467	27061	2002, 20200000	445	727	—	1482	27361	20000003, 40	325	401	1522	—	27653	202, 7000	126	193
—	1468	27067	2002, 20302	207	577	—	1483	27367	20000003, 2, 3	173	595	—	1494	27673	202, 5, 2, 20	231	325
—	1469	27073	2002, 3, 50	233	277	—	1484	27397	20002, 5000	247	381	1523	—	27689	202, 400020	320	441
1499	—	27077	2002, 3, 3000	334	523	1509	—	27407	20002, 4, 4	92	389	—	1495	27691	202, 400002	199	519
—	1470	27091	2002, 3002, 2	259	619	—	1485	27409	20002, 3030	347	439	—	1496	27697	202, 4, 2, 30	269	347
—	1471	27103	2002, 305	57	329	—	1486	27427	20002, 203, 2	263	597	1524	—	27701	202, 4, 20000	304	495
1500	—	27107	2002, 4, 3, 2	184	425	1510	—	27431	20002, 202, 3	192	647	—	1497	27733	202, 30000000	415	671
—	1472	27109	2002, 4, 2000	311	495	1511	—	27437	20002, 200200	434	747	1525	—	27737	202, 3002, 20	380	539
—	1473	27127	2002, 503	83	319	1512	—	27449	20002, 2, 3, 20	392	563	—	1498	27739	202, 300202	221	601

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1526	—	27743	202, 3005	62	345	1540	—	27953	202002, 2, 30	400	517	—	1524	28219	203, 3, 302	155	429
1527	—	27749	202, 3, 2, 2000	364	577	1510	27961	202002, 3, 20	381	547	1551	—	—	28229	203, 203000	302	471
1528	—	27751	202, 3, 2, 3	151	515	1511	27967	202002, 6	49	313	1552	—	—	28277	203, 2, 30000	308	505
—	1499	27763	202, 3, 3, 2, 2	205	499	1541	—	27983	20200002, 4	128	561	—	1525	28279	203, 2, 303	111	419
—	1500	27767	202, 3, 303	116	437	1512	27997	20200000300	365	651	1553	—	—	28283	203, 2, 402	136	383
1529	—	27773	202, 3, 500	170	313	1542	—	28001	2020002, 40	346	425	1554	—	28289	2030060	164	189
1530	—	27779	202, 205, 2	154	335	1543	—	28019	2020003, 2, 2	248	605	1556	—	28297	203003020	317	431
1531	—	27791	202, 203, 4	100	427	1513	28037	202000402	169	477	1555	—	—	28307	20300202, 2	242	573
—	1501	27793	202, 202030	373	473	1544	—	28031	2020007	30	229	1527	—	28309	20300200000	395	637
—	1502	27799	202, 202003	173	619	1514	28051	20202, 202, 2	273	647	1556	—	—	28319	203002, 5	64	345
1532	—	27803	202, 202, 202	246	665	1515	28057	20202, 2, 2, 20	415	587	1557	—	—	28349	203000400	220	401
1533	—	27809	202, 200040	338	411	1516	28069	20202002000	437	691	1528	—	—	28351	2030006	39	259
—	1503	27817	202, 20000020	593	605	1517	28081	2020202, 30	377	489	1529	—	—	28387	20303, 3, 2	173	399
—	1504	27823	202, 2000004	119	549	1518	28087	202020203	153	571	1530	—	—	28393	203030020	307	427
1534	—	27827	202, 202, 2, 2	284	687	1545	—	28097	20203, 50	216	257	1558	—	28403	20304, 2, 2	148	363
—	1505	27847	202, 2, 2, 3, 3	157	517	1519	28099	20203, 4, 2	175	391	1559	—	—	28409	20305, 20	176	257
1535	—	27851	202, 2, 2, 2002	268	693	1546	—	28109	20203, 2, 200	320	547	1531	—	28411	2030502	95	271
—	1506	27883	202, 2, 30002	233	615	1520	28111	20203, 2, 4	93	413	1532	—	—	28429	204, 4, 200	191	323
1536	—	27893	202, 2, 40000	290	477	1521	28123	202030202	197	539	1560	—	—	28433	204, 3030	222	281
—	1507	27901	202, 2, 600	141	263	1547	—	28151	2020503	74	285	1561	—	28439	204, 3003	104	371
1537	—	27917	202004, 200	280	473	1548	—	28163	203, 7, 2	80	171	1533	—	28447	204, 3, 5	45	239
—	1508	27919	202004, 4	87	367	1549	—	28181	203, 400000	268	431	1562	—	28463	204, 2004	76	349
1538	—	27941	2020020000	438	691	1522	28183	203, 4003	105	373	1534	—	—	28477	204, 2, 400	169	307
—	1509	27943	20200202, 3	185	623	1523	28201	203, 300020	343	473	1563	—	—	28493	204002, 200	268	457
1539	—	27947	20200200002	302	789	1550	—	28211	203, 3, 2, 2	202	487	1564	—	28499	20400002, 2	206	491

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	1535	28513	20402, 40	209	257	1576	—	28697	3, 7, 2, 20	116	163	1584	—	28949	3, 30300000	284	457
1565	—	28517	20402, 2000	274	435	1577	—	28703	3, 7, 5	22	113	1585	—	28961	3, 302040	232	281
—	1536	28537	20404, 20	181	263	—	1549	28711	3, 602, 3	63	211	1586	—	28979	3, 302, 2, 2, 2	206	497
1566	—	28541	2040500	116	215	—	1550	28723	3, 6, 2, 2, 2	101	243	1587	—	29009	3, 30000030	344	439
1567	—	28547	205, 5, 2	88	193	—	1551	28729	3, 6, 3, 20	139	199	—	1566	29017	3, 300002, 20	367	521
—	1537	28549	205, 4000	159	247	1578	—	28751	3, 502, 4	54	235	1588	—	29021	3, 300000300	272	485
1568	—	28559	205, 3, 4	54	233	—	1552	28753	3, 500030	197	251	—	1567	29023	3, 3000005	59	331
1569	—	28571	205, 2, 202	128	347	—	1553	28759	3, 500003	89	321	1589	—	29027	3, 3002, 3, 2	200	459
—	1538	28573	205, 2, 300	165	293	—	1554	28771	3, 5, 2, 3, 2	121	277	1590	—	29033	3, 30020020	364	505
—	1539	28579	205003, 2	131	299	—	1555	28789	3, 5, 30000	185	303	—	1568	29059	3, 3, 2, 5, 2	125	273
—	1540	28591	2050004	57	265	1579	—	28793	3, 5, 4, 20	150	217	1591	—	29063	3, 3, 2, 4, 3	102	329
—	1541	28597	205020000	211	345	—	1556	28807	3, 404, 3	77	247	—	1569	29077	3, 3, 2, 200000	349	563
—	1542	28603	2050302	97	271	—	1557	28813	3, 403, 200	199	337	—	1570	29101	3, 3, 2000200	323	557
1570	—	28607	20506	20	137	1580	—	28817	3, 402030	228	289	1592	—	29123	3, 3, 3, 4, 2	142	317
1571	—	28619	206, 2002	106	275	—	1558	28837	3, 40002000	283	447	1593	—	29129	3, 3, 3, 2020	294	403
—	1543	28621	206, 2, 200	149	255	—	1559	28843	3, 40000002	193	505	—	1571	29131	3, 3, 3, 2002	185	479
—	1544	28627	206002, 2	109	261	1581	—	28859	3, 400302	132	367	—	1572	29137	3, 3, 30030	271	347
1572	—	28631	2060003	66	241	—	1560	28867	3, 4, 2, 4, 2	129	287	1594	—	29147	3, 3, 30202	162	443
1573	—	28643	207, 3, 2	72	167	1582	—	28871	3, 4, 2, 3, 3	100	329	1595	—	29153	3, 3, 4, 0	182	225
1574	—	28649	2070020	124	173	—	1561	28879	3, 4, 2, 2, 4	71	313	—	1573	29167	3, 3, 404	53	255
—	1545	28657	208, 30	81	107	1583	—	28901	3, 4, 3, 2000	236	375	—	1574	29173	3, 3, 50000	179	295
1575	—	28661	2080000	84	139	—	1562	28909	3, 4, 30200	207	359	—	1575	29179	3, 3, 602	73	209
—	1546	28663	20803	29	113	—	1563	28921	3, 4, 5, 20	149	217	—	1576	29191	3, 206, 3	67	211
—	1547	28669	201000	35	67	—	1564	28927	3, 4, 8	13	107	1596	—	29201	3, 204030	218	275
—	1548	28687	3, 8, 4	25	103	—	1565	28933	3, 305000	163	251	1597	—	29207	3, 2040003	104	369

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	Exponenten	\bar{N}	N
—	1577	29209	3, 204, 3, 20	255	359	1611	—	29453	3, 2, 2, 4, 200	242	409	1625	—	29759
—	1578	29221	3, 203, 2000	309	487	—	1589	29473	3, 2, 2, 2040	273	331	—	1600	29761
1598	—	29231	3, 203, 004	84	393	1612	—	29483	3, 2, 2, 2, 200002	256	669	1626	—	29789
1599	—	29243	3, 203, 302	158	437	1613	—	29501	3, 2, 2, 4, 000	222	403	—	1601	29803
—	1579	29251	3, 20204, 2	175	387	—	1590	29527	3, 2, 2, 200000	171	619	1627	—	29819
—	1580	29259	3, 2020000000	431	697	1614	—	29531	3, 2, 2, 2000222	236	643	—	1602	29833
—	1581	29287	3, 202, 2, 2, 3	155	539	1615	—	29537	3, 2, 202, 40	284	349	1628	—	29837
1600	—	29297	3, 202, 3, 30	300	391	1616	—	29567	3, 2, 207	24	185	—	1603	29851
1601	—	29303	3, 202, 303	118	445	—	1591	29569	3, 2, 3, 60	151	175	—	1604	29863
—	1582	29311	3, 202, 7	27	199	1617	—	29573	3, 2, 3, 4000	230	357	1629	—	29867
1602	—	29327	3, 20003, 4	98	419	—	1592	29581	3, 2, 3, 3, 200	261	443	1630	—	29873
1603	—	29333	3, 2000200000	436	703	—	1593	29587	3, 2, 3, 202, 2	213	505	1631	—	29879
1604	—	29339	3, 20002, 202	240	649	—	1594	29599	3, 2, 3, 2, 5	55	299	—	1605	29881
—	1583	29347	3, 2000003, 2	257	585	—	1595	29611	3, 2, 3, 3000000	227	595	—	1606	29897
1605	—	29363	3, 200002, 2, 2	274	663	—	1596	29629	3, 2, 3, 2000	179	327	1632	—	29921
—	1584	29383	3, 2002, 3, 3	149	491	1618	—	29633	3, 2, 4, 50	162	193	1633	—	29927
1606	—	29387	3, 2002, 2002	254	657	—	1597	29641	3, 2, 4, 2020	269	369	—	1607	29947
—	1585	29389	3, 2002, 2, 200	359	613	1619	—	29663	3, 2, 4, 05	38	221	—	1608	29959
1607	—	29399	3, 20020003	166	603	1620	—	29669	3, 2, 5, 2000	204	325	—	1609	29983
—	1586	29401	3, 200202, 20	393	559	—	1598	29671	3, 2, 5, 2, 3	83	287	—	1610	29989
1608	—	29411	3, 2003, 3, 2	200	461	—	1599	29683	3, 2, 6, 2, 2	97	239	1634	—	30011
1609	—	29423	3, 200304	78	373	1621	—	29717	3, 005, 00000	216	347	—	1611	30013
1610	—	29429	3, 20040000	268	441	1622	—	29733	3, 005, 202	124	333	—	—	30029
—	1587	29437	3, 200600	129	241	1623	—	29741	3, 004, 002000	252	433	—	—	30047
—	1588	29443	3, 2, 2, 6, 2	109	235	1624	—	29753	3, 004, 3, 20	238	341	—	—	30059

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1638	—	30071	30000303	134	507	—	1627	30307	302, 2, 2, 3, 2	215	493
1639	—	30089	30002, 3020	352	479	—	1628	30313	302, 2, 20020	393	545
—	1612	30091	30002, 3002	225	577	—	1629	30319	302, 2, 204	89	419
—	1613	30097	30002, 2030	363	461	1648	—	30323	302, 2, 3, 2, 2	204	497
—	1614	30103	30002, 2003	167	599	1649	—	30341	302004000	264	409
—	1615	30109	30002, 2, 300	305	541	1650	—	30347	302003002	212	543
1640	—	30113	300020040	316	385	—	1630	30367	302002, 5	67	361
1641	—	30119	30002002, 3	178	603	1651	—	30389	30200020000	406	663
—	1616	30133	30002020000	407	665	—	1631	30391	302000203	149	555
1642	—	30137	3000203, 20	338	487	—	1632	30403	30202, 4, 2	179	399
—	1617	30139	300020302	189	527	—	1633	30427	302020202	209	571
1643	—	30161	300030030	324	415	1652	—	30431	3020205	56	321
—	1618	30169	3000302, 20	335	477	1653	—	30449	30204, 30	228	299
—	1619	30181	30004, 2000	277	441	1654	—	30467	303, 6, 2	94	203
—	1620	30187	300040002	175	463	—	1634	30469	303, 5000	173	267
1644	—	30197	300050000	208	343	1655	—	30491	303, 3, 202	162	437
1645	—	30203	3000602	84	241	—	1635	30493	303, 3, 300	211	373
—	1621	30211	302, 7, 2	81	173	1656	—	30497	303, 2040	230	279
—	1622	30223	302, 5, 4	59	247	1657	—	30509	303, 200200	298	513
—	1623	30241	302, 3040	229	277	—	1636	30517	303, 2, 20000	317	517
—	1624	30253	302, 300200	303	521	—	1637	30529	3030050	189	223
—	1625	30259	302, 3, 2, 2	207	499	1658	—	30539	303002002	208	537
1646	—	30269	302, 3, 400	196	355	—	1638	30553	3030002, 20	333	473
—	1626	30271	302, 3, 6	37	233	1659	—	30557	303000300	246	439
1647	—	30293	302, 20000000	426	689	—	1639	30559	3030005	53	299

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1670	—	30851	4, 305, 2	98	213	1683	—	31121	4, 2, 2, 2030	278	353	—	1679	31321	4002002, 20	339	481
—	1655	30853	4, 304000	179	277	—	1667	31123	4, 2, 2, 202, 2	203	481	—	1680	31327	4002005	55	307
—	1656	30859	4, 303002	145	371	1684	—	31139	4, 2, 2003, 2	190	433	—	1681	31333	4002, 2, 2000	321	509
1671	—	30869	4, 3020000	286	461	—	1668	31147	4, 2, 200002	221	579	1696	—	31337	4002, 20020	344	477
—	1657	30871	4, 302003	111	397	1685	—	31151	4, 2, 20004	84	389	—	1682	31357	4002, 500	147	271
1672	—	30881	4, 30004	218	265	—	1669	31153	4, 2, 202, 30	283	367	1697	—	31379	40000202, 2	226	535
1673	—	30893	4, 3000200	278	479	—	1670	31159	4, 2, 20203	115	429	—	1683	31387	400002, 202	203	549
1674	—	30911	4, 3006	30	197	—	1671	31177	4, 2, 3, 2020	275	377	1698	—	31391	400002, 5	60	323
—	1658	30931	4, 3, 2002, 2	189	451	1686	—	31181	4, 2, 3, 2, 200	244	417	—	1684	31393	400000040	277	337
—	1659	30937	4, 3, 202, 20	275	391	—	1672	31183	4, 2, 3, 2, 4	71	315	1699	—	31397	400000020000	374	591
1675	—	30941	4, 3, 20300	202	361	—	1673	31189	4, 2, 30000000	293	475	1700	—	31469	400030200	246	427
—	1660	30949	4, 3, 3, 2000	241	383	1687	—	31193	4, 2, 302, 20	262	373	—	1685	31477	4000400000	223	367
1676	—	30971	4, 3, 502	82	233	—	1674	31219	4, 2, 5, 2, 2	107	263	1701	—	31481	400005, 20	172	251
1677	—	30977	4, 2070	100	113	1688	—	31223	4, 2, 503	58	223	—	1686	31489	402, 70	103	117
1678	—	30983	4, 205, 3	74	235	—	1675	31231	4, 2, 9	9	85	1702	—	31511	402, 3003	108	385
1679	—	31013	4, 20202000	310	489	—	1676	31237	4006000	127	195	—	1687	31513	402, 3, 2, 20	263	371
1680	—	31019	4, 20200002	214	559	1689	—	31247	4005, 4	50	209	1703	—	31517	402, 3, 300	202	357
—	1661	31033	4, 202, 3, 20	271	380	—	1677	31249	4004030	191	241	—	1688	31531	402, 200002	207	541
—	1662	31039	4, 202, 6	35	223	1690	—	31253	40040000	232	373	1704	—	31541	402, 2, 20000	306	499
—	1663	31051	4, 200002002	219	565	1691	—	31259	4004, 202	132	355	—	1689	31543	402, 2, 203	113	419
—	1664	31063	4, 2000003	149	539	—	1678	31267	400303, 2	155	351	1705	—	31547	402, 2, 302	146	405
—	1665	31069	4, 20000300	263	469	1692	—	31271	400302, 3	114	383	—	1690	31567	402002, 4	85	373
1681	—	31079	4, 2002, 2, 3	136	405	1693	—	31277	400300200	260	447	—	1691	31573	402000000000	359	581
—	1666	31081	4, 2002020	351	487	1694	—	31307	400202002	206	531	1706	—	31583	4020005	52	293
1682	—	31091	4, 2003, 2, 2	180	439	1695	—	31319	4002000003	142	513	1707	—	31601	40203, 30	232	303

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1708	—	31607	4020303	90	341	—	1703	31891	5, 20202, 2	161	381	—	1714	32173	502000200	229	395
—	1692	31627	403, 3002	143	367	1722	—	31907	5, 20003, 2	156	355	1736	—	32183	5020203	86	321
1709	—	31643	403, 2, 202	148	401	—	1704	31957	5, 2, 2000000	271	439	1737	—	32189	5020400	132	241
1710	—	31649	4030040	196	439	—	1705	31963	5, 2, 20202	141	385	—	1715	322191	50206	23	155
—	1693	31657	403000020	287	397	1723	—	31973	5, 2, 3, 2000	212	337	—	1716	32203	503, 2002	127	329
—	1694	31663	4030004	67	311	—	1706	31981	5, 2, 30200	185	321	1738	—	32213	503000000	214	347
1711	—	31667	40302, 2, 2	158	383	1724	—	31991	5, 2, 403	60	229	—	1717	32233	5040020	163	227
—	1695	31687	404, 3, 3	77	255	1725	—	32003	5006, 2	72	155	1739	—	32237	5040200	134	233
—	1696	31699	404002, 2	135	323	1726	—	32009	5004020	172	233	—	1718	32251	50602	47	135
1712	—	31721	4050020	160	223	1727	—	32027	5003, 202	128	345	—	1719	32257	6, 80	49	55
—	1697	31723	4050002	97	257	—	1707	32029	5003, 300	167	295	1740	—	32261	6, 6000	80	123
1713	—	31727	40504	34	165	1728	—	32051	5002, 2, 2, 2	212	391	1741	—	32297	6, 300020	182	251
—	1698	31729	406, 30	107	141	1729	—	32057	5002, 3, 20	218	313	—	1720	32299	6, 300002	113	295
—	1699	31741	40800	49	93	—	1708	32059	5002, 302	123	341	1742	—	32303	6, 30004	44	201
1714	—	31751	5, 7, 3	36	113	1730	—	32063	5002, 6	28	179	1743	—	32309	6, 3, 20000	170	277
1715	—	31769	5, 5, 2, 20	140	197	1731	—	32069	500003000	230	359	1744	—	32321	6, 2050	108	127
—	1700	31771	5, 5, 202	83	223	—	1709	32077	500002, 200	247	421	—	1721	32323	6, 204, 2	89	197
1716	—	31793	5, 4, 2, 30	162	209	—	1710	32083	50000002, 2	191	455	1745	—	32327	6, 203, 3	70	229
1717	—	31799	5, 4, 203	68	251	—	1711	32089	50000002, 20	281	399	—	1722	32341	6, 20000000	217	351
1718	—	31817	5, 302020	216	295	1732	—	32099	50002, 3, 2	152	349	—	1723	32353	6, 2, 2, 40	141	173
1719	—	31847	5, 3, 2, 2, 3	90	307	1733	—	32117	500030000	220	361	—	1724	32359	6, 2, 2, 2, 3	77	263
—	1701	31849	5, 3, 20020	233	323	—	1712	32119	5000303	79	299	1746	—	32363	6, 2, 2, 0002	122	321
1720	—	31859	5, 3, 3, 2, 2	122	297	1734	—	32141	502, 3, 200	188	310	1747	—	32369	6, 2, 3, 30	148	193
—	1702	31873	5, 2060	107	123	—	1713	32143	502, 3, 4	57	245	—	1725	32371	6, 2, 3, 2, 2	103	251
1721	—	31883	5, 203002	134	343	1735	—	32159	502, 2, 5	40	217	—	1726	32377	6, 2, 4, 20	129	187

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1748	—	32381	6, 2, 500	84	155	—	1739	32611	702, 3, 2	77	177	1772	—	32909	0703, 200	114	193
—	1727	32401	6002030	171	217	1761	—	32621	7020200	116	201	—	1753	32911	0703, 4	35	149
1749	—	32411	6002, 202	112	303	1762	—	32633	704, 20	86	125	—	1754	32917	070200000	157	253
—	1728	32413	6002, 300	145	257	—	1740	32647	8, 4, 3	33	107	1773	—	32933	070020000	164	259
1750	—	32423	600002, 3	86	291	—	1741	32653	8, 3, 200	83	141	1774	—	32939	070000002	112	293
1751	—	32429	600000200	192	331	1763	—	32687	80004	26	121	—	1755	32941	070000200	155	267
1752	—	32441	60003, 20	166	239	1764	—	32693	8020000	96	157	1775	—	32957	0700400	94	171
—	1729	32443	6000302	93	259	—	1742	32707	9, 4, 2	37	83	1776	—	32959	07, 2, 2020	160	219
—	1730	32467	600002, 2	121	289	—	1743	32713	9, 2020	75	103	—	1756	32971	07, 2, 2002	101	261
—	1731	32479	60205	27	155	1765	—	32717	9, 2, 200	66	113	—	1757	32983	07, 20003	67	243
—	1732	32491	6030002	95	251	—	1744	32719	9, 2, 4	19	85	1777	—	32987	07, 20202	92	251
—	1733	32497	604, 30	109	143	—	1745	32749	100200	43	75	1778	—	32993	07, 3, 40	108	133
—	1734	32503	60403	41	157	1766	—	32771	013, 2	14	20	1779	—	32999	07, 3, 2, 3	58	199
1753	—	32507	60502	48	137	—	1746	32779	011002	25	63	—	1758	33013	07, 40000	115	189
1754	—	32531	7, 302, 2	80	189	1767	—	32783	011, 4	12	49	1780	—	33023	07, 8	8	65
—	1735	32533	7, 300000	131	211	1768	—	32789	01000000	58	93	1781	—	33029	0650000	102	157
1755	—	32537	7, 3, 2, 20	124	175	—	1747	32797	010, 300	45	79	—	1759	33037	0604, 200	125	211
1756	—	32561	7, 2, 2, 30	126	163	1769	—	32801	09040	54	65	—	1760	33049	0603, 2, 20	171	241
—	1736	32563	7, 2, 2, 2, 2	89	215	—	1748	32803	0903, 2	43	97	1782	—	33053	0603, 300	132	233
—	1737	32569	7, 2, 3, 20	119	171	1770	—	32831	09, 6	10	61	1783	—	33071	0602004	54	247
1757	—	32573	7, 2, 400	82	149	—	1749	32833	08050	59	69	—	1761	33073	0602, 2, 30	185	239
1758	—	32579	7004, 2	68	151	—	1750	32839	0803, 3	39	127	1784	—	33083	0602, 302	100	277
—	1738	32587	7002002	91	235	1771	—	32843	0802002	68	175	—	1762	33091	060004, 2	107	237
1759	—	32603	7000202	84	229	—	1751	32869	08, 2, 2000	113	170	1785	—	33107	06000002, 2	160	381
1760	—	32609	702, 40	100	123	—	1752	32887	08, 303	37	139	1786	—	33113	0600002, 20	236	335

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1787	—	33119	0600005	38	213	—	1774	33391	0502, 204	67	315	1812	—	33617	05, 2000030	300	383
1788	—	33149	0600500	98	181	—	1775	33403	0502, 402	107	301	—	1788	33619	05, 200002, 2	217	517
—	1763	33151	06007	15	113	—	1776	33409	0500060	133	153	1813	—	33623	05, 2000003	134	485
1789	—	33161	06, 2, 3020	186	253	1801	—	33413	050004000	206	319	1814	—	33629	05, 2000300	236	421
1790	—	33179	06, 2, 2, 202	126	341	—	1777	33427	050000202, 2	199	471	—	1789	33637	05, 202, 2000	293	465
—	1764	33181	06, 2, 2, 300	163	289	—	1778	33457	0500002, 30	291	377	1815	—	33641	05, 2020020	312	433
1791	—	33191	06, 2002, 3	96	325	1802	—	33461	05000020000	324	529	1816	—	33647	05, 20204	70	331
—	1765	33199	06, 20004	59	273	—	1779	33469	050000400	185	337	—	1790	33679	05, 3, 3, 4	63	271
1792	—	33203	06, 202, 2, 2	140	339	1803	—	33479	05002, 3, 3	112	369	—	1791	33703	05, 3002, 3	113	383
—	1766	33211	06, 20302	103	287	—	1780	33487	05002, 2, 4	79	349	1817	—	33713	05, 302, 30	232	301
—	1767	33223	06, 3, 3, 3	73	241	—	1781	33493	05002000000	329	533	—	1792	33721	05, 303, 20	213	307
1793	—	33247	06, 305	29	107	1804	—	33503	0500205	46	263	—	1793	33739	05, 4, 2002	137	355
—	33287	0506, 3	48	151	1805	—	33521	05004, 30	190	249	1818	—	33749	05, 4000000	230	373	
1769	—	33289	0505020	137	185	—	1782	33529	05005, 20	157	229	—	1794	33751	05, 40003	87	317
—	1770	33301	050400000	191	307	1806	—	33533	0500600	98	183	—	1795	33757	05, 40300	149	267
1794	—	33311	0504, 5	34	177	—	1783	33547	05, 2, 4002	129	329	1819	—	33767	05, 5, 2, 3	68	235
1795	—	33317	050302000	224	353	1807	—	33563	05, 2, 3, 202	148	399	—	1796	33769	05, 50020	173	241
1796	—	33329	0503, 2, 30	210	271	1808	—	33569	05, 2, 2040	212	257	1820	—	33773	05, 50200	142	247
—	1771	33331	0503, 2, 2, 2	149	359	—	1784	33577	05, 2, 200020	321	443	1821	—	33791	05, 10	6	61
—	1772	33343	0503, 6	27	109	1809	—	33581	05, 2, 200200	276	475	1822	—	33797	0407000	100	153
1797	—	33347	050204, 2	128	283	1810	—	33587	05, 2, 2, 2, 2	186	449	1823	—	33809	0405030	158	199
—	1773	33349	050203000	229	357	—	1785	33589	05, 2, 2, 20000	295	481	—	1797	33811	040502, 2	117	275
1798	—	33353	05020200	276	377	1811	—	33599	05, 2, 2, 6	32	205	1824	—	33827	040403, 2	134	303
1799	—	33359	050202, 4	74	323	—	1786	33601	05, 20050	179	211	—	1798	33829	040402000	233	367
1800	—	33377	0502, 2, 40	208	255	—	1787	33613	05, 2002, 200	281	479	1825	—	33851	0404, 302	122	337

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1826	—	33857	0403050	168	197	—	1813	34159	040000004	101	477	1848	—	34403	04, 2, 2, 2, 3, 2	222	509
1827	—	33863	040303, 3	110	359	—	1814	34171	040000402	157	443	1849	—	34421	04, 2, 2, 30000	330	541
—	1790	33871	040302, 4	81	353	—	1815	34183	04002, 4, 3	123	397	—	1847	34420	04, 2, 2, 500	173	319
—	1800	33889	0403, 2, 40	231	283	1837	—	34211	04000003, 2	240	547	1850	—	34439	04, 2004, 3	144	399
1828	—	33893	0403, 2, 2000	306	485	—	1816	34213	040000002000	413	653	1851	—	34457	04, 2002, 2, 20	404	571
1829	—	33911	0403, 303	98	369	1838	—	34217	040000000020	452	625	1852	—	34469	04, 2000002000	436	689
1830	—	33923	040205, 2	132	287	—	1817	34231	0400002003	145	541	—	1828	34471	04, 200002, 3	183	619
—	1801	33931	040203002	195	499	1839	—	34253	04003, 2, 200	306	523	—	1829	34483	04, 20002, 2, 2	269	651
—	1802	33937	040202030	321	407	1840	—	34259	04003002, 2	228	545	1853	—	34487	04, 2000203	156	581
1831	—	33941	04020200000	384	619	—	1818	34261	04003000000	367	595	1854	—	34499	04, 202, 4, 2	188	419
—	1803	33951	040200000020	435	601	—	1819	34267	040030202	189	517	—	1830	34501	04, 202, 3000	333	521
1804	33957	040200004	103	475	—	1820	34273	04004, 40	—	211	261	1855	—	34511	04, 202, 2, 4	102	451
1805	33997	0402, 2, 2, 200	331	565	1841	—	34283	040040002	—	172	455	—	1831	34513	04, 2020030	365	467
1832	—	34019	0402, 3, 3, 2	188	433	—	1821	34297	04006, 20	155	227	—	1832	34519	04, 2020003	161	585
1833	—	34031	0402, 304	74	353	1842	—	34301	0400700	94	177	—	1833	34537	04, 2030020	343	477
—	1806	34033	0402, 4, 30	239	313	—	1822	34303	04009	11	105	—	1834	34543	04, 20304	75	359
1807	34039	0402, 403	91	347	1843	—	34313	04, 2, 5020	—	202	273	—	1835	34549	04, 2040000	257	423
—	1808	34057	040004020	271	367	1844	—	34319	04, 2, 5, 4	60	251	1856	—	34583	04, 3, 3003	122	435
1834	—	34061	040004, 200	254	429	—	1823	34327	04, 2, 4003	109	387	1857	—	34589	04, 3, 3, 000	228	403
—	1809	34123	04000002002	281	725	1845	—	34337	04, 2, 3040	234	283	—	1836	34591	04, 3, 3, 5	53	281
1835	—	34137	04000002, 4	118	517	—	1824	34351	04, 2, 3004	87	397	—	1837	34603	04, 3, 200002	233	609
1810	34139	0400000030	427	545	1846	—	34361	04, 2, 3, 3, 20	—	288	413	1858	—	34607	04, 3, 2004	90	413
—	1811	34141	04000000300	337	601	1847	—	34367	04, 2, 3, 6	38	239	1859	—	34613	04, 3, 2, 20000	344	561
1812	34147	0400002, 3, 2	247	567	—	1825	34369	04, 2, 2050	—	217	255	1860	—	34631	04, 3003, 3	132	433
1836	—	34157	04000020200	376	651	—	1826	34381	04, 2, 202, 200	347	591	1861	—	34649	04, 30002, 20	364	517

z	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	1838	34651	04, 3000202	211	575	1876	—	34913	0304, 2, 40	236	289	1891	—	35171	0302002, 3, 2	288	661
1862	—	34667	04, 3020002	216	569	1877	—	34919	0304, 2, 2, 3	130	443	1892	—	35201	0302, 2, 60	212	245
1863	—	34673	04, 303, 30	258	337	1878	—	34939	0304, 402	125	351	—	1859	35201	0302, 2, 200000	499	805
1864	—	34679	04, 30303	100	379	1879	—	34949	03040000	254	393	—	1860	35227	0302, 2, 2, 202	273	739
—	1839	34687	04, 307	21	163	1879	—	34961	030302030	340	431	—	1861	35251	0302, 202, 2, 2	301	729
—	1840	34693	04, 4, 4000	199	309	—	1850	34963	03030202, 2	249	589	—	1862	35257	0302, 203, 20	395	569
1865	—	34703	04, 4, 3, 4	68	293	—	1851	34981	0303000000	421	665	1893	—	35267	0302, 3, 4, 2	202	451
1866	—	34721	04, 40040	214	261	—	1852	35023	0303, 2, 2, 4	105	463	1894	—	35279	0302, 3, 2, 4	108	479
—	1841	34729	04, 4000020	313	433	1880	—	35027	0303, 2002, 2	272	649	—	1863	35281	0302, 30030	385	493
1867	—	34739	04, 402, 2, 2	172	417	1881	—	35051	0303, 30002	224	591	1895	—	35291	0302, 30202	230	629
—	1842	34747	04, 40302	125	349	—	1853	35053	0303, 30200	305	529	—	1864	35311	0302, 404	75	361
1868	—	34757	04, 5, 3000	192	301	—	1854	35059	0303, 4, 2, 2	181	443	—	1865	35317	0302, 50000	253	417
—	1843	34759	04, 5, 3, 3	83	275	1882	—	35069	0303, 600	138	257	—	1866	35323	0302, 602	103	295
1869	—	34763	04, 5, 2002	140	363	1883	—	35081	030204020	308	417	1896	—	35327	0302, 9	14	131
1870	—	34781	04, 50300	150	269	—	1855	35083	030204002	199	507	1897	—	35339	030005002	172	437
—	1844	34807	04, 703	41	159	—	1856	35089	030203030	341	431	—	1867	35353	030004, 2, 20	353	497
—	1845	34819	0309, 2	49	103	1884	—	35099	030203, 202	232	625	1898	—	35363	03000303, 2	246	557
1871	—	34841	0306, 2, 20	180	253	—	1857	35107	03020203, 2	265	601	1899	—	35381	030003, 20000	450	733
—	1846	34843	0306, 202	107	287	1885	—	35111	03020202, 3	194	653	1900	—	35393	030002050	292	343
1872	—	34847	0306, 5	34	175	1886	—	35117	0302020200	440	757	—	1868	35401	03000202020	519	709
—	1847	34849	0305040	165	199	1887	—	35129	030202, 3, 20	402	577	—	1869	35407	03000202, 4	139	607
1873	—	34871	0305, 203	92	339	1888	—	35141	03020003000	430	671	—	1870	35419	03000200202	315	857
1874	—	34877	0305, 400	150	271	—	1858	35149	03020002, 200	463	789	1901	—	35423	030002005	88	491
1875	—	34883	030404, 2	140	309	1889	—	35153	0302000030	496	633	—	1871	35437	030002, 20200	463	801
—	1848	34897	030400030	299	381	1890	—	35159	03020000003	221	803	1902	—	35447	030002, 303	162	611

z'	z''	Z	Exponenten	N	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	N
—	1872 35449	33002, 4, 20	361 523	1915	—	35771	33003 3032	196 547	—	36011	3, 2, 20000002	358 937	—	36011	3, 2, 20000002	358 937	—
—	1873 35461	3300004000	379 587	—	1885	35797	33004000000	373 605	—	1898 36013	3, 2, 20000200	495 853	—	1898 36013	3, 2, 20000200	495 853	—
—	1874 35491	330000003, 2	351 799	1916	—	35801	3300402, 20	332 473	—	36017	3, 2, 2002, 30	464 601	—	36017	3, 2, 2002, 30	464 601	—
1903	—	35507	3300002, 2, 2	374 905	—	1886	35803	330040202	191 543	—	1899 36037	3, 2, 2, 2, 3000	415 649	—	1899 36037	3, 2, 2, 2, 3000	415 649
—	1875 35509	33000000000	591 965	—	1887	35809	33005, 40	209 559	—	1900 36061	3, 2, 2, 20300	353 631	—	1900 36061	3, 2, 2, 20300	353 631	—
—	1876 35521	3300002, 50	323 383	1917	—	35831	3300603	68 263	—	1901 36067	3, 2, 2, 3, 3, 2	247 569	—	1901 36067	3, 2, 2, 3, 3, 2	247 569	—
—	1877 35527	3300002, 3, 3	203 669	1918	—	35837	3300800	86 163	—	1902 36073	3, 2, 2, 30020	441 613	—	1902 36073	3, 2, 2, 30020	441 613	—
1904	—	35531	3300002, 2002	346 895	—	1888	35839	330010	9 95	1929	—	36083	3, 2, 2, 4, 2	—	36083	3, 2, 2, 4, 2	216 529
—	1878 35533	3300002, 2, 200	489 835	—	1889	35851	33, 2, 6002	125 317	—	1903 36097	3, 20070	167 189	—	1903 36097	3, 20070	167 189	—
1905	—	35537	33000020030	512 655	—	1890	35863	3, 2, 5003	107 379	1930	—	36107	3, 2004002	—	36107	3, 2004002	224 571
1906	—	35543	33000020003	226 821	—	1891	35869	3, 2, 5, 300	205 361	—	1904 36109	3, 2004, 200	325 549	—	1904 36109	3, 2004, 200	325 549
—	1879 35559	3300004, 30	341 447	1919	—	35879	3, 2, 402, 3	138 403	—	36131	3, 200203, 2	294 667	—	36131	3, 200203, 2	294 667	—
1907	—	35573	33000040000	364 599	1920	—	35897	3, 2, 4, 3, 20	208 427	1932	—	36137	3, 200200020	—	36137	3, 200200020	566 781
1908	—	35591	33002, 5, 3	124 395	—	1892	35899	3, 2, 4, 302	169 467	—	1905 36151	3, 2002, 203	193 715	—	1905 36151	3, 2002, 203	193 715
—	1880 35593	33002, 4020	349 473	—	1893	35911	3, 2, 303, 3	151 493	1933	—	36161	3, 2000050	320 377	—	36161	3, 2000050	320 377
1909	—	35597	33002, 4, 200	326 551	—	1894	35923	3, 2, 30002, 2	293 697	—	1906 36187	3, 200000202	333 907	—	1906 36187	3, 200000202	333 907
1910	—	35603	33002, 302, 2	280 661	1921	—	25933	3, 2, 300300	324 577	1934	—	36191	3, 2000005	—	36191	3, 2000005	92 517
—	1881 35617	33002, 2040	367 445	1922	—	35951	3, 2, 3, 204	102 479	1935	—	36209	3, 20003, 30	416 543	—	36209	3, 20003, 30	416 543
—	1882 35671	33002000003	229 829	1923	—	35963	3, 2, 3, 402	164 461	—	1907 36217	3, 20004, 20	359 521	—	1907 36217	3, 20004, 20	359 521	—
—	1883 35677	330020000300	403 719	1924	—	35969	3, 2, 2060	208 239	—	1908 36229	3, 202, 4000	341 529	—	1908 36229	3, 202, 4000	341 529	—
1911	—	35729	33003, 2030	388 493	—	1895	35977	3, 2, 203020	407 553	—	1909 36241	3, 202, 2030	437 555	—	1909 36241	3, 202, 2030	437 555
—	1884 35731	33003, 202, 2	283 671	—	1896	35983	3, 2, 203, 4	115 491	1936	—	36251	3, 202, 2, 202	284 769	—	36251	3, 202, 2, 202	284 769
1912	—	35747	33003003, 2	260 593	1925	—	35993	3, 2, 202, 2, 20	482 681	1937	—	36263	3, 202002, 3	—	36263	3, 202002, 3	214 725
1913	—	35753	33003000020	488 675	1926	—	35999	3, 2, 202, 5	84 451	1938	—	36269	3, 202000000	—	36269	3, 202000000	476 821
1914	—	35759	330030004	114 529	—	1897	36007	3, 2, 20002, 3	221 747	—	1910 36277	3, 202000000	489 799	—	1910 36277	3, 202000000	489 799

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1939	—	36293	03, 203, 3000	362	567	—	1924	36559	03, 302, 2, 4	111	491	—	1936	36787	03, 502, 2, 2	167	405
1940	—	36299	03, 203, 2002	266	689	1951	—	36563	03, 302002, 2	286	683	1964	—	36791	03, 50203	96	359
—	1911	36307	03, 203002, 2	279	667	—	1925	36571	03, 3020202	239	653	—	1937	36793	03, 503, 20	217	313
—	1912	36313	03, 20302, 20	401	571	—	1926	36583	03, 303, 2, 3	145	499	1965	—	36809	03, 6, 2020	212	291
—	1913	36319	03, 20305	61	353	1952	—	36587	03, 3030002	226	597	1966	—	36821	03, 6000000	220	357
1941	—	36341	03, 2050000	248	409	1953	—	36599	03, 30403	98	375	1967	—	36833	03, 7, 40	120	149
—	1914	36343	03, 20503	87	335	—	1927	36607	03, 308	17	149	—	1938	36847	03, 704	33	161
1942	—	36353	03, 3, 80	108	121	1954	—	36629	03, 4, 300000	326	525	1968	—	36857	03, 9, 20	78	115
—	1915	36373	03, 3, 400000	319	513	—	1928	36637	03, 4, 3, 300	237	419	—	1939	36871	0209, 3	39	121
1943	—	36383	03, 3, 4, 5	56	293	—	1929	36643	03, 4, 203, 2	203	461	—	1940	36877	0208, 200	109	183
1944	—	36389	03, 3, 302000	366	577	1955	—	36653	03, 4, 200200	334	575	1969	—	36887	0207003	66	233
—	1916	36433	03, 3, 200030	421	537	1956	—	36671	03, 4, 2, 6	38	245	1970	—	36899	020603, 2	120	271
—	1917	36451	03, 3, 2, 2, 3, 2	249	571	1957	—	36677	03, 4003000	308	481	—	1941	36901	020602000	209	329
—	1918	36457	03, 3, 2, 20020	455	631	1958	—	36683	03, 4002002	232	599	—	1942	36913	0206, 2, 30	201	259
1945	—	36467	03, 3, 2, 3, 2, 2	236	575	—	1930	36691	03, 400002, 2	253	603	—	1943	36919	0206, 203	85	313
—	1919	36469	03, 3, 2, 30000	369	605	—	1931	36697	03, 40002, 20	371	527	1971	—	36923	0206, 302	112	309
1946	—	36473	03, 3, 2, 4, 20	296	429	—	1932	36709	03, 402, 2000	337	535	1972	—	36929	0205050	158	185
—	1917	36479	03, 3, 2, 7	30	223	1959	—	36713	03, 4020200	358	497	—	1944	36931	020504, 2	131	289
—	1920	36493	03, 3003, 200	351	595	—	1933	36721	03, 403, 30	261	341	—	1945	36943	020502, 4	77	335
1948	—	36497	03, 3002030	398	505	—	1934	36739	03, 5, 5, 2	109	239	1973	—	36947	02050002, 2	204	485
—	1921	36523	03, 300000002	325	851	1960	—	36749	03, 5, 3, 300	222	377	—	1946	36973	0205, 20200	269	465
1949	—	36527	03, 30000004	124	573	1961	—	36761	03, 5, 2, 2, 20	272	385	—	1947	36979	0205, 3, 2, 2	159	411
—	1922	36529	03, 30002, 30	419	543	1962	—	36767	03, 5, 2, 5	46	251	—	1948	36997	020404000	245	379
—	1923	36541	03, 3000400	265	483	1963	—	36779	03, 5000002	188	493	—	1949	37003	020403002	199	509
1950	—	36551	03, 302, 3, 3	158	521	—	1935	36781	03, 5000200	259	447	1974	—	37013	02040200000	394	635

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
1975	—	37019	020402, 202	218 589	—	1987	—	37313	0203, 3, 50	260	309
—	1950	37021	020402, 300	283 501	—	1963	37321	0203, 3, 2020	0203, 3, 2020	437 599	551 793
—	1951	37039	020400004	107 493	1988	—	37337	0203, 302, 20	0203, 302, 20	418 505	67 443
1976	—	37049	0204003, 20	340 489	—	1964	37339	0203, 30202	0203, 30202	241 659	294 655
—	1952	37057	0204, 2, 50	229 271	—	1965	37357	0203, 40200	0203, 40200	301 523	521 815
1977	—	37061	0204, 2, 3000	332 519	1989	—	37361	0203, 5, 30	0203, 5, 30	252 331	387 1001
—	1953	37087	0204, 205	61 347	—	1966	37363	0203, 5, 2	0203, 5, 2	173 425	666 1079
1978	—	37097	0204, 30020	362 503	—	1967	37369	0203, 6, 20	0203, 6, 20	203 297	253 919
—	1954	37117	0204, 600	137 255	1990	—	37379	020207, 2	020207, 2	116 247	212 729
—	1955	37123	020306, 2	129 277	1991	—	37397	02020400000	02020400000	400 643	264 647
1979	—	37139	0203002, 2	254 599	1992	—	37409	020203040	020203040	340 411	193 219
—	1956	37159	02030202, 3	197 663	—	1968	37423	020203004	020203004	127 579	256 653
—	1957	37171	020302, 2, 2	303 731	—	1969	37441	020202050	020202050	321 377	434 549
1980	—	37181	020302, 400	284 515	—	1970	37447	02020203, 3	02020203, 3	209 683	497 701
—	1958	37189	02030003000	439 685	1993	—	37463	02020200003	02020200003	250 903	89 471
1981	—	37199	02030002, 4	140 613	—	1971	37483	020202, 20002	020202, 20002	373 981	278 771
—	1959	37201	02030000030	507 647	—	1972	37489	020202, 3, 30	020202, 3, 30	455 593	341 619
1982	—	37217	02030002, 40	382 469	1994	—	37493	020202, 30000	020202, 30000	496 813	289 641
1983	—	37223	0203002, 2, 3	208 711	—	1973	37501	020202, 500	020202, 500	261 481	689 1115
—	1960	37243	020300402	189 533	—	1974	37507	02020005, 2	02020005, 2	231 503	311 759
1984	—	37253	0203, 2, 4000	336 521	1995	—	37511	02020004, 3	02020004, 3	190 611	536 865
—	1961	37273	0203, 2, 2, 20	483 683	1996	—	37517	02020003, 200	02020003, 200	488 827	207 743
1985	—	37277	0203, 2, 2, 300	366 649	1997	—	37529	02020002, 2, 20	02020002, 2, 20	622 879	218 739
1986	—	37307	0203, 20302	230 641	—	1975	37537	02020000040	02020000040	499 607	314 761
—	1962	37309	0203, 20400	279 509	1998	—	37547	020200000002	020200000002	458 1199	495 809

z'	z''	z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	z	Exponenten	\bar{N}	N
2047	—	38603	22003, 202000	524 827	—	2040	38923	02, 2, 7002	111 281	2070	719
2048	—	38699	02003, 200002	360 941	2060	—	38933	02, 2, 500000	246 395	—	469
—	2028	38707	02003, 2, 2, 2, 2	335 809	—	2041	39053	02, 2, 600000	339 467	2071	883
2049	—	38711	02003, 2, 203	196 727	—	2042	38959	02, 2, 5004	83 377	—	681
—	2029	38713	02003, 2, 3, 20	449 645	—	2043	38971	02, 2, 5, 302	159 439	2072	787
2050	—	38723	02003004, 2	260 577	—	2044	38977	02, 2, 4050	221 259	—	633
2051	—	38729	02003002020	552 755	2061	—	38993	02, 2, 400030	390 497	2073	431
—	2030	38737	0200300030	527 673	—	2045	39019	02, 2, 4, 20002	269 707	2074	773
2052	—	38747	02003000202	324 883	2062	—	39023	02, 2, 4, 204	100 469	—	879
—	2031	38749	02003000300	413 737	2063	—	39041	02, 2, 3000	210 241	2075	1067
—	2032	38767	0200300204	121 573	—	2046	39043	02, 2, 305, 2	179 389	2076	499
2053	—	38783	0200307	32 249	2064	—	39047	02, 2, 304, 3	148 475	—	625
—	2033	38791	02004, 4, 3	135 437	—	2047	39079	02, 2, 3002, 3	227 767	—	659
—	2034	38803	02004, 202, 2	277 657	2065	—	39089	02, 2, 3002, 30	478 619	2077	997
—	2035	38821	02004002000	433 685	—	2048	39097	02, 2, 3003, 20	447 643	2078	915
—	2036	38833	0200402, 30	369 479	—	2049	39103	02, 2, 3006	55 361	2079	983
—	2037	38839	020040203	149 557	2066	—	39107	02, 2, 3, 2, 4, 2	244 543	—	727
—	2038	38851	02005, 4, 2	163 365	2067	—	39113	02, 2, 3, 2, 2020	512 701	2080	389
2054	—	38861	02005, 2, 200	294 503	2068	—	39119	02, 2, 2, 2, 4	134 591	—	631
2055	—	38867	02005002, 2	216 517	—	2050	39133	02, 2, 3, 20300	371 663	2081	839
—	2056	—	38873	0200502, 20	308 439	—	39139	02, 2, 3, 3, 3, 2	261 601	—	781
2057	—	38891	020060002	152 403	—	2052	39157	02, 2, 3, 40000	357 587	2082	757
2058	—	38903	0200703	60 233	2069	—	39161	02, 2, 3, 5, 20	278 405	—	651
—	2039	38917	02, 2, 8000	125 191	—	2053	39163	02, 2, 3, 502	151 429	—	385
2059	—	38921	02, 2, 7020	170 229	—	2054	39181	02, 2, 204, 200	363 613	2083	361

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2066	39439	02, 2005, 4	95	397	—	2078	39727	02, 202, 2004	155711	245639
2084	—	39443	02, 200402, 2	268	631	—	2079	39733	02, 202, 2, 20000	593067	96437
—	2067	39451	02, 2004, 202	251	675	2097	—	39749	02, 202003000	522815	374609
2085	—	39461	02, 200302000	512	807	2098	—	39761	02, 20200030	596761	443605
—	2068	39499	02, 200202002	393	1013	—	2080	39769	02, 2020002, 20	633899	500681
2086	—	39503	02, 200202, 4	166	725	2099	—	39779	02, 20202, 3, 2	340781	76423
2087	—	39509	02, 2002000000	708	1145	2100	—	39791	02, 2020204	138653	446707
—	2069	39511	02, 200200003	271	979	—	2081	39799	02, 2020303	175663	185631
2088	—	39521	02, 2002, 2, 40	464	569	2101	—	39821	02, 203, 3, 200	400679	33241
—	2070	39541	02, 2002, 30000	535	877	2102	—	39827	02, 203, 202, 2	326773	211755
2089	—	39551	02, 2002, 7	44	325	—	2082	39829	02, 203, 200000	531857	389689
2090	—	39563	02, 200003002	362	927	2103	—	39839	02, 203, 2, 5	84457	323735
2091	—	39569	02, 200002030	592	751	—	2083	39841	02, 2030040	383467	145669
2092	—	39581	02, 200002, 300	504	893	—	2084	39847	02, 203002, 3	215729	257715
—	2071	39607	02, 20000203	257	957	2104	—	39857	02, 20302, 30	440571	56369
—	2072	39619	02, 20002, 4, 2	311	693	2105	—	39863	02, 2030203	178665	303359
2093	—	39623	02, 20002, 3, 3	240	791	2106	—	39869	02, 2030400	272497	214777
—	2073	39631	02, 20002, 2, 4	169	747	—	2085	39877	02, 204, 3000	349547	507721
2094	—	39659	02, 200030002	348	919	—	2086	39883	02, 204, 2002	255661	260599
—	2074	39667	02, 20004, 2, 2	277	679	2107	—	39887	02, 204, 2, 4	104463	464645
2095	—	39671	02, 2000403	152	581	—	2087	39901	02, 2040300	275493	329431
—	2075	39679	02, 20008	27	233	2108	—	39929	02, 207, 20	164241	171319
—	2076	39703	02, 202, 3003	209	745	—	2088	39937	02, 3, 90	93103	174197
—	2077	39709	02, 202, 3, 300	391	691	2109	—	39953	02, 3, 5030	242305	479771
2096	—	39719	02, 202, 202, 3	246	829	2110	—	39971	02, 3, 403, 2	202457	223751

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2104	40337	02, 30000000	505	869	—	2116	40343	02, 4, 2005	71	397	2146	—	40841	02, 6, 3020	218	297
2121	—	40241	02, 3002, 2, 30	482	623	2134	—	40559	02, 4, 2, 204	100	471	2147	—	40847	02, 6, 3, 4	60	259
2122	—	40253	02, 3002, 400	318	577	2135	—	40377	02, 40060	190	219	—	2139	40849	02, 6, 2030	221	281
2123	—	40277	02, 3000000000	652	1055	2136	—	40583	02, 4004, 3	132	425	2148	—	40853	02, 6, 200000	262	423
2124	—	40283	02, 300000002	344	937	—	2117	40591	02, 4003, 4	103	441	—	2130	40867	02, 6003, 2	145	331
2125	—	40289	02, 30002, 40	416	511	—	2118	40597	02, 4002000000	457	737	—	2131	40879	02, 60004	63	293
2126	—	40343	02, 302, 2003	206	739	—	2119	40609	02, 4000040	341	415	2149	—	40883	02, 602, 2, 2	148	359
—	2105	40351	02, 302, 2, 5	85	461	—	2120	40627	02, 40002, 2, 2	283	685	—	2132	40897	02, 7, 50	113	135
—	2106	40357	02, 302002000	523	827	2137	—	40637	02, 4000400	254	463	—	2133	40903	02, 7, 3, 3	69	229
2127	—	40361	02, 302000020	572	791	—	2121	40639	02, 40006	45	299	—	2134	40927	02, 705	25	147
—	2107	40387	02, 303, 4, 2	209	467	—	2122	40693	02, 4040000	263	433	—	2135	40933	02, 8, 2000	131	209
—	2108	40423	02, 304, 2, 3	137	473	2138	—	40697	02, 403, 20	202	295	—	2136	40939	02, 80002	81	215
2128	—	40427	02, 3040002	212	561	—	2123	40699	02, 40502	109	311	2150	—	40949	02, 90000	90	149
—	2109	40429	02, 3040200	287	499	2139	—	40709	02, 5, 5000	182	281	2151	—	40961	000 12 0	38	41
2129	—	40433	02, 305, 30	238	313	2140	—	40739	02, 5, 203, 2	188	427	2152	—	40973	0009, 200	90	151
—	2110	40459	02, 4, 5002	149	379	2141	—	40751	02, 5, 2004	86	395	—	2137	40993	0007040	127	153
—	2111	40471	02, 4, 4003	153	437	—	2124	40759	02, 5, 2, 203	121	449	—	2138	41011	0007, 2, 2, 2	121	291
—	2112	40483	02, 4, 303, 2	207	469	2142	—	40763	02, 5, 2, 302	156	433	—	2139	41017	0007, 3, 20	107	239
2130	—	40487	02, 4, 302, 3	132	511	—	2125	40771	02, 5004, 2	159	353	—	2140	41023	0007, 6	23	141
2131	—	40493	02, 4, 300200	346	595	2143	—	40787	02, 500002, 2	232	553	2153	—	41039	000602, 4	66	287
2132	—	40499	02, 4, 3, 2, 2	236	569	—	2126	40801	02, 502, 40	235	289	—	2141	41047	000600003	109	393
—	2113	40507	02, 4, 3, 302	181	501	—	2127	40813	02, 502000	273	473	2154	—	41051	000600202	152	413
—	2114	40519	02, 4, 203, 3	155	507	—	2128	40819	02, 503, 2	165	403	2155	—	41057	0006, 2, 40	192	235
2133	—	40529	02, 4, 20030	410	523	2144	—	40823	02, 50303	92	349	—	2142	41077	0006, 30000	229	375
—	2115	40531	02, 4, 20002, 2	297	707	2145	—	40829	02, 50500	130	241	2156	—	41081	0006, 4, 20	186	269

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2143	41113	000502, 2, 20	325	459	—	2158	41341	000400500	203	375	2182	—	41609	00030003020	504	685
2157	—	41117	000502, 300	248	439	2167	—	41351	0004, 2, 4, 3	138	445	—	2168	41611	00030003002	323	827
—	2144	41131	00050000002	245	641	2168	—	41357	0004, 2, 3, 200	352	597	—	2169	41617	00030002030	529	671
2158	—	41141	00050020000	356	581	2169	—	41381	0004, 2002000	470	743	2183	—	41621	0003000200000	632	1019
—	2145	41143	000500203	131	487	2170	—	41387	0004, 2000002	318	833	2184	—	41627	00030002, 202	348	941
—	2146	41149	000500400	205	373	—	2159	41389	0004, 2000200	439	757	—	2170	41641	0003000000020	707	977
—	2147	41161	0005, 2, 2020	347	475	2171	—	41399	0004, 20203	166	619	—	2171	41647	00030000004	167	771
2159	—	41177	0005, 202, 20	344	489	2172	—	41411	0004, 3, 4, 2	194	433	2185	—	41651	000300002, 2, 2	398	963
—	2148	41179	0005, 20202	199	543	—	2160	41413	0004, 3, 3000	343	537	—	2172	41659	00030000302	295	821
2160	—	41183	0005, 205	54	307	—	2161	41443	0004, 4, 3, 2	191	441	2186	—	41669	00030002, 3000	498	779
—	2161	—	0005, 3, 2000	304	483	2173	—	41453	0004, 40200	278	483	2187	—	41681	000300020030	548	701
2162	—	41201	0005, 4, 30	230	301	—	2162	41467	0004, 602	101	289	2188	—	41687	000300020003	242	879
—	2149	41203	0005, 4, 2, 2	159	389	—	2163	41479	000306, 3	95	299	—	2173	41719	0003000403	139	531
2163	—	41213	0005, 600	122	227	—	2164	41491	00030402, 2	229	539	2189	—	41729	0003, 2, 70	186	211
—	2150	41221	000405000	215	331	2174	—	41507	00030303, 2	254	575	—	2174	41737	0003, 2, 4020	383	519
—	2151	41227	000404002	181	461	2175	—	41513	00030300020	494	681	2190	—	41759	0003, 2, 3, 5	86	455
2164	—	41231	000404, 4	82	345	2176	—	41519	000303004	120	547	—	2175	41761	0003, 2, 2040	405	491
—	2152	41233	000403030	311	393	—	2165	41521	000303, 2, 30	413	533	2191	—	41771	0003, 2, 200002	380	993
2165	—	41243	000403, 202	212	571	—	2166	41539	00030204, 2	251	555	2192	—	41777	0003, 2, 2, 30	502	649
—	2153	41257	00040200020	469	647	2177	—	41543	00030203, 3	198	647	2193	—	41801	0003, 202020	596	815
—	2154	41263	000402004	113	517	2178	—	41549	00030202, 200	488	831	—	2176	41809	0003, 2000030	571	729
—	2155	41269	000402, 20000	435	709	2179	—	41579	000302, 20002	354	931	2194	—	41813	0003, 200000000	668	1081
—	2156	41281	000400050	271	319	—	2167	41593	000302, 4, 20	379	549	2195	—	41843	0003, 203, 2, 2	302	737
—	2157	41299	0004000002, 2	333	793	2180	—	41597	000302, 500	248	457	2196	—	41849	0003, 204, 20	374	543
2166	—	41333	00040030000	392	643	2181	—	41603	00030005, 2	220	479	—	2177	41851	0003, 20402	205	579

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2178	41863	0003, 3, 4, 3	155 501	2208	—	42083	000203, 2, 3, 2	320 733	—	2202	42337	000200002, 40	561 689			
2197	—	41879	0003, 3, 2003	202 725	2209	—	42089	000203, 20020	588 815	—	2203	42349	000200002000	659 1141			
—	2179	41887	0003, 3, 2, 5	83 451	2210	—	42101	000203, 30000	484 793	2223	—	42359	000200000303	226 855			
—	2180	41893	0003, 3002000	509 805	2211	—	42131	0002020202, 2	418 989	—	2204	42373	0002002, 4000	479 743			
2198	—	41897	0003, 3000020	556 769	—	2192	42139	00020202, 202	377 1019	—	2205	42379	0002002, 3002	381 977			
2199	—	41903	0003, 30004	130 603	—	2193	42157	000202000000000	661 1139	—	2206	42391	0002002, 2003	283 1015			
—	2181	41911	0003, 30203	177 661	—	2194	42169	000202003, 20	579 833	—	2207	42397	0002002, 2, 300	517 917			
2200	—	41927	0003, 4, 3, 3	152 593	2212	—	42179	000202, 2, 4, 2	314 699	—	2208	42403	000202003, 2	419 955			
—	2182	41941	0003, 4000000	431 699	—	2195	42181	000202, 2, 3000	557 871	2224	—	42407	000202002, 3	302 1023			
—	2183	41947	0003, 40202	221 605	—	2196	42187	000202, 2, 2002	415 1073	—	2209	42409	00020200000000	789 1091			
—	2184	41953	0003, 5, 40	243 301	—	2197	42193	000202, 20030	617 789	—	2210	42433	0002003, 50	359 427			
2201	—	41957	0003, 5, 2000	312 497	2213	—	42197	000202, 20000000	718 1163	2225	—	42437	0002003, 3000	514 805			
—	2185	41959	0003, 5, 2, 3	127 439	2214	—	42209	000202, 3, 40	434 535	2226	—	42443	0002003, 2002	378 979			
2202	—	41969	0003, 6, 30	218 287	2215	—	42221	000202, 30200	494 857	—	2211	42451	0002003002, 2	397 949			
2203	—	41981	0003, 800	102 193	—	2198	42223	000202, 304	131 625	—	2212	42457	000200302, 20	571 813			
—	2186	41983	0003, 10	11 113	2216	—	42227	000202, 4, 2, 2	292 715	2227	—	42461	00020030300	416 745			
2204	—	41999	000206, 4	74 307	2217	—	42239	000202, 8	30 251	—	2213	42463	000200305	87 503			
—	2187	42013	000205, 300	263 463	2218	—	42257	00000003030	526 665	2228	—	42467	0002004, 3, 2	280 647			
2205	—	42017	000204040	304 367	2219	—	42281	00020000000000	782 1079	2229	—	42473	00020040000	492 685			
—	2188	42019	00020403, 2	241 545	—	2199	42283	00020000000002	485 1267	—	2214	42487	000200503	125 481			
2206	—	42023	00020402, 3	178 597	2220	—	42293	000200002, 20000	722 1177	2230	—	42491	000200602	144 413			
—	2189	42043	000204, 302	219 605	2221	—	42299	000200002, 302	346 959	—	2215	42499	0002, 2, 7, 2	141 301			
—	2190	42061	00020302, 200	487 829	—	2200	42307	000200004, 2	365 809	2231	—	42509	0002, 2, 5, 200	328 553			
2207	—	42071	0002030003	238 859	2222	—	42323	00020000000002, 2	542 1291	2232	—	42533	0002, 2, 302000	550 867			
—	2191	42073	000203002, 20	569 807	—	2201	42331	0002000000000202	463 1261	2233	—	42557	0002, 2, 3, 400	344 623			

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
2234	—	42569	0002, 2, 202020	658	899	2246	—	42797	0002, 3, 200200	542	933	—	2241	43063	00005, 203	143	527
—	2216	42571	0002, 2, 202002	417	1075	2247	—	42821	0002, 3003000	504	787	2259	—	43067	00005, 302	188	519
—	2217	42577	0002, 2, 200030	639	815	—	2229	42829	0002, 3002, 200	539	919	—	2242	43093	0000040000000000	545	881
—	2218	42589	0002, 2, 200300	509	907	2248	—	42839	0002, 3000003	256	927	2260	—	43103	000004005	82	455
2235	—	42611	0002, 2, 3, 2	360	877	—	2230	42841	0002, 30002, 20	609	865	—	2243	43117	000004, 20200	439	759
2236	—	42641	0002, 2002030	614	779	—	2231	42853	0002, 302, 2000	555	881	2261	—	43133	000004, 500	230	423
—	2219	42643	0002, 200202, 2	449	1063	—	2232	42859	0002, 3020002	361	951	2262	—	43151	00000303, 4	140	597
—	2220	42649	0002, 2002, 2, 20	687	971	2249	—	42863	0002, 30204	132	625	—	2244	43159	0000302003	243	869
—	2221	42667	0002, 20000002	503	1317	2250	—	42899	0002, 4, 202, 2	304	721	—	2245	43177	000030000020	713	985
2237	—	42677	0002, 200020000	722	1179	—	2233	42901	0002, 4, 200000	495	799	—	2246	43189	0000300200000	639	1043
2238	—	42683	0002, 2000302	338	941	2251	—	42923	0002, 40000002	320	839	—	2247	43201	000003, 2, 50	359	425
2239	—	42689	0002, 202, 50	392	465	2252	—	42929	0002, 402, 30	406	527	—	2248	43207	000003, 2, 3, 3	227	747
—	2222	42697	0002, 202, 2020	665	911	—	2234	42937	0002, 403, 20	371	535	2263	—	43223	000003, 20003	256	929
2240	—	42701	0002, 202, 2, 200	592	1011	—	2235	42943	0002, 406	43	293	—	2249	43237	000003, 3, 2000	533	847
—	2223	42703	0002, 202, 2, 4	173	765	2253	—	42953	0002, 5, 2020	368	505	—	2250	43261	000003, 600	211	393
—	2224	42709	0002, 202000000	719	1165	—	2236	42961	0002, 50030	333	427	2264	—	43271	00000205, 3	166	527
2241	—	42719	0002, 20205	100	573	—	2237	42967	0002, 50003	145	529	2265	—	43283	0000020302, 2	382	901
—	2225	42727	0002, 203, 2, 3	227	781	—	2238	42979	0002, 6, 3, 2	161	373	—	2251	43291	00000203, 202	353	951
2242	—	42737	0002, 204, 30	408	535	2254	—	42989	0002, 60200	228	397	2266	—	43313	00000202, 2, 30	640	827
2243	—	42743	0002, 20403	154	589	—	2239	43003	0002, 802	75	217	2267	—	43319	00000202, 203	266	985
—	2226	42751	0002, 208	27	235	2255	—	43013	000008000	146	223	—	2252	43321	00000202, 3, 20	611	877
2244	—	42757	0002, 3, 4	116	491	2256	—	43019	000007002	130	329	2268	—	43331	0000020004, 2	366	811
2245	—	42773	0002, 3, 30000	526	847	2257	—	43037	000006, 300	220	387	2269	—	43391	0000020007	50	379
—	2227	42787	0002, 3, 203, 2	329	747	2258	—	43049	0000050020	400	551	2270	—	43397	000002, 2, 4000	492	763
2246	—	42793	0002, 3, 200020	631	871	—	2240	43051	00000300002	249	649	—	2253	43399	000002, 2, 4, 3	221	713

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2292	44203	00002, 2, 0000002	507	1327	2320	—	44507	00002030202	322	881	2336	—	44753	00003020030	540	691
2308	—	44207	00002, 2, 000004	194	895	2321	—	44519	0000204, 2, 3	188	649	2337	—	44771	0000303, 3, 2	284	655
—	2293	44221	00002, 2, 000400	419	763	2322	—	44531	0000205, 2, 2	224	551	—	2314	44773	0000303, 2000	481	765
2309	—	44249	00002, 2, 002, 20	680	967	—	2305	44533	00002050000	345	569	2338	—	44777	00003030020	504	701
—	2294	44257	00002, 2, 3, 40	455	561	2323	—	44537	0000206, 20	260	381	2339	—	44789	00003040000	376	619
—	2295	44263	00002, 2, 3, 2, 3	243	835	2324	—	44543	0000209	18	175	—	2315	44797	000030500	179	335
2310	—	44267	00002, 2, 30002	380	1003	2325	—	44549	00003, 6000	244	375	—	2316	44809	00004, 4020	337	457
—	2296	44269	00002, 2, 30200	517	897	—	2306	44563	00003, 402, 2	267	629	2340	—	44819	00004, 302, 2	268	633
2311	—	44273	00002, 2, 4, 30	442	579	2326	—	44579	00003, 303, 2	290	657	—	2317	44839	00004, 202, 3	199	671
2312	—	44279	00002, 2, 403	168	641	—	2307	44587	00003, 300002	349	911	2341	—	44843	00004, 200002	324	847
—	2297	44281	00002, 2, 5, 20	367	535	—	2308	44617	00003, 202020	595	813	—	2318	44851	00004, 2, 2, 2, 2	301	727
—	2298	44293	00002005000	377	581	2327	—	44621	00003, 202, 200	536	913	2342	—	44867	00004004, 2	232	515
2313	—	44351	00002002, 6	80	511	—	2309	44623	00003, 202, 4	159	595	2343	—	44879	00004002, 4	130	571
2314	—	44357	0000200003000	658	1027	2328	—	44633	00003, 2002, 20	618	877	—	2319	44887	00004000003	209	757
—	2299	44371	000020000002, 2	547	1303	—	2310	44641	00003, 2, 2, 40	441	541	—	2320	44893	000040000300	367	655
2315	—	44381	00002000000300	596	1063	—	2311	44647	00003, 2, 2, 2, 3	241	823	2344	—	44909	00004020200	400	693
—	2300	44383	00002000005	129	725	2329	—	44651	00003, 2, 20002	382	1005	—	2321	44917	00004030000	377	619
—	2301	44389	000020002, 2000	743	1179	2330	—	44657	00003, 2, 3, 30	464	605	2345	—	44927	0000407	28	219
2316	—	44417	0000202, 60	312	361	—	2312	44683	00003003002	333	853	2346	—	44939	00005, 3002	206	539
—	2302	44449	00002020040	531	647	2331	—	44687	00003003, 4	146	625	—	2322	44953	00005, 2, 2, 20	361	511
2317	—	44453	000020200000	714	1129	2332	—	44699	00003002, 202	356	963	—	2323	44959	00005, 2, 5	61	333
2318	—	44483	0000203, 4, 2	286	639	—	2313	44701	00003002, 300	461	817	2347	—	44963	00005003, 2	216	493
—	2303	44491	0000203, 2002	371	961	2333	—	44711	000030002, 3	274	927	—	2324	44971	0000500002	249	653
—	2304	44497	00002030030	541	693	2334	—	44729	000030003, 20	530	763	—	2325	44983	000050203	127	475
2319	—	44501	000020300000	626	1015	2335	—	44741	0000302, 3000	494	773	2348	—	44987	000050302	160	447

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2326	45007	00006, 2, 4	71	317	2363	—	45317	002, 305000	276	435	—	2349	45589	002, 20400000	451	725
—	2327	45013	00006000000	289	469	—	2337	45319	002, 305, 3	127	403	—	—	45599	002, 204, 5	80	417
2349	—	45053	00001000	58	111	2364	—	45329	002, 303030	398	503	—	2350	45613	002, 20300200	509	875
—	2328	45061	002, 9000	99	151	—	2338	45337	002, 303, 2, 20	459	647	—	—	45631	002, 203, 6	63	395
2350	—	45077	002, 700000	200	321	2365	—	45341	002, 303, 300	354	625	—	—	45641	002, 20202020	642	877
2351	—	45083	002, 7, 202	116	311	—	2339	45343	002, 303, 5	83	437	—	—	45659	002, 20200202	390	1061
2352	—	45119	002, 6, 6	32	197	—	2340	45361	002, 3002, 2, 30	493	637	—	—	45667	002, 202, 2, 3, 2	373	855
—	2329	45121	002, 5050	187	219	2366	—	45377	002, 300050	344	405	—	—	45673	002, 202, 20020	683	947
—	2330	45127	002, 503, 3	123	401	2367	—	45389	002, 30002, 200	544	927	—	—	45677	002, 202, 20200	574	993
2353	—	45131	002, 502002	214	551	—	2341	45403	002, 30000202	361	983	—	—	45691	002, 202, 402	247	695
2354	—	45137	002, 500030	332	423	2368	—	45413	002, 3002, 2000	578	917	—	—	45697	002, 200000	305	351
—	2331	45139	002, 50002, 2	241	573	—	2342	45427	002, 3003, 2, 2	317	773	—	—	45707	002, 20003002	380	973
2355	—	45161	002, 5, 20020	376	521	—	2343	45433	002, 3004, 20	395	573	—	—	45737	002, 2000000020	830	1147
2356	—	45179	002, 5, 402	140	393	—	2344	45439	002, 3007	39	205	—	—	45751	002, 20000203	271	1009
—	2332	45181	002, 5, 500	167	307	—	2345	45481	002, 3, 2000020	643	889	—	—	45757	002, 200000400	421	767
2357	—	45191	002, 404, 3	130	417	2369	—	45491	002, 3, 202, 2, 2	358	887	—	—	45763	002, 2002, 4, 2	329	733
2358	—	45197	002, 403, 200	336	569	2370	—	45497	002, 3, 203, 20	470	677	—	—	45767	002, 2002, 3, 3	254	837
2359	—	45233	002, 4002, 30	424	549	2371	—	45503	002, 3, 206	56	375	—	—	45779	002, 2002002, 2	462	1103
—	2333	45247	002, 4006	49	321	—	2346	45523	002, 3, 3002, 2	331	791	—	—	45817	002, 2005, 20	353	515
—	2334	45259	002, 4, 2, 2002	289	747	2372	—	45533	002, 3, 30300	348	623	—	—	45821	002, 200600	220	411
2360	—	45263	002, 4, 2, 2, 4	120	529	—	2347	45541	002, 3, 4, 2000	399	635	—	—	45823	002, 2008	29	249
2361	—	45281	002, 4, 3, 40	306	377	—	2348	45553	002, 3, 5, 30	287	377	—	—	45827	002, 2, 2, 6, 2	186	401
—	2335	45289	002, 4, 30020	421	585	2373	—	45557	002, 3, 50000	304	501	—	—	45833	002, 2, 2, 4020	442	599
2362	—	45293	002, 4, 30200	350	607	2374	—	45569	002, 2080	148	105	—	—	45841	002, 2, 2, 3030	483	611
—	2336	45307	002, 4, 502	137	389	2375	—	45587	002, 20402, 2	274	645	—	—	45853	002, 2, 2, 3, 300	425	751

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
2387	—	45853	002, 2, 2, 202, 3	268	903	—	2374	46171	00200300202	349	949	2411	—	46451	002000003, 2, 2	412	1005
2388	—	45869	002, 2, 2, 20200	606	1043	2401	—	46181	002003, 2, 2000	576	913	2412	—	46457	002000004, 20	512	743
2389	—	45887	002, 2, 2, 6	70	449	—	2375	46183	002003, 2, 2, 3	239	815	—	2389	46471	0020002, 4, 3	219	707
2390	—	45893	002, 2, 2003000	572	893	2402	—	46187	002003, 20002	380	999	—	2390	46477	0020002, 3, 200	557	945
—	2363	45943	002, 2, 20303	193	731	2403	—	46199	002003, 303	184	693	—	2391	46489	0020002, 2, 20	695	983
—	2364	45949	002, 2, 20500	275	509	—	2376	46199	00200203002	363	939	2413	—	46499	0020002003, 2	426	971
2391	—	45953	002, 2, 3, 60	258	299	2404	—	46229	00200200000	714	1151	—	2392	46507	0020002000002	495	1297
2392	—	45959	002, 2, 3, 4, 3	176	569	—	2377	46237	00200202, 300	511	905	2414	—	46511	00200020004	188	871
2393	—	45971	002, 2, 3, 202, 2	304	863	—	2378	46261	0020020020000	721	1177	2415	—	46523	002000200302	326	909
—	2365	45979	002, 2, 3, 2, 202	323	875	2405	—	46271	0020020006	74	487	—	2393	46549	002000200000000	647	1049
2394	—	45989	002, 2, 3, 0020000	576	911	—	2379	46273	002002, 2, 50	401	475	2416	—	46559	002000200305	88	509
—	2366	46021	002, 2, 4, 3000	395	619	—	2380	46279	002002, 2, 3, 3	253	833	—	2394	46567	0020004, 2, 3	195	673
—	2367	46027	002, 2, 4, 2002	289	749	2406	—	46301	002002, 20300	494	893	—	2395	46573	00200040200	409	711
2395	—	46049	002, 2, 5, 40	272	337	2407	—	46307	002002, 3, 2, 2	346	797	2417	—	46589	002000200700	164	309
—	2368	46051	002, 2, 5, 3, 2	207	479	—	2381	46309	002002, 3, 2000	587	933	—	2396	46591	0020000	19	183
2396	—	46061	002, 2, 50200	296	515	—	2382	46327	002002, 403	167	637	2418	—	46601	00202, 5020	344	465
2397	—	46073	002, 2, 7, 20	190	279	2408	—	46337	002000070	236	287	2419	—	46619	00202, 4, 202	208	721
2398	—	46091	002000002	170	431	2409	—	46349	00200004, 200	460	777	—	2397	46633	00202, 300000	607	837
—	2369	46093	0020006, 200	249	419	—	2383	46351	00200000, 4	143	603	—	2398	46639	00202, 3004	147	671
—	2370	46099	00200502, 2	225	529	—	2384	46381	002000020000	691	1189	2420	—	46643	00202, 3, 2, 2	358	863
2399	—	46103	002005003	146	517	—	2385	46399	00200000, 6	81	517	2421	—	46649	00202, 3, 3, 20	486	697
2400	—	46133	002004, 20000	476	775	—	2386	46411	00200000202	505	1303	—	2399	46663	00202, 203, 3	237	775
—	2371	46141	002004, 4000	287	519	2410	—	46439	002000002, 2, 312	1007	2422	—	—	46679	00202, 200003	224	1019
—	2372	46147	00200304, 2	263	581	—	2387	46441	0020000020000	805	1117	—	2400	46681	00202, 2002, 20	673	955
—	2373	46153	00200302020	509	777	—	2388	46447	00200000204	181	855	—	2401	46687	00202, 2005	109	609

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
2423	—	4661	00202, 2, 2, 3	372	853	2437	—	46997	00204, 200000	454	749	—	2425	47293	003, 300400	295	537
2424	—	46703	00202, 2, 204	154	725	—	2413	47017	00204, 000020	485	671	2450	—	47297	003, 3, 2, 50	288	341
—	2402	46723	00202005, 2	251	547	—	2414	47041	00205, 50	207	247	2451	—	47303	003, 3, 2, 3, 3	182	599
2425	—	46737	00202004, 3	206	663	2438	—	47051	00205, 2002	214	555	2452	—	47309	003, 3, 2, 2, 200	440	751
—	2403	46747	00202002, 202	393	1063	2439	—	47057	00205, 0030	308	395	—	2426	47317	003, 3, 2000000	539	873
2426	—	46751	00202002, 5	116	625	—	2415	47059	00205, 002, 2	221	539	2453	—	47339	003, 3, 30002	274	723
2427	—	46757	00202002000	722	1141	2440	—	47087	00206, 04	54	203	2454	—	47351	003, 3, 403	122	465
2428	—	46769	002020002, 30	632	819	2441	—	47093	00207, 0000	176	291	—	2427	47353	003, 3, 5, 20	267	389
—	2404	46771	002020002, 2, 2	445	1077	2442	—	47111	003, 8, 3	58	181	2455	—	47363	003, 206, 2	154	331
—	2405	46807	00202020003	265	963	—	2416	47119	003, 7, 4	51	211	2456	—	47381	003, 20300000	494	795
2429	—	46811	00202020202	362	980	2443	—	47123	003, 602, 2	146	343	2457	—	47387	003, 203, 202	278	749
2430	—	46817	0020203, 40	414	511	2444	—	47129	003, 6, 2, 20	234	329	—	2428	47389	003, 203, 300	363	641
—	2406	46819	0020203, 3, 2	317	731	—	2417	47137	003, 5040	213	257	—	2429	47407	003, 202004	147	673
2431	—	46829	00202030200	466	809	—	2418	47143	003, 502, 3	125	419	2458	—	47417	003, 202, 3, 20	480	689
—	2407	46831	002020304	123	589	2445	—	47147	003, 500002	206	537	—	2430	47419	003, 202, 302	271	751
2432	—	46853	00203, 5000	300	463	—	2419	47149	003, 500200	287	493	—	2431	47431	003, 20003, 3	225	737
—	2408	46861	00203, 4, 200	359	607	—	2420	47161	003, 5, 3, 20	273	391	2459	—	47441	003, 20000030	590	753
—	2409	46807	00203, 302, 2	307	725	2446	—	47189	003, 40000000	446	721	2460	—	47459	003, 20002, 3, 2	342	785
2433	—	46877	00203, 3, 300	366	647	2447	—	47207	003, 4, 2, 2, 3	164	559	—	2432	47491	003, 2, 2, 5, 2	211	461
2434	—	46889	00203, 200020	602	831	—	2421	47221	003, 4, 30000	351	575	—	2433	47497	003, 2, 2, 3020	477	649
2435	—	46901	00203, 2, 20000	550	897	2448	—	47237	003, 304000	316	489	—	2434	47501	003, 2, 2, 3, 200	438	743
2436	—	46919	00203003, 3	210	689	—	2422	47251	003, 30202, 2	309	731	2462	—	47507	003, 2, 2, 202, 2	360	853
—	2410	46933	002030000000	637	1031	—	2423	47269	003, 30020000	521	823	2463	—	47513	003, 2, 2, 2, 20	548	775
—	2411	46957	00203020200	467	809	2449	—	47279	003, 300004	136	627	—	2434	47521	003, 2, 20040	431	525
—	2412	46993	00204, 2030	391	497	—	2424	47287	003, 300203	189	703	—	2435	47527	003, 2, 2002, 3	243	823

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2436	47533	003, 2, 2000200	541	933	—	2450	47701	003000000004	173	799	—	2461	48073	00304, 2020	371	509
2464	—	47543	003, 2, 20203	204	761	—	2451	47707	00300000000000	611	1063	—	2462	48079	00304, 2, 4	95	423
—	2437	47563	003, 2, 3, 2002	307	795	2475	—	47807	003000000006	66	437	—	2463	48091	003040202	199	545
—	2438	47569	003, 2, 30030	449	575	—	2452	47809	00300002, 50	355	421	—	2464	48109	003050200	235	409
—	2439	47581	003, 2, 30300	339	607	2476	—	47819	00300002, 2002	380	983	2489	—	48119	0030603	70	271
2465	—	47591	003, 2, 4, 2, 3	158	545	2477	—	47837	003000020300	430	769	—	2465	48121	00307, 20	149	219
—	2440	47599	003, 2, 404	87	419	2478	—	47843	00300003, 3, 2	298	687	2490	—	48131	004, 8, 2	74	157
2466	—	47609	003, 2, 6, 20	222	325	—	2453	47857	00300004, 30	373	489	—	2466	48157	004, 5, 300	197	347
—	2441	47623	003006, 3	105	331	—	2454	47869	0030000600	191	357	—	2467	48163	004, 403, 2	179	405
—	2442	47629	003005, 200	283	477	—	2455	47881	00302, 4020	377	511	2491	—	48179	004, 4, 2, 2	208	501
2467	—	47639	003004003	162	575	2479	—	47903	00302, 3, 5	84	445	—	2468	48187	004, 4, 302	161	445
—	2443	47653	00300302000	479	755	—	2456	47911	00302, 202, 3	227	765	—	2469	48193	004, 3050	219	257
2468	—	47657	00300300020	536	739	—	2457	47917	00302, 200200	513	883	2492	—	48197	004, 303000	324	505
—	2444	47659	00300300002	333	869	2480	—	47933	00302, 2, 400	320	581	2493	—	48221	004, 300300	306	545
2469	—	47681	003002050	326	383	2481	—	47939	00302004, 2	270	599	2494	—	48239	004, 3, 204	96	451
2470	—	47699	0030020002, 2	408	971	—	2458	47947	00302002002	363	937	—	2470	48247	004, 3, 303	125	471
—	2445	47701	00300200000000	661	1069	2482	—	47951	00302002, 4	152	667	—	2471	48259	004, 205, 2	165	359
2471	—	47711	0030020005	98	547	2483	—	47963	00302000202	338	921	—	2472	48271	004, 203, 4	107	457
—	2446	47713	003002, 2, 40	433	531	2484	—	47999	0030202, 40	406	499	2495	—	48281	004, 202, 2, 20	448	633
2472	—	47717	003002, 2, 2000	572	907	—	2459	47977	00302020020	567	787	2496	—	48299	004, 20000002	332	869
—	2447	47737	003002, 4, 20	401	581	2485	—	47981	00302020200	474	821	2497	—	48311	004, 200203	176	655
2473	—	47741	003002, 500	262	483	2486	—	48017	00303, 2030	410	521	—	2473	48313	004, 2003, 20	401	577
—	2448	47743	003002, 7	41	303	2487	—	48023	00303, 2003	188	675	—	2474	48337	004, 2, 20030	423	541
2474	—	47777	00300000040	494	601	2488	—	48029	00303, 2, 300	342	607	2498	—	48341	004, 2, 20000000	492	797
—	2449	47779	0030000003, 2	387	881	—	2460	48049	0030302, 30	403	523	2499	—	48353	004, 2, 3, 40	296	365

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
2500	—	48371	004, 2, 4, 2, 2	198 485	—	2484	48619	004040002	004040002	181 479	2526	—	48869	00503, 2000	276 439		
2501	—	48383	004, 2, 8	20 169	2516	—	48623	0040404	0040404	64 309	—	2499	48871	00503, 2, 3	113 389		
—	2475	48397	004004, 200	293 495	2517	—	48647	005, 6, 3	005, 6, 3	68 215	—	2500	48883	00504, 2	139 341		
2502	—	48407	004003003	162 577	—	2485	48649	005, 5020	005, 5020	193 261	—	2501	48889	00505, 20	165 241		
—	2476	48409	004003, 2, 20	395 557	—	2486	48661	005, 400000	005, 400000	203 423	—	2502	48907	006, 4002	121 309		
2503	—	48413	004003, 300	304 537	—	2487	48673	005, 3040	005, 3040	219 265	2527	—	48947	006, 2, 2, 2, 2	166 401		
2504	—	48437	004002, 20000	468 763	2518	—	48677	005, 302000	005, 302000	300 473	2528	—	48953	006, 2, 3, 20	222 319		
2505	—	48449	004000050	286 337	—	2488	48679	005, 302, 3	005, 302, 3	127 427	—	2503	48973	006002, 200	241 411		
—	2477	48463	00400002, 4	133 583	2519	—	48731	005, 200202	005, 200202	212 577	2529	—	48989	006000300	200 357		
2506	—	48473	004000002, 20	512 727	—	2489	48733	005, 200300	005, 200300	271 483	—	2504	48991	00600005	43 243		
2507	—	48479	0040000005	82 461	—	2490	48751	005, 2, 204	005, 2, 204	83 391	—	2505	49003	006020002	159 419		
—	2478	48481	0040002, 40	359 441	—	2491	48757	005, 2, 30000	005, 2, 30000	297 487	—	2506	49009	00603, 30	189 247		
—	2479	48487	0040002, 2, 3	195 667	2520	—	48761	005, 2, 4, 20	005, 2, 4, 20	238 345	2530	—	49019	0060402	88 249		
2508	—	48491	00400020002	308 811	2521	—	48767	005, 2, 7	005, 2, 7	24 179	2531	—	49031	007, 4, 3	62 201		
2509	—	48497	0040003, 30	370 483	2522	—	48779	005003002	005003002	194 497	—	2507	49033	007, 3020	171 233		
—	2480	48523	00402, 3002	239 613	—	2492	48781	005003, 200	005003, 200	279 473	2532	—	49037	007, 3, 200	156 265		
2510	—	48527	00402, 3, 4	104 447	—	2493	48787	00500202, 2	00500202, 2	231 547	2533	—	49043	007, 202, 2	126 299		
2511	—	48533	00402, 200000	458 739	—	2494	48799	005002, 5	005002, 5	61 329	—	2508	49057	0070040	145 177		
2512	—	48539	00402, 2, 202	250 677	2523	—	48809	00500000020	00500000020	416 575	—	2509	49069	007000200	179 309		
—	2481	48541	00402, 2, 300	323 573	—	2495	48817	0050002, 30	0050002, 30	331 429	—	2510	49081	00703, 20	149 215		
2513	—	48563	0040202, 2, 2	272 659	2524	—	48821	005000200000	005000200000	368 601	2534	—	49103	008, 2, 4	36 161		
—	2482	48571	004020302	199 555	—	2496	48823	005000203	005000203	135 503	2535	—	49109	008000000	146 237		
—	2483	48589	00403, 2, 200	327 550	—	2497	48847	00502, 2, 4	00502, 2, 4	87 385	—	2511	49117	0080300	93 167		
2514	—	48593	004030030	338 433	2525	—	48857	0050202, 20	0050202, 20	324 461	2536	—	49121	009, 40	78 97		
2515	—	48611	00404, 3, 2	170 393	—	2498	48859	005020202	005020202	187 511	—	2512	49123	009, 3, 2	59 137		

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
2537	—	49139	0010, 2, 2	44	109	2550	—	49409	2, 5070	102	115	2561	—	49667	2, 407, 2	86	183
2538	—	49157	2, 11000	48	73	2525	49411	2, 506, 2	89	191	—	2539	49669	2, 406000	161	247	
2539	—	49169	2, 9030	82	103	2526	49417	2, 504020	215	291	—	2540	49681	2, 404030	245	309	
—	2513	49171	2, 902, 2	61	143	—	2527	49439	2, 5030000	289	465	2562	—	49697	2, 403040	254	307
—	2514	49177	2, 9, 2, 20	99	139	2551	—	49433	2, 503, 2, 20	276	389	—	2541	49711	2, 403004	95	433
2540	—	49193	2, 800020	146	201	2552	—	49451	2, 50200002	224	585	2563	—	49727	2, 403, 6	42	263
2541	—	49199	2, 8004	36	163	—	2528	49459	2, 502, 2, 2, 2	211	509	2564	—	49739	2, 40202002	272	701
—	2515	49201	2, 8, 2, 30	185	181	2553	—	49463	2, 502, 203	124	459	—	2542	49741	2, 40202, 200	387	659
—	2516	49207	2, 8, 203	53	195	—	2529	49477	2, 50003000	307	479	—	2543	49747	2, 4020002, 2	303	721
2542	—	49211	2, 8, 302	70	193	2554	—	49481	2, 50002020	368	503	2565	—	49757	2, 40200300	334	595
2543	—	49223	2, 703, 3	66	215	2555	—	49499	2, 50000202	220	599	—	2544	49783	2, 402, 303	135	509
2544	—	49255	2, 7, 2, 2000	190	301	2556	—	49523	2, 5003, 2, 2	194	473	2566	—	49787	2, 402, 402	166	467
—	2517	49261	2, 7, 20200	173	299	2557	—	49539	2, 5004, 20	242	351	—	2545	49789	2, 402, 500	197	363
2545	—	49277	2, 7, 500	92	199	—	2530	49531	2, 500402	133	375	—	2546	49801	2, 40003020	401	545
—	2518	49279	2, 7, 7	15	107	—	2531	49537	2, 5, 2, 60	155	179	—	2547	49807	2, 40003, 4	113	483
—	2519	49297	2, 602030	217	275	2558	—	49547	2, 5, 2, 3002	190	487	2567	—	49811	2, 4000202, 2	308	729
2546	—	49307	2, 602, 202	144	389	—	2532	49549	2, 5, 2, 3, 200	273	463	2568	—	49823	2, 40002, 5	82	441
2547	—	49331	2, 6002, 2, 2	170	411	2559	—	49559	2, 5, 2, 2003	142	509	—	2548	49831	2, 4000002, 3	215	727
—	2520	49333	2, 60020000	269	439	—	2533	49597	2, 5, 20400	199	363	—	2549	49843	2, 400002, 2, 2	317	767
—	2521	49339	2, 600302	147	353	—	2534	49603	2, 5, 3, 4, 2	151	337	2569	—	49853	2, 40000400	286	521
—	2522	49363	2, 6, 2002, 2	179	427	2560	—	49613	2, 5, 3, 2, 200	278	475	2570	—	49871	2, 4002, 2, 4	122	539
2548	—	49367	2, 6, 20003	110	399	—	2535	49637	2, 5, 30202	173	473	2571	—	49877	2, 4002000000	508	823
—	2523	49369	2, 6, 202, 20	261	371	—	2536	49633	2, 5, 4, 40	195	241	—	2550	49891	2, 4003, 3, 2	233	537
—	—	49391	2, 6, 304	54	257	—	2537	49639	2, 5, 4, 2, 3	103	355	2572	—	49919	2, 4008	20	171
2549	—	49393	2, 6, 4, 30	175	259	—	2538	49663	2, 5, 9	11	101	—	2551	49921	2, 4, 2, 70	149	169

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2552	49927	2, 4, 2, 5, 3	109	347	—	2586	50153	2, 4, 5, 2, 2	262	395	2601	—	50441	2, 3, 3, 3, 3, 2, 2	398	539
2573	—	49937	2, 4, 2, 3, 3, 2	336	425	—	2587	50159	2, 4, 5, 4	56	271	2602	—	50459	2, 3, 3, 3, 3, 2, 2	298	803
—	2553	49939	2, 4, 2, 3, 2, 2	247	583	—	2588	50177	2, 3, 3, 3, 3	88	97	—	2574	50461	2, 3, 3, 3, 3, 3, 2	389	687
2574	—	49943	2, 4, 2, 3, 3, 3	158	563	—	2589	50207	2, 3, 5, 5	52	269	—	2575	50497	2, 3, 3, 3, 3, 3, 2	371	437
—	2554	49957	2, 4, 2, 2, 2, 2, 2	443	690	—	2564	50221	2, 3, 4, 3, 3, 2, 2	337	579	—	2576	50503	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3	239	783
2575	—	49991	2, 4, 2, 3, 3, 3	176	577	—	2565	50237	2, 3, 4, 3, 2, 2	233	591	2603	—	50513	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	626	799
—	2555	49993	2, 4, 2, 3, 3, 2, 2	479	655	—	2590	50231	2, 3, 4, 2, 3	138	599	—	2577	50527	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	107	601
—	2556	49999	2, 4, 2, 3, 2, 2, 2	127	557	—	2591	50261	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	514	831	—	2578	50539	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2	403	1061
2576	—	50021	2, 4, 2, 3, 2, 2, 2	448	711	—	2566	50263	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	197	711	2604	—	50543	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2	148	699
—	2557	50023	2, 4, 2, 3, 2, 2, 2, 2	185	633	—	2592	50273	2, 3, 3, 3, 2, 4	342	419	2605	—	50549	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	526	863
2577	—	50033	2, 4, 2, 3, 3, 3	350	457	—	2567	50287	2, 3, 3, 3, 2, 4	111	531	—	2579	50551	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	189	715
—	2558	50047	2, 4, 2, 3, 2, 2	29	223	—	2593	50291	2, 3, 3, 3, 3, 2, 2	256	623	—	2580	50581	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2	613	989
2578	—	50051	2, 4, 3, 5, 2	154	337	—	2568	50311	2, 3, 2, 3, 2, 3	161	517	—	2581	50587	2, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2	335	907
—	2559	50053	2, 4, 3, 4, 3, 2	279	433	—	2594	50321	2, 3, 2, 3, 2, 3, 2	474	601	2606	—	50591	2, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 5	98	531
2579	—	50069	2, 4, 3, 2, 3, 2, 2, 2	422	681	—	2569	50329	2, 3, 2, 3, 2, 2, 2	533	753	—	2582	50593	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2	449	547
—	2560	50077	2, 4, 3, 2, 3, 3, 2	297	527	2595	—	50333	2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2	406	719	—	2583	50599	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2	253	857
2580	—	50087	2, 4, 3, 3, 2, 2, 2	172	583	—	2570	50341	2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2	583	921	2607	—	50627	2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2	244	545
2581	—	50093	2, 4, 3, 3, 2, 2, 2	382	659	—	2571	50359	2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2	311	785	—	2584	50647	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	203	739
—	2561	50101	2, 4, 3, 2, 3, 2, 2, 2	391	639	2596	—	50363	2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2	270	751	2608	—	50651	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2	276	755
2582	—	50111	2, 4, 3, 3, 3, 2	38	257	—	2572	50377	2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2	547	749	—	2585	50671	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	89	429
—	2562	50119	2, 4, 4, 3, 3	123	407	—	2573	50383	2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2	143	631	—	2586	50683	2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	121	347
2583	—	50123	2, 4, 4, 2, 3, 2	208	539	2597	—	50387	2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2	370	883	—	2587	50707	2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2	245	577
2584	—	50129	2, 4, 4, 3, 3, 2	302	387	2598	—	50411	2, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 2	302	797	2609	—	50723	2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2	268	607
—	2563	50131	2, 4, 4, 3, 2, 2	217	519	2599	—	50417	2, 3, 2, 2, 3, 3, 2	332	461	—	—	50741	2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 2	488	795
2585	—	50147	2, 4, 5, 3, 2	150	347	2600	—	50423	2, 3, 2, 2, 3, 2, 2	134	511	2611	—	50753	2, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2	314	369

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
2650	—	51511, 2, 20200005	116 651	—	2636	51817, 2, 20002, 20020	745 1033	—	2651	52069	2, 200202, 20000	671 1065					
2651	—	51503, 2, 202000002	438 1153	2664	—	51827, 2, 20002, 3, 2, 2	388 945	—	2652	52081, 2, 200203, 30	523 683						
—	2625	51577, 2, 202004, 20	457 663	—	2637	51829, 2, 20002, 30000	607 995	2674	—	52103, 2, 2003, 4, 3	184 595						
2652	—	51581, 2, 20200500	295 547	2665	—	51839, 2, 20002, 7	50 369	2675	—	52121, 2, 2003, 2, 2, 20	576 815						
2653	—	51503, 2, 202, 2, 3020	522 751	—	2638	51853, 2, 2000003, 200	593 1005	2676	—	52127, 2, 2003, 2, 5	98 533						
2654	—	51599, 2, 202, 2, 3, 4	154 661	—	2639	51859, 2, 200000202, 2	493 1167	—	2653	52147, 2, 200302, 2, 2	361 875						
—	2626	51607, 2, 202, 2, 2003	263 943	2666	—	51869, 2, 2000002, 300	574 1017	—	2654	52153, 2, 200303, 20	471 679						
—	2627	51613, 2, 202, 2, 3, 00	481 853	—	2640	51871, 2, 2000002, 5	131 705	2677	—	52163, 2, 2004, 4, 2	232 519						
—	2628	51631, 2, 202, 20004	173 801	2667	—	51893, 2, 200000020000	798 1303	—	2655	52177, 2, 20040030	433 555						
—	2629	51637, 2, 202, 2020000	647 1057	2668	—	51899, 2, 2000000302	374 1041	2678	—	52181, 2, 2004000000	500 811						
2655	—	51647, 2, 202, 206	64 429	—	2641	51907, 2, 200002, 4, 2	355 791	—	2656	52183, 2, 20040003	189 689						
2656	—	51659, 2, 202, 3, 2002	358 927	—	2642	51913, 2, 200002, 2020	721 1015	—	2657	52189, 2, 20040300	323 579						
—	2630	51673, 2, 202, 302, 20	543 773	2669	—	51929, 2, 20000202, 20	722 1027	—	2658	52201, 2, 20050020	371 517						
—	2631	51679, 2, 202, 395	83 479	2670	—	51941, 2, 200003, 20000	622 989	2679	—	52223, 2, 20010	12 127						
2657	—	51683, 2, 202, 4, 3, 2	268 619	—	2643	51949, 2, 20000302000	541 939	—	2659	52237, 2, 2, 2, 6, 200	243 409						
—	2632	51691, 2, 202, 40002	287 759	2671	—	51971, 2, 2002, 6, 2	198 427	—	2660	52249, 2, 2, 2, 5, 2, 20	349 491						
2658	—	51713, 2, 200080	164 183	—	2644	51973, 2, 2002, 5000	365 563	2680	—	52253, 2, 2, 2, 5, 300	272 479						
2659	—	51719, 2, 20006, 3	126 397	2672	—	51977, 2, 2002, 4020	470 637	2681	—	52259, 2, 2, 2, 403, 2	248 561						
—	2633	51721, 2, 2005020	359 485	—	2645	51991, 2, 2002, 3003	241 859	—	2661	52267, 2, 2, 2, 400002	301 785						
2660	—	51749, 2, 200032000	578 911	—	2646	52009, 2, 2002, 200020	747 1031	2682	—	52289, 2, 2, 2, 3050	306 359						
2661	—	51767, 2, 20003, 203	226 835	—	2647	52021, 2, 2002, 2, 20000	685 1117	—	2662	52291, 2, 2, 2, 304, 2	253 559						
—	2634	51769, 2, 20003, 3, 20	521 747	—	2648	52027, 2, 2002, 2, 302	327 907	2683	—	52301, 2, 2, 2, 302, 200	494 841						
—	2635	51767, 2, 200020002	445 1147	—	2649	52051, 2, 200200002, 2	499 1180	2684	—	52313, 2, 2, 2, 3002, 20	576 817						
2662	—	51797, 2, 200020000000	802 1297	—	2650	52057, 2, 20020002, 20	733 1041	—	2663	52321, 2, 2, 2, 3, 40	417 511						
2663	—	51803, 2, 2000200202	426 1159	2673	—	52067, 2, 200202, 3, 2	394 905	2685	—	52361, 2, 2, 2, 203020	538 731						

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	
—	2664	52363	2, 2, 2, 203002	345	883	2698	—	52667	2, 2, 2, 2020302	298	831	2714	—	52937	2, 2, 2, 302, 2020	554	759	
—	2665	52369	2, 2, 2, 202030	567	719	2699	—	52673	2, 2, 2, 203, 50	332	395	—	2686	52951	2, 2, 3, 3020003	227	825	
2686	—	52379	2, 2, 2, 202, 202374	1011	2700	2700	—	52691	2, 2, 2, 203002, 2	366	875	—	2687	52957	2, 2, 3, 302000	393	703	
—	2666	52387	2, 2, 2, 20003, 3	403	917	2701	—	52697	2, 2, 2, 20302, 20	526	749	—	2688	52963	2, 2, 3, 303, 3, 2	271	625	
2687	—	52391	2, 2, 2, 20002, 3	292	927	2702	—	52709	2, 2, 2, 204, 2000	434	691	2715	—	52967	2, 2, 3, 303, 2, 3	188	647	
—	2688	—	52433	2, 2, 2, 2, 20003	606	775	—	2677	52711	2, 2, 204, 2, 3	177	611	2716	—	52973	2, 2, 3, 303200	398	691
—	2667	52453	2, 2, 2, 3, 2000	553	879	2703	—	52721	2, 2, 205, 30	308	405	—	2689	52981	2, 2, 3, 3040000	359	591	
2689	—	52457	2, 2, 2, 3, 2000	582	809	2704	—	52727	2, 2, 20503	114	439	—	2690	52999	2, 2, 4, 5, 3	115	367	
—	2668	52489	2, 2, 2004020	457	619	2705	—	52733	2, 2, 20700	148	279	2717	—	53003	2, 2, 4, 4002	208	531	
—	2669	52501	2, 2, 200300000	607	977	—	2678	52747	2, 2, 3, 5002	197	501	—	2691	53017	2, 2, 4, 3, 20	399	563	
2690	—	52511	2, 2, 2003, 5	104	549	2706	—	52757	2, 2, 3, 400000	416	669	—	2692	53047	2, 2, 4, 2, 203	169	627	
2691	—	52517	2, 2, 2, 200202000	670	1037	2707	—	52769	2, 2, 3, 3040	348	421	2718	—	53051	2, 2, 4, 2, 302	218	605	
2692	—	52520	2, 2, 2002, 2, 3	612	791	—	2679	52783	2, 2, 3, 3004	129	589	2719	—	53069	2, 2, 4002, 200	424	723	
2693	—	52541	2, 2, 2002, 400	404	733	—	2680	52807	2, 2, 3, 203, 3	207	677	—	2693	53077	2, 2, 40000000	527	853	
—	2670	52543	2, 2, 2002, 6	75	479	—	2681	52813	2, 2, 3, 202, 200	509	867	2720	—	53087	2, 2, 40005	76	429	
2694	—	52553	2, 2, 200002020	738	1009	2708	—	52817	2, 2, 3, 200030	548	699	—	2694	53089	2, 2, 402, 40	331	407	
—	2671	52561	2, 2, 200000030	709	905	—	2682	52837	2, 2, 3, 2, 2000	553	877	2721	—	53093	2, 2, 402, 2000	434	689	
—	2672	52567	2, 2, 200000003	317	1147	2709	—	52859	2, 2, 3, 2, 402	312	597	—	2695	53101	2, 2, 4020200	385	667	
2695	—	52571	2, 2, 200000202	438	1193	—	2683	52861	2, 2, 3, 2, 500	251	463	—	2696	53113	2, 2, 404, 20	287	417	
—	2673	52579	2, 2, 20002, 3, 2	409	939	—	2684	52879	2, 2, 3003, 4	139	595	2722	—	53117	2, 2, 40500	184	341	
2696	—	52583	2, 2, 20002, 2, 3	288	985	2710	—	52883	2, 2, 300202, 2	378	895	2723	—	53129	2, 2, 5, 3020	312	425	
—	2674	52609	2, 2, 202, 60	293	339	2711	—	52889	2, 2, 3002, 2, 20	578	817	2724	—	53147	2, 2, 5, 2, 202	204	553	
—	2675	52627	2, 2, 202, 202, 2	419	993	2712	—	52901	2, 2, 30002000	622	983	—	2697	53149	2, 2, 5, 2, 300	263	467	
2697	—	52631	2, 2, 202, 2003	264	947	—	2685	52903	2, 2, 30002, 3	261	883	—	2698	53161	2, 2, 500020	391	541	
—	2676	52639	2, 2, 202, 1, 5	109	591	2713	—	52919	2, 2, 3000203	222	827	2725	—	53171	2, 2, 502, 2, 2	214	519	

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2699	53173	2, 2, 5020000	337 551	—	2736	—	53453	2004, 2, 2, 200	426	727
2726	—	53189	2, 2, 6, 3000	234 367	—	2714	53479	2004, 3, 2, 3	171 587	—	53759
—	2700	53197	2, 2, 6, 200	239 409	—	2715	53503	2004, 8	23 189	—	53777
2727	—	53201	2, 2, 60030	244 313	2737	—	53507	200306, 2	156 335	2750	—
2728	—	53231	2, 2, 704	42 205	—	2716	53527	20033003	197 701	2751	—
—	2701	53233	2, 2, 8, 30	131 173	2738	—	53549	20032200200	540 939	—	2728
—	2702	53239	2, 2, 803	47 183	—	2717	53551	200322004	151 691	2752	—
2729	—	53267	200702, 2	124 291	—	2718	53569	200300050	361 435	2753	—
—	2703	53269	200700000	205 329	2739	—	53591	20030000003	274 991	2754	—
2730	—	53279	2007, 5	38 195	—	2719	53593	200300002, 20	653 927	2755	—
—	2704	53281	2006040	185 223	2740	—	53597	20030000300	484 863	—	2729
—	2705	53299	2006, 2, 2, 2	175 421	2741	—	53609	20030020020	648 899	2756	—
2731	—	53309	2006, 400	170 307	—	2720	53611	20030020002	397 1045	—	2730
—	2706	53323	200502002	221 569	—	2721	53617	2003003, 30	479 625	—	2731
2732	—	53327	200502, 4	94 409	—	2722	53623	200300303	187 707	2757	—
—	2707	53353	2005, 20020	389 539	—	2723	53629	200300500	269 497	2758	—
—	2708	53359	2005, 204	89 417	2742	—	53633	2003, 2, 60	264 305	—	2732
—	2709	53377	2004060	191 219	2743	—	53639	2003, 2, 4, 3	182 587	—	2733
2733	—	53381	200404000	298 461	—	2724	53653	2003, 2, 200000	623 1005	—	2734
—	2710	53401	200402, 2, 20	451 637	2744	—	53657	2003, 2, 2, 20	582 823	2759	—
—	2711	53407	200402, 5	79 423	2745	—	53681	2003, 202, 30	536 695	2760	—
2734	—	53411	20040003, 2	288 655	2746	—	53693	2003, 20400	336 613	2761	—
—	2712	53419	20040000002	339 887	2747	—	53699	2003, 3, 4, 2	254 597	—	2735
—	2713	53437	200400400	283 515	2748	—	53717	2003, 3000000	562 911	2762	—
2735	—	53441	2004, 2, 50	278 329	—	2725	53719	2003, 30003	213 775	2763	—

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	
—	2736	54001	2002004, 30	457	599	2774	—	54323	200004, 2, 2, 2	326	785	—	2762	54547	200000302, 2	437	1031	
2764	—	54011	200200502	204	581	—	2751	54331	200004, 302	253	699	—	2763	54559	20000003, 5	123	649	
—	2737	54013	200200600	235	439	2775	—	54347	2000030002	394	1015	—	2788	—	54503	200000203, 2	458	1039
—	2738	54037	2002, 2, 300000	623	1003	—	2752	54361	200003002, 20	655	929	—	2764	54577	20000002, 2, 30	725	937	
—	2739	54049	2002, 2, 2040	499	605	—	2753	54367	200003005	107	595	—	2789	—	54581	20000002, 20000	814	1327
2765	—	54059	2002, 2, 200002	468	1223	2776	—	54371	200003, 2, 3, 2	368	843	—	2765	54583	20000002, 203	301	1115	
2766	—	54083	2002, 2004, 2	344	763	2777	—	54377	200003, 20020	676	937	—	2766	54601	200000002020	877	1199	
—	2740	54091	2002, 2002002	463	1195	2778	—	54401	200002060	316	363	2790	—	54617	2000000002, 20	898	1275	
2767	—	54101	2002, 200000000	820	1327	—	2754	54403	20000205, 2	269	585	2791	—	54623	2000000005	144	809	
—	2741	54121	2002, 2020020	727	1009	—	2755	54409	20000203020	619	841	2792	—	54629	2000000002, 20000	830	1317	
—	2742	54133	2002, 2030000	577	947	2779	—	54413	20000203, 200	572	969	—	2767	54631	2000000002, 2, 3	343	1173	
—	2743	54139	2002, 20402	251	709	2780	—	54419	2000020202, 2	478	1131	2793	—	54647	200000000303	254	961	
—	2744	54151	2002, 3, 4, 3	189	611	—	2756	54421	2000020200000	781	1259	—	2768	54667	200000002, 3002	427	1095	
—	2745	54163	2002, 3, 202, 2	391	927	2781	—	54437	2000020200000	802	1267	—	2769	54673	200000002, 2030	689	875	
2768	—	54167	2002, 3, 2003	246	883	2782	—	54443	2000020000002	546	1429	—	2770	54679	200000002, 2003	317	1137	
—	2746	54181	2002, 3002000	619	979	2783	—	54449	200002002, 30	708	917	—	2771	54709	20000002020000	773	1263	
—	2747	54193	2002, 302, 30	531	689	—	2757	54469	200002, 2, 3000	635	993	2794	—	54713	2000000203, 20	642	925	
—	2748	54217	2002, 4, 2020	495	679	—	2758	54493	200002, 20300	541	967	—	2772	54721	20000003, 50	401	477	
2769	—	54251	2002, 50002	236	625	2784	—	54497	200002, 3, 40	494	609	—	2773	54727	20000003, 3, 3	249	823	
2770	—	54269	2002, 800	122	231	—	2759	54499	200002, 3, 3, 2	379	873	—	2774	54751	2000000305	97	561	
—	2749	54277	200007000	211	323	2785	—	54503	200002, 3, 2, 3	264	907	2795	—	54767	2000000404	118	569	
2771	—	54287	200006, 4	86	357	—	2760	54517	200002, 40000	515	897	2796	—	54773	200000050000	396	653	
2772	—	54293	2000050000	404	649	2786	—	54521	200002, 5, 20	400	583	2797	—	54779	2000000602	160	459	
2773	—	54311	20000402, 3	206	691	2787	—	54539	20000004002	348	887	—	2775	54787	200002, 7, 2	155	331	
—	2750	54319	200004004	133	605	—	2761	54541	20000004, 200	505	853	—	2776	54799	200002, 5, 4	113	473	

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2777	54829	20002, 300200	581	999	2812	—	55109	2000300000	536	837	—	2802	55399	202, 4, 2, 2, 3	191	651
2798	—	54833	20002, 3, 2, 30	560	723	—	2788	55117	20003002, 200	573	977	—	2803	55411	202, 4, 3, 2, 2	261	635
2799	—	54851	20002, 204, 2	334	739	2813	—	55127	20003000003	272	985	2833	—	55439	202, 303, 4	132	563
2800	—	54869	20002, 2000000000	818	1323	—	2789	55147	20003020002	383	1009	—	2804	55441	202, 302030	493	625
—	2778	54877	20002, 200300	555	989	2814	—	55163	200030402	214	605	2844	—	55457	202, 300040	450	547
2801	—	54881	20002, 2, 2, 40	534	655	—	2790	55171	20004, 5, 2	193	433	2825	—	55469	202, 30000200	574	989
—	2779	54907	20002, 2, 402	271	763	—	2791	55201	200040000	373	455	2826	—	55487	202, 3006	62	407
2802	—	54917	20002004000	508	787	—	2792	55207	200040002, 3	209	709	—	2805	55501	202, 3, 2, 2, 200	515	879
—	2780	54919	20002004, 3	229	737	—	2793	55213	20004000200	463	799	2827	—	55511	202, 3, 20003	240	871
2803	—	54941	20002002, 300	566	1003	2815	—	55217	2000402, 30	426	553	2828	—	55529	202, 3, 30020	526	731
—	2781	54949	2000200002000	803	1269	—	2794	55219	2000402, 2, 2	299	725	2829	—	55541	202, 3, 40000	402	661
2804	—	54959	20002000004	208	901	2816	—	55229	200040400	262	479	2830	—	55547	202, 3, 502	170	483
—	2782	54973	20002000400	445	811	—	2795	55243	20005, 2002	241	625	—	2806	55579	202, 203, 202	327	881
—	2783	54979	2000202, 4, 2	345	769	—	2796	55249	200050030	347	445	2831	—	55589	202, 20202000	646	1019
2805	—	54983	2000202, 3, 3	266	877	2817	—	55259	200050202	204	559	—	2807	55603	202, 202, 2, 2, 419	1011	1011
2806	—	55001	200020202, 20	698	993	—	2797	55291	2000802	77	223	—	2808	55609	202, 202, 3, 20	565	811
—	2784	55009	20002023, 40	461	569	2818	—	55313	202, 6030	228	287	2832	—	55619	202, 20004, 2	338	749
—	2785	55021	20002030200	519	901	2819	—	55331	202, 503, 2	196	443	—	2809	55621	202, 200030000	603	941
2807	—	55049	20003, 4020	430	583	—	2798	55333	202, 502000	341	537	2833	—	55631	202, 20002, 4	192	841
—	2786	55051	20003, 4002	277	707	2820	—	55337	202, 500020	384	549	—	2810	55633	202, 20000030	695	887
—	2787	55057	20003, 3030	467	591	—	2799	55339	202, 500002	239	623	—	2811	55639	202, 200000003	311	1125
2808	—	55061	20003, 300000	562	905	2821	—	55343	202, 5004	94	427	2834	—	55661	202, 20020200	614	1063
2809	—	55073	20003, 2040	446	541	—	2800	55351	202, 5, 203	137	505	—	2812	55663	202, 200204	165	779
2810	—	55079	20003, 202, 3	256	863	2822	—	55373	202, 402, 200	406	691	2835	—	55667	202, 2003, 2, 376	917	917
2811	—	55103	20003, 2, 6	66	425	—	2801	55381	202, 40000000	519	839	2836	—	55673	202, 2004, 20	468	679

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2813	55681	202, 2, 4, 60	295	341	—	2824	55921	202002, 3, 30	547	713	—	2836	56197	20203, 4000	391	607
2837	—	55691	202, 2, 2, 3002	360	943	—	2825	55927	202002, 303	215	811	2864	—	56207	20203, 3, 4	134	577
2838	—	55697	202, 2, 2, 2030	582	739	2851	—	55931	202002, 402	264	743	—	2837	56209	20203, 2030	495	629
—	2814	55711	202, 2, 2, 2, 5	111	601	—	2826	55933	202002, 500	313	577	2865	—	56237	20203000200	528	911
—	2815	55717	202, 2, 2002000	685	1083	2852	—	55949	20200003, 200	580	983	—	2838	56239	2020300004	145	673
2839	—	55721	202, 2, 2000020	750	1037	2853	—	55967	20200002, 5	128	689	2866	—	56249	2020303, 20	446	643
2840	—	55733	202, 2, 2020000	658	1075	—	2827	55987	202000002, 2	2493	1193	—	2839	56263	20204, 3, 3	167	553
2841	—	55763	202, 2, 3002, 2	382	913	2854	—	55997	2020000400	444	809	2867	—	56267	20204, 2002	282	731
2842	—	55787	202, 2, 40002	290	767	2855	—	56003	2020002, 4, 2	346	771	—	2840	56269	20204, 2, 200	397	679
2843	—	55793	202, 2, 500	328	431	2856	—	56009	20200002, 2020	722	989	—	2841	56299	202050002	211	559
2844	—	55799	202, 2, 503	122	469	2857	—	56039	20200003, 2, 3	248	853	—	2842	56311	2020603	85	329
—	2816	55807	202, 2, 9	19	179	—	2828	56041	202000030020	635	883	2868	—	56333	203, 6, 200	218	367
—	2817	55813	202006000	269	413	—	2829	56043	202000040000	477	785	—	2843	56359	203, 402, 3	163	547
2845	—	55817	202005020	356	481	2858	—	56081	20202, 3030	494	625	2869	—	56369	203, 4, 2, 30	362	467
—	2818	55819	202005002	231	587	2859	—	56087	20202, 3003	332	827	—	2844	56377	203, 4, 3, 20	351	503
2846	—	55823	202005, 4	106	443	2860	—	56093	20202, 3, 300	434	767	—	2845	56383	203, 4, 6	47	293
2847	—	55829	2020040000	492	791	2861	—	56099	20202, 203, 2	374	849	2870	—	56393	203, 302020	484	661
—	2819	55837	202004, 300	367	647	—	2830	56101	20202, 202000	647	1021	—	2846	56401	203, 300030	473	603
—	2820	55843	20200303, 2	329	745	—	2831	56113	20202, 2, 30	587	759	2871	—	56417	203, 3, 2, 40	308	451
—	2821	55849	20200300020	639	881	2862	—	56123	20202, 2, 302	314	871	—	2847	56431	203, 3, 204	119	559
2848	—	55871	202003, 6	68	427	—	2832	56131	20202004, 2	325	721	—	2848	56437	203, 3, 30000	429	703
2849	—	55889	20200200030	672	857	—	2833	56149	20202000000000	773	1251	—	2849	56443	203, 3, 402	191	537
—	2822	55897	202002002, 20	721	1023	—	2834	56167	2020202, 2, 3	265	907	2872	—	56453	203, 204000	374	579
2850	—	55901	20200200300	536	955	2863	—	56171	202020200002	418	1101	—	2850	56467	203, 20202, 2	363	859
—	2823	55903	202002005	117	653	—	2835	56179	2020203, 2, 2	347	847	—	2851	56473	203, 202, 2, 20	557	787

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
2873	—	56477	203, 202, 300	424	751	—	2864	56713	20302, 3020	471	641
—	2852	56479	203, 202, 5	97	521	—	2855	56731	20302, 2, 202	315	853
2874	—	56489	203, 20000000	668	923	—	2866	56737	203020040	421	513
2875	—	56501	203, 20020000	596	973	2886	—	56747	20302000002	382	1001
—	2853	56503	203, 200203	219	815	—	2867	56767	20302006	53	357
—	2854	56509	203, 200400	341	621	—	2868	56773	20303, 3000	399	625
2876	—	56519	203, 2, 3, 3	208	685	—	2869	56779	20303, 2002	293	759
—	2855	56527	203, 2, 2, 4	147	649	2887	—	56783	20303, 2, 4	150	533
2877	—	56531	203, 2, 2002, 2	380	907	2888	—	56807	20304, 2, 3	148	511
—	2856	56533	203, 2, 20000000	613	993	—	2870	56809	203040020	377	525
2878	—	56543	203, 2, 205	86	491	2889	—	56813	203040000	310	539
—	2857	56569	203, 2, 5, 20	297	433	—	2871	56821	203050000	271	447
2879	—	56591	203004, 4	114	481	—	2872	56827	2030602	109	313
2880	—	56597	2030030000	520	837	2890	—	56843	204, 5002	160	407
—	2858	56599	203003003	203	723	—	2873	56857	204, 4, 2, 20	323	455
—	2859	56611	20300203, 2	331	751	2891	—	56873	204, 300020	430	593
—	2860	56629	203002, 20000	587	957	2892	—	56891	204, 3, 302	194	537
2881	—	56633	203002, 3, 20	498	715	—	2874	56893	204, 3, 400	339	433
—	2861	56659	203000002, 2	437	1041	2893	—	56897	204, 2050	256	301
2882	—	56663	20300000003	270	977	2894	—	56909	204, 202, 200	408	695
—	2862	56671	2030000005	103	579	—	2875	56911	204, 202, 4	121	529
2883	—	56681	20300000000	632	877	2895	—	56921	204, 2002, 20	470	667
2884	—	56687	2030000204	142	671	—	2876	56923	204, 200202	273	743
—	2863	56701	2030000500	259	479	—	2877	56929	204, 2, 40	335	411
2885	—	56711	203002, 4, 3	170	549	—	2878	56941	204, 2, 20000	397	687

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2886	57193	20520020	345	479	—	2900	57487	3, 503, 4	73	311
2914	—	57203	20503, 2, 2	174	425	—	2901	57493	3, 50200000	357	527
2915	—	57221	206, 4000	186	289	2925	—	57503	3, 502, 5	54	289
—	2887	57223	205, 4, 3	83	269	2926	—	57527	3, 500203	124	461
—	2888	57241	206, 2, 2, 20	255	361	—	2902	57539	3, 5003, 20	283	407
2916	—	57251	206003, 2	152	347	2927	—	57557	3, 5, 2000000	360	583
—	2889	57259	206000002	175	459	—	2903	57559	3, 5, 20003	137	497
2917	—	57269	206020000	244	399	—	2904	57571	3, 5, 3, 2	169	389
—	2890	57271	2060203	89	333	2928	—	57587	3, 5, 4, 2, 2	150	367
—	2891	57283	207, 4, 2	95	213	2929	—	57593	3, 5, 5, 20	182	265
2918	—	57287	207, 3, 3	72	239	—	2905	57601	3, 4070	125	141
—	2892	57301	207000000	199	323	—	2906	57637	3, 40202000	395	623
2919	—	57329	209, 30	90	119	2930	—	57641	3, 40200020	440	607
—	2893	57331	209, 2, 2	61	151	—	2907	57649	3, 402, 2, 30	363	469
2920	—	57347	3, 11, 2	34	71	2931	—	57653	3, 402, 20000	408	665
—	2894	57349	3, 10, 000	65	99	—	2908	57667	3, 40004, 2	209	463
—	2895	57367	3, 8003	53	187	—	2909	57679	3, 40002, 4	119	521
—	2896	57373	3, 8, 300	103	181	2932	—	57689	3, 400002, 20	460	553
2921	—	57383	3, 702, 3	72	241	—	2910	57697	3, 4002, 40	325	399
2922	—	57389	3, 700200	166	285	—	2911	57709	3, 40020200	383	663
—	2897	57397	3, 7, 20000	185	301	2933	—	57713	3, 4003, 30	338	441
2923	—	57413	3, 603000	192	299	2934	—	57719	3, 400303	132	499
—	2898	57427	3, 60002, 2	167	397	—	2912	57727	3, 4007	29	219
—	2899	57457	3, 6, 3, 30	199	259	2935	—	57731	3, 4, 2, 5, 2	158	345
2924	—	57467	3, 6, 402	98	275	2936	—	57737	3, 4, 2, 3020	358	487
—	2913	57751	3, 4, 2, 2003	171	613	—	2916	57793	3, 4, 3, 50	223	265
—	2914	57773	3, 4, 2000200	410	707	—	2917	57803	3, 4, 3, 2002	236	611
—	2915	57781	3, 4, 2020000	423	691	—	2918	57809	3, 4, 30030	346	443
—	2916	57787	3, 4, 20302	197	549	—	2919	57829	3, 4, 4, 2000	301	479
—	2917	57791	3, 4, 206	42	281	—	2920	57839	3, 4, 404	68	327
—	2918	57847	3, 4, 503	81	311	—	2921	57901	3, 30300200	395	679
—	2919	57853	3, 4, 700	107	201	—	2922	57917	3, 303, 400	238	467
—	2920	57859	3, 307, 2	101	215	—	2923	57923	3, 30204, 2	232	513
—	2921	57881	3, 304, 2, 20	336	473	—	2924	57943	3, 30200003	219	791
—	2922	57899	3, 30300002	284	741	—	2925	57947	3, 30200202	304	827
—	2923	57973	3, 302, 30000	435	713	—	2926	57977	3, 302, 4, 20	350	507
—	2924	57991	3, 30004, 3	167	537	—	2927	57993	3, 30002, 300	416	737
—	2925	58027	3, 300000002	403	1055	—	2928	58013	3, 300000002	403	1055

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	N'		
2949	—	58031	3, 3, 00000004	154	711	—	2937	58243	3, 3, 3, 5, 2	175	383	—	2950	58549	3, 2, 0000200000	623	1017	
2950	—	58043	3, 3, 00000302	272	757	2963	—	58271	3, 3, 3, 2, 5	76	413	—	2951	58567	3, 202, 2, 3, 3	219	721	
2951	—	58049	3, 3, 0002, 50	318	377	—	2938	58309	3, 3, 4, 3, 0000	321	503	—	2952	58573	3, 202, 2, 2, 2, 000	559	903	
—	2926	58057	3, 3, 0002, 2020	541	741	2964	—	58313	3, 3, 4, 2, 0002	235	609	—	—	58579	3, 202, 2, 0002, 2	401	957	
2952	—	58061	3, 3, 0002, 2, 000	482	823	—	2939	58321	3, 3, 4, 0030	341	437	2975	—	58601	3, 202, 3, 0002	536	745	
2953	—	58067	3, 3, 0002, 002, 2	364	869	2965	—	58337	3, 3, 5, 4, 0	222	275	—	2954	58603	3, 202, 3, 0002	327	863	
2954	—	58073	3, 3, 0002, 2, 0	528	751	—	2940	58363	3, 3, 7, 02	83	239	2976	—	58613	3, 202, 4, 0000	408	671	
—	2927	58099	3, 3, 004, 2, 2	233	571	2966	—	58367	3, 3, 10	10	103	2977	—	58631	3, 2, 0005, 3	152	483	
2955	—	58109	3, 3, 00600	174	325	—	2941	58369	3, 2, 0090	97	107	—	2955	58657	3, 2, 0002, 040	463	561	
—	2928	58111	3, 3, 008	23	197	2967	—	58379	3, 2, 00002	144	365	2978	—	58661	3, 2, 0002, 020000	632	997	
—	2929	58129	3, 3, 2, 3, 0300	385	487	2968	—	58391	3, 2, 005003	124	439	2979	—	58679	3, 2, 0002, 2, 03	240	889	
—	2930	58147	3, 3, 2, 2, 023, 2	293	665	—	2942	58393	3, 2, 005, 2, 20	305	429	—	2956	58687	3, 2, 0002, 6	71	453	
2956	—	58151	3, 3, 2, 2, 022, 3	214	721	2969	—	58403	3, 2, 0403, 2	218	493	—	—	2957	58693	3, 2, 0000030000	585	913
—	2931	58153	3, 3, 2, 2, 000020	563	777	—	2943	58411	3, 2, 0400002	265	691	—	2958	58699	3, 2, 000002002	443	1143	
2957	—	58169	3, 3, 2, 2, 3, 20	438	629	—	2944	58417	3, 2, 04, 2, 30	359	463	—	—	2959	58711	3, 2, 0000000003	301	1089
—	2932	58171	3, 3, 2, 2, 3, 02	247	685	2970	—	58427	3, 2, 04, 3, 02	198	547	2980	—	58727	3, 2, 00002, 2, 3	274	937	
—	2933	58189	3, 3, 2, 2, 002, 200	491	837	2971	—	58439	3, 2, 0303, 3	178	581	2981	—	58733	3, 2, 00002, 02000	592	1025	
2958	—	58193	3, 3, 2, 0000030	524	660	—	2945	58441	3, 2, 0302020	487	665	—	2960	58741	3, 2, 00003, 00000	565	927	
2959	—	58199	3, 3, 2, 000003	234	847	2972	—	58451	3, 2, 0300002, 2	346	823	2982	—	58757	3, 2, 002, 4, 000	430	667	
—	2934	58207	3, 3, 2, 0005	89	501	—	2946	58453	3, 2, 0300000000	561	907	2983	—	58763	3, 2, 002, 3, 002	342	877	
2960	—	58211	3, 3, 2, 02, 3, 2	300	689	—	2947	58477	3, 2, 032, 20200	447	773	—	2961	58771	3, 2, 002, 2, 002, 2	403	955	
2961	—	58217	3, 3, 2, 0200020	544	755	2973	—	58481	3, 2, 03, 3, 30	400	521	2984	—	58787	3, 2, 00003, 2	376	857	
2962	—	58229	3, 3, 2, 0300000	432	709	2974	—	58511	3, 2, 0203, 4	138	589	—	2962	58789	3, 2, 00002, 00000	647	1023	
—	2935	58231	3, 3, 2, 0303	155	587	—	2948	58537	3, 2, 0200000020	697	963	—	—	2963	58831	3, 2, 003, 2, 4	139	617
—	2936	58237	3, 3, 2, 0500	221	409	—	2949	58543	3, 2, 020000004	105	701	2985	—	58889	3, 2, 2, 2, 5020	310	419	

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	2964	58897	3, 2, 2, 4, 30	351	443	—	2974	59107	3, 2, 203, 3, 2	291	671
2986	—	58901	3, 2, 2, 4, 30000	426	685	—	2975	59113	3, 2, 203000	517	719
2987	—	58907	3, 2, 2, 4, 200	242	651	—	2976	59119	3, 2, 20304	113	541
—	2965	58909	3, 2, 2, 4, 300	317	559	3001	—	59123	3, 2, 204, 2, 2	250	613
2988	—	58913	3, 2, 2, 3040	358	433	3002	—	59141	3, 2, 3, 5000	278	429
—	2966	58921	3, 2, 2, 30000	549	757	—	2977	59149	3, 2, 3, 4, 200	333	563
2989	—	58937	3, 2, 2, 3, 20	440	631	3003	—	59159	3, 2, 3, 3003	182	649
2990	—	58943	3, 2, 2, 3, 6	58	365	—	2978	59167	3, 2, 3, 3, 5	79	419
—	2967	58963	3, 2, 2, 20000, 2	413	983	3004	—	59183	3, 2, 3, 2004	134	615
2991	—	58967	3, 2, 2, 200003	256	925	—	2979	59197	3, 2, 3, 2, 400	299	543
2992	—	58979	3, 2, 2, 2, 2, 3, 2	338	775	3005	—	59207	3, 2, 3, 3003, 3	196	643
2993	—	58991	3, 2, 2, 2, 204	140	659	—	2980	59209	3, 2, 3, 30000, 2	533	729
2994	—	58997	3, 2, 2, 2, 3, 30000	502	823	3006	—	59219	3, 2, 3, 30000, 2	368	877
2295	—	59009	3, 2, 2, 20000	270	311	—	2981	59221	3, 2, 3, 30000000	595	963
—	2968	59011	3, 2, 2005, 2	229	499	—	2982	59233	3, 2, 302, 40	375	461
2996	—	59021	3, 2, 2, 2003, 200	482	817	—	2983	59239	3, 2, 302, 2, 3	203	695
—	2969	59023	3, 2, 2, 2003, 4	147	629	3007	—	59243	3, 2, 3, 300000, 2	320	843
2970	—	59029	3, 2, 2, 200200000	653	1053	—	2984	59263	3, 2, 307	31	241
2997	—	59051	3, 2, 2, 200000000	448	1173	3008	—	59273	3, 2, 4, 3000	362	493
—	2971	59053	3, 2, 2, 200000000	619	1067	—	2985	59281	3, 2, 4, 2030	369	469
2998	—	59063	3, 2, 2, 200000000	236	879	3009	—	59333	3, 2, 5, 3000	280	439
2999	—	59069	3, 2, 2, 200000000	366	667	—	2986	59341	3, 2, 5, 2, 200	287	491
—	2972	59077	3, 2, 2, 200, 3000	503	787	3010	—	59351	3, 2, 50003	128	467
—	2973	59083	3, 2, 2, 200, 2000	373	965	3011	—	59357	3, 2, 50300	218	391
3000	—	59093	3, 2, 2, 200000000	640	1037	—	2987	59359	3, 2, 505	45	263
—	2964	58897	3, 2, 2, 4, 30	351	443	—	2974	59107	3, 2, 203, 3, 2	291	671
—	2965	58909	3, 2, 2, 4, 300	317	559	3001	—	59123	3, 2, 204, 2, 2	250	613
—	2966	58921	3, 2, 2, 30000	549	757	—	2977	59149	3, 2, 3, 4, 200	333	563
—	2967	58963	3, 2, 2, 20000, 2	413	983	3004	—	59183	3, 2, 3, 2004	134	615
—	2968	59011	3, 2, 2005, 2	229	499	—	2982	59233	3, 2, 302, 40	375	461
—	2969	59023	3, 2, 2, 2003, 4	147	629	3007	—	59243	3, 2, 3, 300000, 2	320	843
—	2970	59029	3, 2, 2, 200200000	653	1053	—	2984	59263	3, 2, 307	31	241
—	2971	59053	3, 2, 2, 200000000	619	1067	—	2985	59281	3, 2, 4, 2030	369	469
—	2972	59077	3, 2, 2, 200, 3000	503	787	3010	—	59351	3, 2, 50003	128	467
—	2973	59083	3, 2, 2, 200, 2000	373	965	3011	—	59357	3, 2, 50300	218	391
—	2974	59107	3, 2, 203, 3, 2	291	671	—	2975	59113	3, 2, 203000	517	719
—	2975	59113	3, 2, 203000	517	719	—	2976	59119	3, 2, 20304	113	541
—	2976	59119	3, 2, 20304	113	541	—	2977	59149	3, 2, 3, 4, 200	333	563
—	2977	59149	3, 2, 3, 4, 200	333	563	—	2978	59167	3, 2, 3, 3, 5	79	419
—	2978	59167	3, 2, 3, 3, 5	79	419	—	2979	59197	3, 2, 3, 2, 400	299	543
—	2979	59197	3, 2, 3, 2, 400	299	543	—	2980	59209	3, 2, 3, 30000, 2	533	729
—	2980	59209	3, 2, 3, 30000, 2	533	729	—	2981	59221	3, 2, 3, 30000000	595	963
—	2981	59221	3, 2, 3, 30000000	595	963	—	2982	59233	3, 2, 302, 40	375	461
—	2982	59233	3, 2, 302, 40	375	461	—	2983	59239	3, 2, 302, 2, 3	203	695
—	2983	59239	3, 2, 302, 2, 3	203	695	—	2984	59263	3, 2, 307	31	241
—	2984	59263	3, 2, 307	31	241	—	2985	59281	3, 2, 4, 2030	369	469
—	2985	59281	3, 2, 4, 2030	369	469	—	2986	59341	3, 2, 5, 2, 200	287	491
—	2986	59341	3, 2, 5, 2, 200	287	491	—	2987	59359	3, 2, 505	45	263
—	2987	59359	3, 2, 505	45	263	—	2988	59367	3, 2, 505, 2, 2	244	343
—	2988	59367	3, 2, 505, 2, 2	244	343	—	2989	59407	3007, 4	53	219
—	2989	59407	3007, 4	53	219	—	2990	59417	3006, 2, 20	244	343
—	2990	59417	3006, 2, 20	244	343	—	2991	59441	3005, 2, 30	294	379
—	2991	59441	3005, 2, 30	294	379	—	2992	59467	3004, 20002	259	667
—	2992	59467	3004, 20002	259	667	—	2993	59473	300400030	401	511
—	2993	59473	300400030	401	511	—	2994	59497	3004, 20020	451	625
—	2994	59497	3004, 20020	451	625	—	2995	59509	3004, 30000	373	611
—	2995	59509	3004, 30000	373	611	—	2996	59539	3004, 4, 20	302	437
—	2996	59539	3004, 4, 20	302	437	—	2997	59557	30030000000	559	883
—	2997	59557	30030000000	559	883	—	2998	59581	3003000000	616	851
—	2998	59581	3003000000	616	851	—	2999	59611	3003, 20202	303	827
—	2999	59611	3003, 20202	303	827	—	3000	59617	3003, 3, 40	353	435

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	Exponenten	\bar{N}	N
3024	—	59621	3003, 3, 2000	460	731	3037	—	59921	300004030	386	487	—	3022	60169
3025	—	59657	3003, 3, 3002	296	781	—	3013	59929	300004, 2, 20	451	535	—	60209	30002, 2, 30
—	—	59659	3003, 3, 2000	403	690	3038	—	59951	300003004	148	675	—	60217	30002, 2, 3, 20
3026	—	59651	300206, 2	168	361	3039	—	59957	300003, 2, 0000	574	935	—	60223	30002, 2, 6
—	—	59659	300204002	261	665	—	3014	59971	30000204, 2	307	679	3054	60251	300020002
3027	—	59663	300204, 4	118	497	3040	—	59981	30000202, 200	596	1015	3055	60257	3000202, 40
3028	—	59669	3002030000	540	869	3041	—	59999	300002005	112	625	—	60259	3000202, 3, 2
—	—	3003	59671 300203003	211	751	—	3015	60013	300002, 20200	589	1019	—	6026	60271
3029	—	59693	3002020200	576	991	3042	—	60017	300002, 3, 30	524	683	—	6027	60289
3030	—	59699	300202, 2, 2, 2	390	941	3043	—	60029	300002, 500	300	553	3056	60293	30003, 4000
—	—	3004	59707 300202, 302	297	823	—	3016	60037	3000004, 0000	481	745	3057	60317	30003, 2, 300
3031	—	59723	30020002002	426	1099	3044	—	60041	3000003020	604	821	—	60328	60331
3032	—	59729	3002000030	648	827	3045	—	60077	3000003000	720	1241	—	6039	60337
—	—	3005	59743 300200005	111	623	3046	—	60083	30000002, 2, 2	474	1147	—	6039	60343
3033	—	59747	3002002, 3, 2	376	863	3047	—	60089	300000003, 20	626	901	3058	60353	30004, 50
3034	—	59753	3002002020	684	949	—	3017	60091	30000000302	351	977	—	60373	30004000000
3035	—	59771	300200402	240	677	3048	—	60101	3000002, 3000	590	923	3059	60383	3000405
—	—	3006	59779 3002, 2, 5, 2	233	599	—	3018	60103	3000002, 3, 3	257	847	—	60397	300050200
—	—	3007	59791 3002, 2, 3, 4	147	631	3049	—	60107	3000002, 2002	438	1133	3060	60413	3000500
—	—	3008	59797 3002, 2, 20000	649	1047	—	3019	60127	300000205	105	601	—	60427	302, 6002
—	—	3009	59809 3002, 2004	477	581	—	3020	60133	3000003, 2000	583	927	3061	60443	302, 5, 202
—	—	3010	59833 3002, 203, 20	513	739	—	3021	60139	3000030002	373	985	3062	60449	302, 4040
—	—	3011	59863 3002, 30003	219	797	3050	—	60149	30000040000	460	757	—	60457	302, 400020
3036	—	59879	3002, 4, 2, 3	176	607	3051	—	60161	30002, 70	214	243	—	60493	302, 302, 200
—	—	3012	59887 3002, 404	97	467	3052	—	60167	30002, 5, 3	156	497	3063	60497	302, 300030

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
3064	—	60509	302, 300300	388	691	—	3048	60763	302000000202	391	1065	—	3060	61051	303, 2, 402	185	521
3065	—	60521	302, 3, 20020	536	743	3077	—	60773	3020002, 2000	622	987	—	3061	61057	3030060	223	257
3066	—	60527	302, 3, 204	122	573	3078	—	60779	302000000200	406	1069	—	3060	61091	303000003, 2	314	715
3067	—	60539	302, 3, 402	196	551	—	3049	60793	3020004, 20	421	611	—	3062	61099	30300000002	367	961
—	3036	60589	302, 2, 400200	589	1015	—	3050	60811	30202, 3002	317	813	3091	—	61121	30302, 50	284	337
—	3037	60601	302, 2003, 20	515	741	3079	—	60821	30202, 2000000	608	981	—	3063	61129	30302, 2020	481	659
—	3038	60607	302, 2006	63	415	—	3051	60859	302020302	265	739	—	3064	61141	30302000000	519	841
3068	—	60811	302, 2, 2, 4, 2	278	619	3080	—	60869	30203, 3000	422	661	3092	—	61151	3030205	72	413
3069	—	60817	302, 2, 2, 2020	582	797	3081	—	60887	302030003	198	721	—	3065	61153	30303, 40	307	379
3070	—	60823	302, 2, 2, 2, 4	152	671	—	3052	60889	3020302, 20	467	665	3093	—	61169	30304, 30	292	383
—	3039	60831	302, 2, 20003	241	875	3082	—	60899	30204, 3, 2	228	527	3094	—	61211	304, 3, 202	202	545
—	3040	60837	302, 2, 20300	419	749	—	3053	60901	30204, 2000	385	613	3095	—	61223	304, 202, 3	164	553
3071	—	60647	302, 2, 3, 2, 3	204	701	3083	—	60913	30205, 30	273	359	—	3066	61231	304, 2004	103	473
—	3041	60649	302, 2, 30020	523	727	—	3054	60917	302050000	288	475	3096	—	61253	304003000	340	531
3072	—	60659	302, 2, 4, 2, 2	256	627	—	3055	60919	3020503	101	389	—	3067	61261	304002, 200	363	619
—	3042	60661	302, 2, 40000	397	653	3084	—	60923	3020602	116	333	3097	—	61283	30402, 3, 2	218	501
—	3043	60679	302005, 3	145	461	—	3056	60937	303, 5020	267	361	—	3068	61291	304020002	241	635
3073	—	60689	30200300	450	569	—	3057	60943	303, 5, 4	79	331	—	3069	61297	30403, 30	287	375
—	3044	60703	302003, 5	93	491	3085	—	60953	303, 4, 2, 20	350	493	3098	—	61331	305, 202, 2	196	465
3074	—	60719	302002004	160	733	—	3058	60961	303, 3040	305	369	—	3070	61333	305, 200000	319	515
—	3045	60727	302002, 203	227	841	3086	—	61001	303, 20200	494	675	—	3071	61339	305, 2, 202	173	469
—	3046	60733	302002, 400	361	655	3087	—	61007	303, 202, 4	132	577	3099	—	61343	305, 2, 5	50	273
3075	—	60737	302000050	376	443	—	3059	61027	303, 2, 2, 3, 2	283	649	—	3072	61357	305000200	281	485
—	3047	60757	3020000000000	741	1199	3088	—	61031	303, 2, 2, 2, 3	200	683	—	3073	61363	30502, 2, 2	181	439
3076	—	60761	302000000, 20	674	957	3089	—	61043	303, 2, 3, 2, 2	268	653	3100	—	61379	306, 4, 2	112	251

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3113	62191	4, 200304	101 483	3151	—	62501	400402000	332 523	—	3137	62791	4000003, 3	217 711			
3137	—	62201	4, 2005, 20	268 391	3152	—	62507	400400002	232 605	3163	—	62801	4000000030	568 725			
3138	—	62207	4, 2008	22 189	—	3124	62533	400303000	351 547	3164	—	62819	4000002, 3, 2	328 753			
3139	—	62213	4, 2, 2, 5000	260 401	—	3125	62539	400302002	269 693	—	3138	62827	40000020002	365 961			
3140	—	62219	4, 2, 2, 4002	216 551	3153	—	62549	40030000000	488 789	—	3139	62851	40002, 5, 2	199 435			
—	3114	62233	4, 2, 2, 3, 2, 20	419 591	—	3126	62563	4003, 2, 3, 2	251 575	3165	—	62861	40002, 3, 200	412 699			
3141	—	62273	4, 2, 20050	296 349	—	3127	62581	4003, 30000	379 621	—	3140	62869	40002, 200000	551 889			
3142	—	62297	4, 2, 20002, 20	526 747	3154	—	62591	4003, 7	32 233	3166	—	62873	40002, 2, 2, 20	514 727			
—	3115	62299	4, 2, 2000202	305 831	3155	—	62597	400204000	334 517	3167	—	62897	4000202, 30	468 607			
3143	—	62303	4, 2, 20005	84 473	3156	—	62603	400203002	270 691	3168	—	62903	400020203	190 709			
—	3116	62311	4, 2, 202, 2, 3	199 681	—	3128	62617	400202, 2, 20	499 705	3169	—	62921	40003, 2020	450 617			
—	3117	62323	4, 2, 203, 2, 2	261 637	3157	—	62627	40020003, 2	316 719	3170	—	62927	40003, 2, 4	116 515			
3144	—	62327	4, 2, 20203	146 553	3158	—	62633	40020000020	600 829	—	3141	62929	400030030	413 529			
—	3118	62347	4, 2, 3, 3002	235 603	3159	—	62639	400200004	142 655	3171	—	62939	400030202	246 673			
3145	—	62351	4, 2, 3, 3, 4	102 439	—	3129	62653	4002000400	307 559	3172	—	62969	40006, 20	200 293			
—	3119	62383	4, 2, 30004	111 515	—	3130	62659	4002, 2, 4, 2	243 541	—	3142	62971	4000602	107 307			
—	3120	62401	4, 2, 4, 50	209 249	—	3131	62683	4002, 20202	289 789	3173	—	62981	402, 6000	192 295			
3146	—	62417	4, 2, 40030	316 405	3160	—	62687	4002, 205	78 445	—	3143	62983	402, 6, 3	89 281			
—	3147	62423	4, 2, 40003	138 503	—	3132	62701	4002, 30200	381 661	3174	—	62987	402, 5002	164 417			
3148	—	62459	4, 2, 702	76 219	3161	—	62723	400006, 2	152 327	—	3144	62989	402, 5, 200	239 403			
—	3121	62467	4008, 2	77 163	—	3133	62731	400004002	235 599	3175	—	63029	402, 3, 20000	418 681			
—	3122	62473	4006020	195 263	—	3134	62743	400003003	189 673	—	3145	63031	402, 3, 203	155 573			
3149	—	62477	4006, 200	186 313	3162	—	62753	400002040	392 475	3176	—	63059	402, 20002, 2	334 795			
3150	—	62483	400502, 2	168 395	—	3135	62761	40000200020	595 821	—	3146	63067	402, 200202	287 781			
—	3123	62497	4004040	241 291	—	3136	62773	400002, 20000	549 895	—	3147	63073	402, 2, 2, 40	353 433			

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3148	63079	402, 2, 2, 2, 3	193	659	3188	—	63377	404, 2030	284	361	—	3176	63607	5, 4, 303	89	335
—	3149	63097	402, 2, 4, 20	345	471	3189	—	63389	404, 2, 300	236	419	—	—	63611	5, 4, 402	110	309
—	3150	63103	402, 2, 7	33	245	—	—	63391	404, 2, 5	53	289	—	—	63617	5, 3060	142	163
3177	—	63113	402003020	420	571	—	—	63397	404002000	323	511	—	—	63629	5, 303, 200	258	437
—	3151	63127	402002003	203	727	—	—	63409	40402, 30	275	357	—	—	63647	5, 302, 5	58	311
3178	—	63131	402002, 202	288	779	3190	—	63419	4040302	140	391	—	3177	63649	5, 300040	269	327
3179	—	63149	40200000200	496	855	—	—	63421	4040400	169	309	—	—	63659	5, 30000002	248	649
3180	—	63179	40202, 2002	298	771	—	—	63439	405, 2, 4	63	281	—	—	63667	5, 3002, 2, 2	227	549
3181	—	63197	402020300	336	601	3191	—	63443	405002, 2	160	383	—	—	63671	5, 300203	132	491
—	3152	63199	4020205	71	407	—	—	63463	406, 2, 3	73	253	—	—	63689	5, 3, 2, 2020	344	471
—	3153	63211	402030002	251	663	3192	—	63467	40600002	112	297	—	—	63691	5, 3, 2, 2002	217	561
—	3154	63241	403, 4020	281	381	3193	—	63473	407, 30	122	161	—	—	63697	5, 3, 20030	323	413
—	3155	63247	403, 4, 4	81	343	—	—	63487	4011	5	59	—	—	63703	5, 3, 20003	143	519
—	3156	63277	403, 2, 200200	377	649	—	—	63493	5, 8000	87	133	—	—	63709	5, 3, 20300	249	445
3182	—	63281	403, 2, 2, 30	358	463	—	—	63499	5, 7002	77	195	—	—	63719	5, 3, 3, 2, 3	122	419
3183	—	63299	403004, 2	196	435	3194	—	63521	5, 5040	150	181	—	—	63727	5, 3, 304	69	329
3184	—	63311	403002, 4	110	483	3195	—	63527	5, 502, 3	88	295	—	—	63737	5, 3, 5, 20	186	271
—	3157	63313	403000030	397	507	3196	—	63533	5, 500200	202	347	—	—	63743	5, 3, 8	16	133
3185	—	63317	40300000000	464	751	—	—	63541	5, 5, 20000	223	363	—	—	63761	5, 203030	284	359
—	3158	63331	40302, 3, 2	225	517	—	—	63559	5, 403, 3	99	323	—	—	63773	5, 203, 300	252	445
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	3159	63337	403020020	407	595	—	—	63577	5, 4002, 20	287	407	—	—	63781	5, 20202000	381	601
3186	—	63347	40303, 2	206	593	3197	—	63587	5, 4, 2, 3, 2	162	371	—	—	63793	5, 202, 2, 30	349	451
3187	—	63353	40304, 20	254	369	—	—	63599	5, 4, 2, 2000	277	439	—	—	63799	5, 202, 203	145	537
—	3160	63361	404, 60	149	173	3198	—	63599	5, 4, 204	68	319	—	—	63803	5, 202, 302	188	521
—	3161	63367	404, 4, 3	101	327	—	—	63601	5, 4, 3, 30	225	293	—	—	63809	5, 200050	242	285

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3187	63833	5, 2, 2, 2, 4	113	495	—	3199	64153	5, 2, 2, 2, 2, 2	421	595
3213	—	63839	5, 2, 2, 2, 2, 5	70	393	3226	—	64157	5, 2, 2, 2, 2, 3, 2	320	567
—	3188	63841	5, 2, 2, 2, 2, 4	307	377	—	3200	64171	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	309	809
—	3189	63853	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	361	625	3227	—	64187	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	208	579
3214	—	63857	5, 2, 2, 2, 2, 3	318	415	—	3201	64189	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	253	461
3215	—	63863	5, 2, 2, 2, 2, 3, 2	124	469	3228	—	64217	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	400	569
—	3190	63901	5, 2, 2, 2, 2, 3, 2	287	509	3229	—	64223	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	62	355
—	3191	63907	5, 2, 2, 2, 2, 3, 2	233	531	—	3202	64231	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	141	485
—	3192	63913	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	439	607	—	3203	64237	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	299	519
3216	—	63929	5, 2, 2, 2, 2, 3, 2	320	461	3230	—	64271	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	74	313
—	3193	63949	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	299	511	—	3204	64279	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	131	467
3217	—	63977	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	278	387	3231	—	64283	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	188	507
—	3194	63997	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	93	175	3232	—	64301	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	348	599
3218	—	64027	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	72	227	—	3205	64303	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	97	445
3219	—	64013	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	194	327	3233	—	64319	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	40	257
3220	—	64019	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	172	405	—	3206	64327	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	143	469
—	3195	64033	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	239	289	—	3207	64333	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	349	595
3221	—	64037	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	328	517	3234	—	64373	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	304	499
—	3196	64063	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	39	245	—	3208	64381	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	155	287
3222	—	64067	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	184	407	—	3209	64399	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	75	323
—	3197	64081	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	385	491	3235	—	64403	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	202	479
3223	—	64091	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	240	653	3236	—	64433	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	272	353
3224	—	64109	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	352	609	3237	—	64439	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	110	411
—	3198	64133	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	151	425	3238	—	64451	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	122	273
3225	—	64151	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	174	623	—	3210	64453	5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	215	337

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3225	64783	6004, 4	59	249	—	3236	65071	7, 3004	51	233	3275	—	65327	8, 2004	42	193
3250	—	64793	6003, 2, 20	256	361	—	3237	65089	7, 2050	125	147	—	3250	65353	8002020	163	223
3251	—	64811	600200002	204	533	3264	—	65099	7, 202002	140	361	3276	—	65357	8002, 200	146	249
3252	—	64819	6002, 2, 30	270	349	—	3238	65101	7, 202, 200	199	339	—	3251	65371	8000202	95	259
—	3226	64849	600000030	311	397	3265	—	65111	7, 200003	96	347	3277	—	65381	802, 2000	148	235
3253	—	64853	60000000000	364	589	—	3239	65119	7, 2005	37	207	3278	—	65393	803, 30	114	149
3254	—	64871	60002, 2, 3	126	431	3266	—	65123	7, 2, 2, 3, 2	126	289	—	3252	65407	807	9	71
3255	—	64877	600020002	272	471	3267	—	65139	7, 2, 20020	230	319	—	3253	65413	9, 4000	83	129
—	3227	64879	6000204	73	345	3268	—	65141	7, 2, 30000	186	305	—	3254	65419	9, 3002	65	167
—	3228	64891	6000402	113	319	3269	—	65147	7, 2, 402	82	231	3279	—	65423	9, 3, 4	28	121
3256	—	64901	602, 4000	194	301	—	3240	65167	7003, 4	53	227	—	3255	65437	9, 2, 300	85	151
3257	—	64919	602, 2003	114	409	3270	—	65171	700202, 2	144	341	3280	—	65447	90002, 3	48	163
—	3229	64921	602, 2, 20	275	389	—	3241	65173	700200000	235	379	—	3256	65449	90002, 3	125	173
—	3230	64927	602, 2, 5	47	255	—	3242	65179	7002, 202	129	349	—	3257	65479	10, 3, 3	31	103
3258	—	64937	6020000020	316	437	3271	—	65183	7002, 5	38	205	—	3258	65497	1002, 20	75	107
—	3231	64951	6020203	101	377	—	3243	65203	70002, 2, 2	145	351	3281	—	65519	1104	12	59
—	3232	64969	603, 2020	237	325	3272	—	65213	7000400	130	237	—	3259	65521	12, 30	37	49
3259	—	64997	604, 2000	184	293	—	3244	65239	7020003	85	309	3282	—	65537	0150	16	17
3260	—	65003	6040002	116	307	—	3245	65257	7030020	179	249	—	3260	65539	014, 2	15	31
—	3233	65011	605, 2, 2	89	219	3273	—	65267	704, 2, 2	86	211	3283	—	65543	013, 3	14	43
3261	—	65027	7, 7, 2	50	107	—	3246	65269	7040000	133	219	—	3261	65551	011, 4	13	53
—	3234	65029	7, 6000	93	143	—	3247	65287	8, 5, 3	41	131	—	3262	65557	01100000	63	101
3262	—	65033	7, 5002	122	165	—	3248	65293	8, 4, 200	107	181	—	3263	65563	011, 202	37	99
—	3235	65053	7, 4, 300	123	217	3274	—	65309	8, 3, 300	108	191	3284	—	65579	0100002	58	151
3263	—	65063	7, 302, 3	80	269	—	3249	65323	8, 20002	109	285	—	3264	65581	01000200	81	139

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
3366	—	67247	05, 2000004	134	619	3380	—	67511	05, 40203	118	441	—	3354	67777	0403, 2, 50	283	335
—	3334	67261	05, 2000400	287	523	3381	—	67523	05, 5, 4, 2	130	291	—	3355	67783	0403, 2, 3, 3	179	589
3367	—	67271	05, 202, 3, 3	172	567	—	3345	67531	05, 5, 2002	167	433	—	3356	67789	0403, 2, 2, 200	433	739
—	3335	67273	05, 202, 2020	465	637	—	3346	67537	05, 50030	241	309	—	3357	67801	0403, 202, 20	479	681
3368	—	67289	05, 20202, 20	452	643	3382	—	67547	05, 50202	142	389	—	3358	67807	0403, 205	75	427
3369	—	67307	05, 2030002	248	655	3383	—	67559	05, 6, 2, 3	80	277	—	3359	67819	0403, 30002	271	715
—	3336	67339	05, 3, 4002	183	467	—	3347	67567	05, 604	43	209	3396	—	67829	0403, 40000	340	559
3370	—	67343	05, 3, 4, 4	82	347	3384	—	67577	05, 8, 20	104	153	—	3360	67843	040206, 2	155	333
3371	—	67349	05, 3, 30000	372	599	—	3348	67579	05, 802	55	159	3397	—	67853	040204, 200	350	591
—	3337	67359	05, 3, 20020	447	617	3385	—	67589	0408000	112	171	—	3361	67867	040203, 202	281	757
3372	—	67391	05, 3, 2, 6	44	283	3386	—	67601	0406030	182	229	3398	—	67883	04020200002	384	1003
—	3338	67399	05, 3003, 3	157	515	3387	—	67607	0406003	88	311	—	3362	67891	040202, 2, 2, 2	361	871
3373	—	67409	05, 3000030	408	521	3388	—	67619	040503, 2	158	357	3399	—	67901	040202, 400	338	613
—	3339	67411	05, 300002, 2	295	703	3389	—	67631	0405004	76	345	—	3363	67927	04020000003	269	973
3374	—	67421	05, 3000300	320	571	—	3349	67651	040404, 2	169	373	3400	—	67931	04020000202	372	1013
3375	—	67437	05, 302, 3, 2	232	533	3390	—	67679	0404005	64	355	—	3364	67933	04020000300	475	847
—	3340	67439	05, 302, 2000	395	627	—	3350	67699	0404, 3, 2, 2	215	523	—	3365	67939	0402002, 3, 2	349	801
3376	—	67433	05, 3020020	420	583	3391	—	67709	0404, 500	180	331	3401	—	67943	0402002, 2, 3	246	841
—	3341	67447	05, 30303	119	451	—	3351	67723	040303002	249	637	—	3366	67957	04020030000	509	835
3377	—	67453	05, 30500	169	313	3392	—	67733	04030200000	492	793	3402	—	67961	0402004, 20	406	589
—	3343	67477	05, 4, 200000	355	573	—	3352	67741	040302, 300	353	625	3403	—	67967	0402007	40	303
3377	—	67481	05, 4, 2, 20	330	467	3393	—	67751	04030002, 3	214	723	3404	—	67979	0402, 2, 3002	314	805
—	3344	67489	05, 40040	255	311	3394	—	67757	04030000200	480	827	—	3367	67987	0402, 2, 202, 2	371	879
3378	—	67493	05, 4002000	342	541	—	3353	67759	040300004	133	613	—	3368	67993	0402, 2, 2, 2, 20	565	799
3379	—	67499	05, 4000002	230	603	3395	—	67763	0403002, 2, 2	318	769	—	3369	68023	0402, 20203	211	787

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3370	68041	0402, 3, 2020	507	695	—	3383	68389	04002, 202000	609	901	—	3394	68683	04, 2, 302002	321	827
—	3371	68053	0402, 3, 000000	541	877	3417	—	68399	04002, 2004	162	743	3431	—	68687	04, 2, 302, 4	136	593
—	3372	68059	0402, 3, 0202	279	763	—	3384	68437	04002, 000000	731	1183	3432	—	68699	04, 2, 300202	310	843
—	3373	68071	0402, 4, 2, 3	165	569	—	3385	68443	04002, 000202	385	1049	3433	—	68711	04, 2, 3, 2, 3	212	723
3405	—	68087	0402, 503	108	415	3418	—	68447	04002, 00005	106	597	—	3395	68713	04, 2, 3, 20020	549	761
3406	—	68099	040007, 2	130	277	—	3386	68449	04002, 2, 40	463	569	3434	—	68729	04, 2, 3, 4, 20	364	527
3407	—	68111	040005, 4	96	401	—	3387	68473	04002, 04, 20	407	591	—	3396	68737	04, 2, 2060	255	293
—	3374	68113	040004, 30	307	463	3419	—	68477	04002, 0500	262	485	—	3397	68743	04, 2, 204, 3	179	575
3408	—	68141	040003, 00200	502	863	3420	—	68483	04003, 5, 2	206	451	—	3398	68749	04, 2, 203, 200	461	781
3409	—	68147	040003, 2, 2, 2	344	829	3421	—	68489	04003, 3020	462	629	—	3399	68767	04, 2, 202, 5	103	553
—	3375	68161	040002, 050	355	417	—	3388	68491	04003, 3002	295	757	3435	—	68771	04, 2, 20003, 2	374	851
3410	—	68171	040002, 2002	400	1031	3422	—	68501	04003, 200000	562	907	3436	—	68777	04, 2, 20000020	710	981
3411	—	68207	040002, 204	152	715	3423	—	68507	04003, 2, 202	306	829	—	3400	68791	04, 2, 200203	233	867
—	3376	68209	040002, 3, 30	501	653	—	3389	68521	04003, 000020	595	823	3437	—	68813	04, 2, 2, 2, 200	536	915
3412	—	68213	040002, 3, 0000	546	895	3424	—	68531	04003, 02, 2, 2	328	795	3438	—	68819	04, 2, 2, 2002, 2	406	969
3413	—	68219	040002, 402	242	681	—	3390	68539	04003, 0302	239	667	—	3401	68821	04, 2, 2, 2000000	655	1061
—	3377	68227	0400005, 2	253	551	3425	—	68543	04003, 06	50	339	—	3402	68863	04, 2, 2, 8	27	227
—	3378	68239	0400003, 4	163	697	3426	—	68567	04004, 0003	172	627	3439	—	68879	04, 2004, 4	124	523
3414	—	68201	04000002, 000	736	1103	—	3391	68581	04005, 2000	327	521	—	3403	68881	04, 2003, 0	459	593
3415	—	68279	0400000203	264	983	3427	—	68597	04006, 0000	238	393	3440	—	68891	04, 2003, 202	318	857
—	3379	68281	04000003, 20	601	865	—	3392	68611	04, 2, 8, 2	93	197	3441	—	68897	04, 2002, 040	458	555
—	3380	68311	04000020003	275	999	3428	—	68633	04, 2, 5, 2, 20	322	453	—	3404	68899	04, 2002, 03, 2	361	819
—	3381	68329	0400003, 0020	589	819	3429	—	68639	04, 2, 5, 5	60	311	3442	—	68903	04, 2002, 2, 3	264	889
3416	—	68351	0400008	28	241	—	3393	68659	04, 2, 4, 2, 2	267	643	3443	—	68909	04, 2002, 0000	598	1029
—	3382	68371	04002, 302, 2	341	805	3430	—	68669	04, 2, 4, 400	256	463	—	3405	68917	04, 2002, 2, 0000	641	1045

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3439	69859	0304, 3, 3, 2	255	587	—	3452	70141	0303, 700	157	295	—	3465	70393	0302005, 20	401	585
—	3440	69877	0304, 4, 0000	351	577	3498	—	70157	030205, 200	346	583	—	3466	70423	0302, 2, 3, 003	259	923
3486	—	69899	030304002	254	647	3499	—	70163	03020402, 2	308	785	—	3467	70429	0302, 2, 3, 000	485	857
3487	—	69911	030303003	206	733	—	3453	70177	030203040	431	531	3510	—	70439	0302, 2, 202, 3	306	1031
3488	—	69929	0303020020	656	905	3500	—	70181	03020302000	592	933	3511	—	70451	0302, 2, 2, 2, 2, 2	466	1125
—	3441	69931	03030200002	407	1063	—	3454	70183	03020302, 3	251	843	3512	—	70457	0302, 2, 2, 3, 20	626	899
3489	—	69941	030302, 20000	608	991	3501	—	70199	030203, 203	232	857	—	3468	70459	0302, 2, 2, 302	353	979
3490	—	69959	03030003, 3	244	799	—	3455	70201	030203, 3, 20	535	707	3513	—	70481	0302, 2000030	748	955
—	3442	69991	0303002, 2, 3	263	899	—	3456	70207	030203, 6	71	445	3514	—	70487	0302, 2000003	334	1209
—	3443	69997	03030020200	509	985	3502	—	70223	03020202, 4	194	847	—	3469	70489	0302, 20002, 20	795	1129
3491	—	70001	0303003, 30	502	655	3503	—	70229	03020200000000	828	1339	—	3470	70501	0302, 202, 20000	729	1157
—	3444	70003	0303003, 2, 2	349	851	—	3457	70237	03020200300	563	1003	—	3471	70507	0302, 2020002	475	1251
—	3445	70009	0303004, 20	435	631	3504	—	70241	030202, 2, 40	544	667	3515	—	70529	0302, 3, 60	295	343
3492	—	70019	0303, 2, 5, 2	234	511	—	3458	70249	030202, 20020	771	1069	—	3472	70537	0302, 3, 3020	559	761
—	3446	70039	0303, 2, 2003	253	907	3505	—	70271	030202, 7	52	383	—	3473	70549	0302, 3, 2000000	681	1099
—	3447	70051	0303, 2003, 2	377	859	3506	—	70289	03020002030	704	893	3516	—	70571	0302, 3000002	446	1169
3493	—	70061	0303, 2000200	606	1045	—	3459	70297	03020002, 2, 20	789	1115	—	3474	70573	0302, 3000200	615	1061
3494	—	70067	0303, 202, 2, 2	396	959	—	3460	70309	0302000020000	855	1331	3517	—	70583	0302, 30203	230	859
3495	—	70079	0303, 206	62	415	3507	—	70313	0302000000000000	940	1999	3518	—	70589	0302, 30400	352	643
—	3448	70099	0303, 3002, 2	367	877	—	3461	70321	030200002, 30	751	973	3519	—	70607	0302, 4, 2, 4	136	605
—	3449	70111	0303, 305	81	467	—	3462	70327	030200000203	307	1143	3520	—	70619	0302, 40202	286	783
—	3450	70117	0303, 4, 2000	443	705	—	3463	70351	0302002, 2, 4	203	897	—	3475	70621	0302, 40300	361	647
3496	—	70121	0303, 40020	462	643	3508	—	70373	0302003, 2000	656	1043	—	3476	70627	0302, 5, 3, 2	239	553
—	3451	70123	0303, 40002	281	743	3509	—	70379	03020030002	420	1109	—	3477	70639	0302, 504	89	431
3497	—	70139	0303, 602	138	395	—	3464	70381	03020030200	571	991	—	3478	70657	0300000	135	149

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3479	70663	30007, 3	107	335	—	3491	70951	30000202, 3	365	1329
3321	—	70667	3000602	200	507	—	3492	70957	3000020200	827	1323
—	3480	70687	30005, 5	79	409	—	3493	70969	300002, 3, 20	753	1081
3322	—	70709	30004, 20000	562	915	3534	—	70979	300000004, 2	448	993
—	3481	70717	30004, 400	339	613	—	3494	70981	300000003000	799	1347
—	3482	70729	3000302020	673	919	3535	—	70991	300000002, 4	254	1113
—	3483	70753	30003, 2, 40	515	631	3536	—	70997	30000000000000	1076	1741
3323	—	70769	30003, 3, 30	552	719	—	3495	70999	30000000003	411	1487
—	3484	70783	30003, 7	51	371	—	3496	71011	30000002, 3, 2	531	1219
3324	—	70793	3000203020	672	913	—	3497	71023	30000000204	217	1025
3325	—	70823	300020002, 3	366	1237	3537	—	71039	300000007	60	457
3326	—	70841	30002003, 20	718	1033	—	3498	71059	300002, 202, 2	549	1301
—	3485	70843	3000200302	403	1121	3538	—	71069	300002, 2, 300	632	1121
—	3486	70849	30002, 2, 50	477	565	3539	—	71081	30000200020	964	1333
3327	—	70853	30002, 2, 3000	690	1079	—	3499	71089	30000202, 30	761	987
—	3487	70867	30002, 2002, 2	551	1315	—	3500	71119	300003, 2, 4	189	839
3328	—	70877	30002, 20300	588	1051	3540	—	71129	30000302, 20	696	991
—	3488	70879	30002, 205	125	713	—	3501	71143	300004, 2, 3	235	811
—	3489	70891	30002, 30002	449	1185	3541	—	71147	3000040002	364	963
3329	—	70901	30002, 40000	560	921	3542	—	71153	300005, 30	410	539
3330	—	70913	3000070	282	319	—	3502	71161	300005, 20	327	479
3331	—	70919	300005, 3	208	661	—	3503	71167	300009	23	221
—	3490	70921	300004020	587	795	3543	—	71171	30002, 7, 2	170	363
3332	—	70937	300003, 2, 20	744	1049	—	3504	71191	30002, 4003	225	799
3333	—	70949	30000202000	864	1363	—	3505	71209	30002, 300020	739	1019

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
3592	—	72251	03, 2003, 302	338	935	3604	—	72551	03, 20202, 2, 3	310	1061
—	3558	72253	03, 2003, 400	417	755	—	3571	72559	03, 2020204	179	847
3593	—	72269	03, 200202, 200	724	1233	—	3572	72577	03, 203, 60	301	349
—	3559	72271	03, 200202, 4	215	939	—	3573	72613	03, 203002000	607	1055
—	3560	72277	03, 200200000000	917	1483	3605	—	72617	03, 2030000020	728	1007
3594	—	72287	03, 2002005	136	759	3606	—	72623	03, 2030004	170	789
—	3561	72307	03, 2002, 3, 2, 2	443	1079	—	3574	72643	03, 204, 4, 2	257	575
—	3562	72313	03, 2002, 4, 20	557	807	3607	—	72647	03, 204, 3, 3	196	649
—	3563	72337	03, 200002030	767	973	—	3575	72649	03, 204, 2020	527	723
3595	—	72341	03, 200002000000	916	1477	—	3576	72661	03, 204000000	553	897
3596	—	72353	03, 2000000040	688	837	3608	—	72671	03, 20405	74	431
—	3564	72367	03, 2000000004	241	1113	—	3577	72673	03, 205, 40	309	383
—	3565	72379	03, 2000000302	425	1183	—	3578	72679	03, 205, 2, 3	161	557
3597	—	72383	03, 2000006	92	609	3609	—	72689	03, 206, 30	274	361
—	3566	72421	03, 20003, 2000	705	1121	3610	—	72701	03, 20800	126	239
3598	—	72431	03, 2000304	162	775	3611	—	72707	03, 3, 8, 2	108	229
3599	—	72461	03, 202, 4, 200	494	835	3612	—	72719	03, 3, 6, 4	82	341
3600	—	72467	03, 202, 302, 2	424	1001	—	3579	72727	03, 3, 5003	151	535
—	3567	72469	03, 202, 300000	695	1119	—	3580	72733	03, 3, 5, 300	289	509
—	3568	72481	03, 202, 2040	555	673	—	3581	72739	03, 3, 403, 2	263	595
3601	—	72493	03, 202, 200200	721	1241	—	3582	72763	03, 3, 4, 302	237	655
3602	—	72503	03, 202, 2, 2, 30	686	887	3613	—	72767	03, 3, 4, 6	56	349
—	3569	72503	03, 202, 2, 203	284	1053	3614	—	72797	03, 3, 300300	452	805
3603	—	72533	03, 202000000000	904	1463	—	3583	72817	03, 3, 3, 3, 30	469	611
—	3570	72547	03, 20202, 3, 2	441	1013	—	3584	72823	03, 3, 3, 303	185	697

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3598	73063	03, 30002, 2, 3	295	1009	3638	—	73421	03, 402, 2, 200	476	813	—	3621	73681	03, 70030	219	281
3627	—	73079	03, 3000303	218	825	3639	—	73433	03, 40202, 20	518	737	—	3622	73693	03, 70300	161	289
3628	—	73091	03, 302, 5, 2	252	551	—	3612	73453	03, 403000	233	605	—	3623	73699	03, 8, 3, 2	103	239
3629	—	73121	03, 3020040	508	619	—	3613	73459	03, 404, 2, 2	223	547	—	3624	73709	03, 80200	144	251
3630	—	73127	03, 302002, 3	286	969	—	3614	73471	03, 408	21	185	—	3625	73721	03, 10, 20	86	127
3631	—	73133	03, 302000200	636	1097	—	3615	73477	03, 5, 5000	239	369	—	3626	73727	03, 13	4	53
—	3599	73141	03, 302020000	653	1067	—	3616	73483	03, 5, 4002	197	593	—	3627	73751	0208003	74	261
3632	—	73181	03, 3030300	388	695	3640	—	73517	03, 5, 200200	406	609	—	3628	73757	0208, 300	144	253
—	3600	73189	03, 304, 2000	439	699	3641	—	73523	03, 5, 2, 1, 2, 2	272	637	—	3629	73771	020700002	167	435
—	3601	73237	03, 4, 400000	411	661	3642	—	73529	03, 5, 2, 3, 20	364	533	—	3625	73783	0207, 203	97	357
—	3602	73243	03, 4, 4, 202	233	627	3643	—	73547	03, 5002002	280	723	—	3626	73819	020600202	205	557
3633	—	73259	03, 4, 300002	326	851	3644	—	73553	03, 5000030	422	539	—	3627	73823	0206005	58	321
3634	—	73277	03, 4, 3, 400	292	529	—	3617	73561	03, 50002, 20	447	635	—	3628	73847	0206, 303	112	421
3603	73291	03, 4, 202002	351	905	3645	—	73571	03, 502, 3, 2	238	547	—	3627	73849	0206, 4, 20	251	363	
—	3604	73303	03, 4, 200003	241	871	3646	—	73583	03, 50204	96	455	—	3628	73859	020505, 2	158	343
—	3605	73309	03, 4, 200300	427	761	3647	—	73589	03, 5030000	338	535	—	3628	73867	020503002	235	601
—	3606	73327	03, 4, 2, 204	131	617	—	3618	73597	03, 50500	171	317	—	3629	73877	02050200000	466	751
3635	—	73331	03, 4, 2, 3, 2, 2	300	731	3648	—	73607	03, 6, 4, 3	104	337	—	3629	73883	020502, 202	258	697
—	3607	73351	03, 4004, 3	173	557	—	3619	73609	03, 6, 3020	287	391	—	3629	73897	02050000020	535	739
3636	—	73361	03, 4002030	502	637	3649	—	73613	03, 6, 3, 200	262	445	—	3629	73907	0205002, 2, 2	304	735
—	3608	73363	03, 400202, 2	367	869	3650	—	73637	03, 6002000	338	519	—	3630	73939	0205, 2002, 2	319	761
—	3609	73369	03, 4002, 2, 20	561	793	3651	—	73643	03, 6000002	220	577	—	3630	73943	0205, 20003	196	711
3637	—	73379	03, 40003, 2	350	797	—	3620	73651	03, 602, 2, 2	195	473	—	3631	73951	0205, 205	73	415
—	3610	73387	03, 40000002	409	1071	3652	—	73673	03, 7, 2020	244	335	—	3631	73961	0205, 30020	434	603
—	3611	73417	03, 402, 2020	535	733	3653	—	73679	03, 7, 2, 4	62	277	—	3631	73973	0205, 40000	334	549

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3632	73999	020404, 4	111	467	—	3646	74257	020304030	421	531	—	3660	74527	0203, 2, 3, 5	117	619
—	3633	74917	020402040	417	505	3679	—	74279	02030302, 3	254	853	3690	—	74531	0203, 2, 203, 2	434	985
3668	—	74021	02040202000	570	899	—	3647	74287	020303004	163	743	—	3661	74551	0203, 1, 203	283	1049
3669	—	74027	020402020002	394	1029	—	3648	74293	020303, 20000	633	1031	3691	—	74561	0203, 20050	464	547
—	3634	74047	020402, 6	65	413	3680	—	74297	020303, 3, 20	542	777	3692	—	74567	0203, 2003, 3	298	977
3670	—	74051	02040004, 2	302	669	—	3649	74311	02030203, 3	269	879	3693	—	74573	0203, 2002, 200	728	1241
—	3635	74071	02040000003	279	1009	—	3650	74317	02030202, 200	663	1129	—	3662	74587	0203, 20000202	479	1305
—	3636	74077	02040000300	493	879	—	3651	74323	0203020002, 2	519	1335	3694	—	74597	0203, 202, 2000	758	1203
3671	—	74093	02040020200	554	959	—	3652	74353	020302, 3, 30	587	765	3695	—	74609	0203, 203, 30	592	773
3672	—	74099	02040003, 2, 2	340	829	3681	—	74357	020302, 30000	640	1049	—	3663	74611	0203, 203, 2, 2	411	1003
—	3637	74101	020400030000	531	871	3682	—	74363	020302, 402	284	799	—	3664	74623	0203, 207	49	377
—	3638	74131	0204, 2, 202, 2	393	931	—	3653	74377	02030003020	685	931	—	3665	74653	0203, 3, 2, 300	501	889
—	3639	74143	0204, 2, 2, 5	103	557	3683	—	74381	02030003, 200	632	1071	3696	—	74687	0203, 306	64	433
—	3640	74149	0204, 2002000	637	1007	—	3654	74383	02030003, 4	193	825	3697	—	74699	0203, 4, 2002	350	907
3673	—	74159	0204, 20004	164	759	3684	—	74411	0203000000002	594	1555	—	3666	74707	0203, 4002, 2	365	873
—	3641	74161	0204, 202, 30	553	717	—	3655	74413	0203000000000	821	1415	—	3667	74713	0203, 402, 20	523	745
—	3642	74167	0204, 20203	225	839	—	3656	74419	020300002, 2, 2	541	1309	3698	—	74717	0203, 40300	380	681
3674	—	74177	0204, 3, 50	324	385	3685	—	74441	02030002, 2020	798	1093	—	3668	74719	0203, 405	79	459
3675	—	74189	0204, 3, 200	484	827	—	3657	74449	02030020030	745	953	3699	—	74729	0203, 50020	440	613
—	3643	74197	0204, 3000000	583	945	3686	—	74453	0203000200000	866	1403	—	3669	74731	0203, 50002	267	707
3676	—	74201	0204, 302, 20	522	743	3687	—	74471	02030003, 2, 3	276	949	3700	—	74747	0203, 702	124	357
—	3644	74203	0204, 30202	301	823	3688	—	74489	0203005, 20	412	601	3701	—	74759	020207, 3	116	363
—	3645	74209	0204, 4, 40	339	419	3689	—	74507	0203, 2, 4002	336	857	—	3670	74761	020206020	333	449
3677	—	74219	0204, 40002	278	735	—	3658	74509	0203, 2, 4, 200	487	823	3702	—	74771	02020502, 2	288	677
3678	—	74231	0204, 503	118	453	—	3659	74521	0203, 2, 3, 2, 20	653	921	—	3671	74779	020205, 202	273	733

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3672	74797	e2e2e4e2e0	557	957	3715	—	75083	e2e2e0e0e2e2e2	674	1739	—	3598	75367	e2e2, 2, 2, 2, 2, 3	367	1253
—	3673	74821	e2e2e3e3e0e	609	949	—	3585	75109	e2e2e0e0e2, 2e0e	1009	1601	3727	—	75377	e2e2, 2, 2, 3, 3e	708	923
—	3674	74857	e2e2e3e2e0e	467	1203	—	3586	75133	e2e2e0e0e5e0e	443	819	3728	—	75389	e2e2, 2, 2, 5e0e	404	745
3703	—	74831	e2e2e3e2e, 4	198	863	3716	—	75149	e2e2e2e2, 3, 2e0e	748	1269	—	3599	75391	e2e2, 2, 2, 7	63	467
3704	—	74843	e2e2e3e2e2e	452	1229	3717	—	75161	e2e2e2e2, 2, 2, 2e	934	1321	3729	—	75401	e2e2, 2e2e2e2e	804	1093
—	3675	74857	e2e2e3, 2e2e2e	803	1113	3718	—	75167	e2e2e2e2, 2, 5	160	867	—	3700	75403	e2e2, 2e2e2e2e	515	1319
3705	—	74861	e2e2e3, 2e2e0e	676	1169	—	3587	75169	e2e2e2e2e4e0e	733	893	3730	—	75407	e2e2, 2e2e3, 4	226	967
—	3676	74869	e2e2e3, 3e0e0e	661	1083	—	3588	75181	e2e2e2e2e2e2e0e	919	1583	3731	—	75431	e2e2, 2e0e2e2, 3	426	1441
3706	—	74873	e2e2e3, 4, 2e	534	773	—	3589	75193	e2e2e2e2e3, 2e	785	1131	3732	—	75437	e2e2, 2e0e2e2e2e0e	932	1641
—	3677	74887	e2e2e2e2e, 3	265	851	3719	—	75209	e2e2e2e2e3, 2e2e	822	1127	3733	—	75479	e2e2, 2e2e2e2e3	374	1359
3707	—	74891	e2e2e2e2e3e2e	474	1213	—	3590	75211	e2e2e2e2e3, 2e2e2	517	1339	3734	—	75503	e2e2, 2e2e3e4	174	833
3708	—	74897	e2e2e2e2e2e3e	780	989	—	3591	75217	e2e2e2e3e0e3e	755	967	—	3701	75511	e2e2, 2e4e3	211	807
3709	—	74903	e2e2e2e2e2e2e3	362	1295	—	3592	75223	e2e2e2e3e0e3e3	331	1265	3735	—	75521	e2e2, 3, 7e	270	307
—	3678	74923	e2e2e2e2e2e2e2e2	653	1709	3720	—	75227	e2e2e2e3e2e2e2	450	1231	3736	—	75527	e2e2, 3, 5, 3	196	625
—	3679	74929	e2e2e2e2e2e2e2, 3e	847	1097	3721	—	75239	e2e2e2e2e4, 2, 3	264	911	3737	—	75533	e2e2, 3, 4, 2e0e	514	869
3710	—	74933	e2e2e2e2e2e2e2e2e2e	944	1541	—	3593	75253	e2e2e2e2e5e0e0e	487	803	3738	—	75539	e2e2, 3, 3e2, 2	440	1039
—	3680	74941	e2e2e2e2e2e4e0e	541	985	3722	—	75269	e2e2, 2, 6e0e0e	360	553	—	3702	75541	e2e2, 3, 3e0e0e0e	721	1161
—	3681	74959	e2e2e2e2, 2, 2, 4	235	1037	—	3594	75277	e2e2, 2, 5, 2e0e	449	757	—	3703	75553	e2e2, 3, 2e4e0e	573	695
3711	—	75011	e2e2e2e2e6, 2	272	585	—	3595	75289	e2e2, 2, 4, 2, 2e	627	883	3739	—	75557	e2e2, 3, 2e2e0e0e	780	1231
—	3682	75013	e2e2e2e2e5e0e0e	503	775	—	3596	75307	e2e2, 2, 3e0e0e2e	523	1365	—	3704	75571	e2e2, 3, 2, 2, 2	499	1205
3712	—	75017	e2e2e2e2e4e2e0e	652	883	3723	—	75323	e2e2, 2, 3, 3e2	382	1057	—	3705	75577	e2e2, 3, 2, 3, 2e0e	669	961
3713	—	75029	e2e2e2e2e3e0e0e0e	868	1397	3724	—	75329	e2e2, 2, 2e5e0e	508	597	—	3706	75583	e2e2, 3, 2, 6	85	547
—	3683	75037	e2e2e2e2e3, 3e0e	637	1125	—	3597	75337	e2e2, 2, 2e2e2e0e	901	1231	3740	—	75611	e2e2, 3e0e2e2e2e	484	1319
3714	—	75041	e2e2e2e2e2e4e0e	704	853	3725	—	75347	e2e2, 2, 2e0e2e2, 2	634	1509	3741	—	75617	e2e2, 3e2, 4e	580	713
—	3684	75079	e2e2e2e2e2e2e2e3, 3	391	1281	3726	—	75353	e2e2, 2, 2e2e2, 2e	938	1331	—	3707	75619	e2e2, 3e2, 3, 2	447	1027

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
3742	—	75629	2202, 3, 2020200	676	1171	—	3718	75931	2200302, 202	477	1289	—	3733	76213	220002, 2020000	991	1619
3743	—	75641	2202, 3, 4, 20	506	735	—	3719	75937	220030040	659	801	—	3734	76231	220002, 3, 3, 3	323	1067
3744	—	75653	2202, 4, 4000	454	705	3757	—	75941	22003002000	892	1409	—	3735	76243	220002, 3, 002, 2	577	1379
3745	—	75659	2202, 4, 3002	358	919	—	3720	75967	22003006	91	597	—	3736	76249	220002, 3, 02, 20	831	1183
—	3708	75679	2202, 4, 2, 5	107	583	—	3721	75979	22003, 2, 2002	535	1383	3767	—	76253	220002, 3, 0300	606	1085
3746	—	75683	2202, 4, 003, 2	380	867	3758	—	75983	22003, 2, 2, 4	232	979	3768	—	76259	220002, 4, 3, 2	410	947
3747	—	75689	2202, 4, 000020	712	985	3759	—	75989	22003, 2, 0000000	938	1503	—	3737	76261	220002, 4, 2, 000	693	1103
—	3709	75703	2202, 4, 0203	225	841	—	3722	75991	22003, 2, 0003	353	1281	3769	—	76283	220002, 6, 02	214	613
3748	—	75707	2202, 2, 40302	284	793	—	3723	75997	22003, 2, 0300	615	1099	3770	—	76289	2200008, 0	250	279
—	3710	75709	2202, 4, 0400	343	627	3760	—	76001	22003, 3, 40	594	695	—	3738	76303	2200005, 4	163	681
—	3711	75721	2202, 5, 2020	505	693	—	3724	76003	22003, 3, 3, 2	433	997	—	3739	76333	2200003, 00200	851	1463
3749	—	75731	2202, 5, 002, 2	328	785	3761	—	76031	22003, 8	40	331	3771	—	76343	2200003, 203	344	1271
3750	—	75743	2202, 5, 05	70	409	—	3725	76039	2200205, 3	229	727	3772	—	76367	220000202, 4	286	1249
3751	—	75767	2202, 7, 03	92	357	3762	—	76079	2200202004	258	1181	—	3740	76369	220000200030	1039	1325
3752	—	75773	2202, 9, 00	114	217	—	3726	76081	2200202, 2, 30	883	1141	3773	—	76379	2200002000202	648	1763
—	3712	75781	22008000	201	307	3763	—	76091	2200202, 3, 02	476	1319	—	3741	76387	2200002, 2, 3, 2	619	1419
—	3713	75787	22007002	179	453	—	3727	76099	220020004, 2	595	1119	3774	—	76403	2200002, 3, 2, 2	590	1437
—	3714	75793	22006030	325	409	3764	—	76103	220020003, 3	396	1297	3775	—	76421	22000040000	778	1205
3753	—	75797	2200600000	398	639	—	3728	76123	22002000202	643	1751	—	3742	76423	220000004, 3	351	1129
3754	—	75821	2200500200	478	821	—	3729	76129	22002002, 40	781	959	—	3743	76441	220000002, 20	1147	1621
3755	—	75833	22005, 3, 20	456	653	—	3730	76147	22002003, 2, 2	583	1373	3776	—	76463	220000000004	322	1487
—	3715	75853	2200402, 200	587	999	3765	—	76157	2200200500	454	839	—	3744	76471	2200000000203	445	1657
3756	—	75869	2200400300	514	915	—	3731	76159	220020007	69	523	3777	—	76481	220000002, 50	662	785
—	3716	75883	22004, 20002	441	1159	3766	—	76163	22002, 2, 5, 2	374	817	3778	—	76487	220000002, 3, 3	416	1371
—	3717	75913	2200303020	681	925	—	3732	76207	22002, 2, 0004	265	1227	3779	—	76493	220000002, 2, 000	1002	1711

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3745	76507	222222222222	633	1729	—	3758	76801	22222, 92	169	187	3806	—	77093	222222222222	992	1555
3780	—	76511	22222222225	170	973	—	3759	76819	22222, 522, 2	327	769	—	3769	77101	222222222222	949	1633
—	3746	76519	22222222223, 2, 3	387	1331	3792	—	76829	22222, 5, 322	406	715	—	3770	77137	222222222222	1049	1339
—	3747	76537	22222222225, 22	575	839	—	3760	76831	22222, 5, 5	97	503	3807	—	77141	222222222222	1228	1987
3781	—	76541	222222222222	358	669	—	3761	76837	22222, 422222	643	1013	3808	—	77153	22222222222, 42	784	963
—	3748	76543	222222222222	47	405	3793	—	76847	22222, 42222	176	801	—	3771	77167	222222222222	247	1167
—	3749	76561	22222222222, 3222	777	983	3794	—	76871	22222, 323, 3	298	973	3809	—	77171	22222222222, 2, 2	562	1371
—	3750	76579	22222222222, 223, 2	589	1337	—	3762	76873	22222, 322222	815	1113	—	3772	77191	22222222222, 4, 3	297	959
—	3751	76597	22222222222, 2, 222222	1037	1601	3795	—	76883	22222, 32222, 2	578	1375	3810	—	77201	22222222222, 2232	848	1077
—	3752	76603	22222222222, 2, 322	495	1373	3796	—	76907	22222, 3, 22222	542	1425	3811	—	77213	22222222222, 2, 322	712	1263
3782	—	76607	22222222222, 2, 6	112	719	3797	—	76913	22222, 3, 3, 32	664	865	3812	—	77237	2222222222222222	948	1549
3783	—	76631	222222222222222222	466	1687	3798	—	76919	22222, 3, 323	262	987	—	3773	77239	2222222222222222	347	1295
3784	—	76649	222222222222222222	1080	1499	3799	—	76943	22222, 223, 4	226	965	3813	—	77243	2222222222222222	440	1227
—	3753	76651	222222222222222222	661	1741	3800	—	76949	22222, 222222222222	1008	1625	3814	—	77249	22222222222, 52	490	583
3785	—	76667	222222222222222222	372	1051	3801	—	76961	22222, 222222222222	764	929	3815	—	77261	22222222222, 2, 222	726	1241
3786	—	76673	222222222222222222	408	473	—	3763	76963	22222, 22222, 2	599	1363	—	3774	77263	22222222222, 2, 4	211	937
3787	—	76679	222222222222222222	278	899	3802	—	76991	22222, 22222, 22222	104	685	3816	—	77267	2222222222222222	540	1291
3788	—	76697	222222222222222222	870	1231	3803	—	77003	22222, 2, 2, 2222	606	1567	—	3775	77269	2222222222222222	869	1409
—	3754	76717	222222222222222222	841	1451	—	3764	77017	22222, 2, 222, 22	943	1341	3817	—	77279	2222222222222222	118	683
3789	—	76733	222222222222222222	480	877	—	3765	77023	22222, 2, 225	147	839	3818	—	77291	2222222222222222	404	1069
—	3755	76753	222222222222222222	653	837	—	3766	77029	22222, 2, 3, 22222	821	1305	—	3776	77317	22222222222, 6222	339	521
3790	—	76757	222222222222222222	754	1223	—	3767	77041	22222, 2, 4, 32	613	803	—	3777	77323	22222222222, 5222	289	735
—	3756	76771	222222222222222222	331	743	—	3768	77047	22222, 2, 423	233	889	3819	—	77339	22222222222, 4, 222	346	931
—	3757	76777	222222222222222222	559	779	3804	—	77069	22222222222, 222	634	1071	—	3778	77347	22222222222, 323, 2	403	913
3791	—	76781	222222222222222222	458	797	3805	—	77081	22222222222, 2, 22	856	1207	3820	—	77351	22222222222, 322, 3	296	995

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
3853	—	78167	02, 2, 3, 0000003	3681331	4071457	—	3833	78487	02, 2, 2, 0002003	4071457	433
3854	—	78173	02, 2, 3, 0000300	6501159	3867	—	78497	02, 2, 2, 0000040	790 961	317	
3855	—	78179	02, 2, 3, 002, 3, 2	4781097	3868	—	78509	02, 2, 2, 00000200	10021727	243	
3856	—	78191	02, 2, 3, 00204	196 925	—	3834	78511	02, 2, 2, 0000004	2771279	576	
—	3822	78193	02, 2, 3, 003, 30	643 839	—	3835	78517	02, 2, 2, 00000000	10431703	426	
3857	—	78203	02, 2, 3, 00402	306 863	3869	—	78539	02, 2, 2, 002, 2, 002	6121583	610	
—	3823	78229	02, 2, 3, 2, 2, 000000	8351347	—	3836	78541	02, 2, 2, 002, 2, 2, 00	8651477	201	
3858	—	78233	02, 2, 3, 2, 2, 2, 207801103	—	3837	78553	02, 2, 2, 00202, 20	9471347	3882	126	
—	3824	78241	02, 2, 3, 2, 0040	615 749	3870	—	78569	02, 2, 2, 0030020	8581193	275	
—	3825	78259	02, 2, 3, 202, 2, 2	5051223	—	3838	78571	02, 2, 2, 0030002	5231381	370	
—	3826	78277	02, 2, 3, 3, 3, 000	601 941	—	3839	78577	02, 2, 2, 004, 30	605 793	397	
—	3827	78283	02, 2, 3, 3, 2, 002	4431147	—	3840	78583	02, 2, 2, 00403	229 875	268	
—	3828	78301	02, 2, 3, 3, 0300	491 879	3871	—	78593	02, 2, 2, 2, 70	304 345	709	
—	3829	78307	02, 2, 3, 4, 3, 2	333 769	—	3841	78607	02, 2, 2, 2, 4, 4	181 765	614	
3859	—	78311	02, 2, 3, 4, 2, 3	230 793	3872	—	78623	02, 2, 2, 2, 3, 5	140 741	675	
3860	—	78317	02, 2, 3, 4, 0200	484 841	—	3842	78643	02, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	5771393	295	
3861	—	78341	02, 2, 2, 06000	346 531	—	3843	78649	02, 2, 2, 2, 2, 3, 20	7751113	790	
3862	—	78347	02, 2, 2, 05002	298 757	3873	—	78653	02, 2, 2, 2, 2, 4, 00	536 973	634	
—	3830	78367	02, 2, 2, 04, 5	113 589	—	3844	78691	02, 2, 2, 2, 02, 3, 2	5291215	410	
3863	—	78401	02, 2, 2, 02050	510 599	—	3845	78697	02, 2, 2, 2, 020020	9591331	349	
—	3831	78427	02, 2, 2, 0200202	5511499	3874	—	78707	02, 2, 2, 2, 03, 2, 2	4881191	742	
3864	—	78437	02, 2, 2, 02, 2, 2, 000	9001427	3875	—	78713	02, 2, 2, 2, 04, 20	604 877	376	
—	3832	78439	02, 2, 02, 2, 2, 3	3731273	—	3846	78721	02, 2, 2, 3, 60	365 423	105	
3865	—	78467	02, 2, 2, 0005, 2	366 797	3876	—	78737	02, 2, 2, 3, 2, 030	706 897	464	
3866	—	78479	02, 2, 2, 0003, 4	2361009	3877	—	78779	02, 2, 2, 3, 0302	358 999	403	

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3858	79087	02, 2002, 304	193	921	3906	—	79349	02, 200050000	510	841	—	3881	79627	02, 203, 4002	353	901
3892	—	79103	02, 2002, 8	44	369	—	3869	79357	02, 2000700	233	439	3919	—	79631	02, 203, 4, 4	158	669
—	3859	79111	02, 20005, 3	247	785	3907	—	79367	02, 202, 6, 3	172	543	—	3882	79633	02, 203, 3030	595	753
3893	—	79133	02, 20003, 300	680	1201	3908	—	79379	02, 202, 402, 2	408	961	—	3883	79657	02, 203, 200020	857	1183
3894	—	79139	02, 2000203, 2	592	1343	—	3870	79393	02, 202, 3040	563	681	—	3884	79669	02, 203, 2, 200000	783	1277
—	3860	79147	02, 2000200002	707	1847	3909	—	79397	02, 202, 302000	772	1217	—	3885	79687	02, 203003, 3	299	981
3895	—	79151	02, 20002004	274	1255	—	3871	79399	02, 202, 302, 3	327	1099	3920	—	79691	02, 203002002	514	1327
—	3861	79153	02, 20002, 2, 30	937	1211	—	3872	79411	02, 202, 3, 2, 2, 2	509	1227	—	3886	79693	02, 203002, 200	729	1243
—	3862	79159	02, 20002, 203	389	1441	—	3873	79423	02, 202, 3, 6	91	573	3921	—	79697	02, 203000030	776	991
3896	—	79181	02, 2000002, 200	1018	1735	3910	—	79427	02, 202, 204, 2	428	947	—	3887	79699	02, 20300002, 2	561	1337
3897	—	79187	02, 200000002, 2	788	1877	3911	—	79433	02, 202, 202020	920	1257	3922	—	79757	02, 204, 3, 200	500	849
3898	—	79193	02, 20000002, 20	1160	1647	3912	—	79451	02, 202, 200202	550	1513	3923	—	79769	02, 204, 2, 2, 20	614	869
—	3863	79201	02, 200002, 40	815	1001	3913	—	79481	02, 202, 2, 4, 20	630	913	—	3888	79777	02, 2040040	473	577
3899	—	79229	02, 20000500	470	869	3914	—	79493	02, 202004000	650	1007	—	3889	79801	02, 20403, 20	493	711
—	3864	79231	02, 2000007	71	541	—	3874	79531	02, 2020000002	607	1825	3924	—	79811	02, 205, 4, 2	238	533
3900	—	79241	02, 20002, 3020	862	1173	—	3875	79537	02, 2020002, 30	809	1165	—	3890	79813	02, 205, 3000	419	657
3901	—	79259	02, 20002, 2, 202	578	1565	—	3876	79549	02, 202000400	569	1037	3925	—	79817	02, 205, 2020	486	667
—	3865	79273	02, 2000000020	1139	1575	3915	—	79559	02, 20202, 3, 3	340	1121	3926	—	79823	02, 205, 2, 4	124	553
—	3866	79279	02, 20000004	267	1237	—	3877	79561	02, 20202, 2020	919	1259	3927	—	79829	02, 205000000	506	821
3902	—	79283	02, 2000202, 2	632	1531	—	3878	79579	02, 202020202	515	1407	3928	—	79841	02, 206, 40	278	345
3903	—	79301	02, 20003, 3000	740	1159	3916	—	79589	02, 20203, 2000	764	1215	—	3891	79843	02, 206, 3, 2	211	489
—	3867	79309	02, 20003, 2, 200	767	1311	3917	—	79601	02, 20204, 30	562	737	3929	—	79847	02, 206, 2, 3	144	499
3904	—	79319	02, 20003003	348	1267	—	3879	79609	02, 20205, 20	461	673	—	3892	79861	02, 2070000	251	415
—	3868	79333	02, 20004, 2000	679	1081	3918	—	79613	02, 2020600	286	535	—	3893	79867	02, 20802	97	281
3905	—	79337	02, 200040020	706	983	—	3880	79621	02, 203, 5000	427	659	—	3894	79873	02, 3, 100	103	113

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
3930	—	7989	e2, 3, 6e3e	282	355	3945	—	80177	e2, 3, 2e2, 2, 3	722	933	3956	—	80471	e2, 3e2e2e2e3	364	1315
3931	—	7990	e2, 3, 6, 3e	262	461	3905	80191	e2, 3, 2e2, 6	89	567	—	3919	—	80473	e2, 3e2e2e2, 2e	869	1233
—	3895	79903	e2, 3, 6, 5	63	325	3946	—	80207	e2, 3, 2e2e2, 4	234	1025	3957	—	80489	e2, 3e2e, 2e2e	882	1223
3932	—	79907	e2, 3, 5e3, 2	242	547	—	3906	80209	e2, 3, 2e2e2e3e	847	1081	—	3920	80491	e2, 3e2e, 2e2e2	541	1423
—	3896	79939	e2, 3, 4e4, 2	255	563	—	3907	80221	e2, 3, 2e2e2e3e	669	1193	3958	—	80513	e2, 3e2e2e6e	390	449
3933	—	79943	e2, 3, 4e3, 3	202	659	3947	—	80231	e2, 3, 2e2e, 2, 3	346	1183	—	3921	80527	e2, 3e2e2e3, 4	213	911
3934	—	79957	e2, 3, 4e5	96	533	—	3908	80233	e2, 3, 2e2e2e2e	893	1239	3959	—	80537	e2, 3e2e2e2, 2, 2e	888	1255
3935	—	79973	e2, 3, 4, 2e2e	566	897	—	3909	80239	e2, 3, 2e2e2e4	201	949	—	3922	80557	e2, 3e2e2e2e2e2e	901	1553
3936	—	79979	e2, 3, 4, 2e2e2	374	983	—	3910	80251	e2, 3, 2e2e4e2	313	883	3960	—	80567	e2, 3e2e2e2e2e3	344	1281
—	3897	79987	e2, 3, 4, 3, 2	321	781	—	3911	80263	e2, 3, 2, 2, 4, 3	247	797	—	3923	80599	e2, 3e2e2e2e2e3	357	1297
3937	—	79997	e2, 3, 4, 5e	268	493	3948	—	80273	e2, 3, 2, 2, 2e3e	708	899	3961	—	80603	e2, 3e2e2e2e2e2	488	1333
—	3898	79999	e2, 3, 4, 7	43	311	3949	—	80279	e2, 3, 2, 2, 2e2e3	326	1169	—	3924	80611	e2, 3e2e2e3, 3, 2	429	989
3938	—	80021	e2, 3, 3e2e2e2e	724	1167	—	3912	80287	e2, 3, 2, 2, 2, 5	135	731	3962	—	80621	e2, 3e2e2e3e2e	632	1097
3939	—	80039	e2, 3, 3e2e2, 3	314	1061	3950	—	80309	e2, 3, 2, 2e2e2e2e	800	1307	3963	—	80627	e2, 3e2e2e4, 2, 2	370	907
3940	—	80051	e2, 3, 3e2e2, 2, 2	466	1127	—	3913	80317	e2, 3, 2, 2e4e	451	823	—	3925	80629	e2, 3e2e2e4e2e	573	943
—	3899	80071	e2, 3, 3, 2, 3, 3	261	859	—	3914	80329	e2, 3, 2, 3, 2e2e	701	961	3964	—	80651	e2, 3e2, 2e2e, 4e2e	350	893
—	3900	80077	e2, 3, 3, 2, 2, 2e	631	1077	—	3915	80341	e2, 3, 2, 3e2e2e2e	747	1211	3965	—	80657	e2, 3e2, 3e2e, 3e3e	592	749
—	3901	80107	e2, 3, 3, 3e2e2	393	1037	—	3916	80347	e2, 3, 2, 3e2e2	385	1053	3966	—	80669	e2, 3e2, 3, 3e	520	919
3941	—	80111	e2, 3, 3e4	142	677	3951	—	80363	e2, 3, 2, 4e2e2	352	931	—	3926	80671	e2, 3e2, 3, 5	121	641
3942	—	80141	e2, 3, 2e4, 2e	498	841	3952	—	80369	e2, 3, 2, 5, 3e	398	523	—	3927	80677	e2, 3e2, 2e2e2e	775	1223
3943	—	80147	e2, 3, 2e3e2, 2	432	1019	3953	—	80387	e2, 3e2e7, 2	174	371	3967	—	80681	e2, 3e2, 2e2e2e	860	1187
—	3902	80149	e2, 3, 2e3e2e2e	709	1141	—	3917	80407	e2, 3e2e4e2e3	233	827	—	3928	80683	e2, 3e2, 2e2e2e2	533	1393
3944	—	80153	e2, 3, 2e3, 2, 2e	676	953	3954	—	80429	e2, 3e2e3e2e	666	1145	3968	—	80687	e2, 3e2, 2e2e4	206	945
—	3903	80197	e2, 3, 2e2e2, 3	333	1121	3955	—	80447	e2, 3e2e3, 6	82	515	—	3929	80701	e2, 3e2, 2, 4e	461	837
—	3904	80173	e2, 3, 2e2e2e2e	755	1299	—	3918	80449	e2, 3e2e2e5e	469	551	—	3930	80713	e2, 3e2e2e2e2e	827	1131

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	3931	80737	02, 30202, 40	585	719	—	3945	81001	02, 4, 3, 20020	611	847	3993	—	81233	02, 400000030	698	891
3969	—	80747	02, 30202002	500	1317	—	3946	81013	02, 4, 3, 30000	501	821	3994	—	81239	02, 400000003	312	1129
—	3934	80749	02, 30202000	683	1183	3980	—	81017	02, 4, 3, 4, 20	404	585	3995	—	81281	02, 402, 60	286	331
—	3933	80761	02, 30204, 20	513	745	—	3947	81019	02, 4, 3, 402	233	627	—	3957	81283	02, 402, 5, 2	241	527
3970	—	80777	02, 303, 3020	578	787	3981	—	81023	02, 4, 3, 7	42	307	3996	—	81293	02, 402, 3, 200	498	845
—	3934	80779	02, 303, 3002	369	947	—	3948	81031	02, 4, 204, 3	197	633	3997	—	81299	02, 402, 202, 2	408	967
3971	—	80783	02, 303, 3, 4	160	689	3982	—	81041	02, 4, 202030	578	733	—	3958	81307	02, 402, 2, 202	363	983
3972	—	80789	02, 303, 200000	702	1133	—	3949	81043	02, 4, 20202, 2	453	1001	—	3959	81331	02, 40202, 2, 2	395	957
—	3935	80803	02, 303003, 2	395	901	3983	—	81047	02, 4, 202003	268	959	—	3960	81343	02, 40206	61	411
—	3936	80809	02, 303000020	741	1025	—	3950	81049	02, 4, 202, 2, 20	649	917	—	3961	81349	02, 403, 3000	459	719
3973	—	80819	02, 30302, 2, 2	408	989	3984	—	81071	02, 4, 200004	184	849	3998	—	81353	02, 403, 2020	536	735
3974	—	80831	02, 30306	62	421	3985	—	81077	02, 4, 20020000	694	1133	3999	—	81359	02, 403, 2, 4	138	613
—	3937	80833	02, 304, 50	323	385	3986	—	81083	02, 4, 200302	326	907	4000	—	81371	02, 4030202	292	799
3975	—	80849	02, 3040030	486	623	—	3951	81097	02, 4, 2, 2, 2020	655	897	—	3962	81373	02, 4030300	369	661
—	3938	80863	02, 30405	75	437	3987	—	81101	02, 4, 2, 2, 2, 200	584	997	4001	—	81401	02, 406, 20	234	343
3976	—	80897	02, 4, 90	120	133	3988	—	81119	02, 4, 2, 205	100	571	—	3963	81409	02, 5, 80	131	147
3977	—	80909	02, 4, 6, 200	256	431	3989	—	81131	02, 4, 2, 30002	358	945	—	3964	81421	02, 5, 5, 200	265	447
—	3939	80911	02, 4, 6, 4	81	337	—	3952	81157	02, 4003000	351	541	—	3965	81439	02, 5, 4, 5	67	351
—	3940	80917	02, 4, 50000	379	609	—	3953	81163	02, 4004002	293	747	—	3966	81457	02, 5, 3, 2, 30	405	523
—	3941	80923	02, 4, 5, 202	217	583	3990	—	81173	02, 400300000	602	969	—	3967	81463	02, 5, 3, 203	169	625
—	3942	80929	02, 4, 4040	327	395	—	3954	81181	02, 4003, 300	441	779	4002	—	81509	02, 5, 2, 2, 2000	500	793
3978	—	80933	02, 4, 402000	450	709	3991	—	81197	02, 40020000	634	1091	—	3968	81517	02, 5, 2, 20200	449	777
—	3943	80953	02, 4, 4, 3, 20	411	589	—	3955	81199	02, 4002004	177	811	4003	—	81527	02, 5, 2, 303	156	589
3979	—	80963	02, 4, 304, 2	262	579	3992	—	81203	02, 4002, 2, 2	428	1033	4004	—	81533	02, 5, 2, 500	226	417
—	3944	80989	02, 4, 300300	443	789	—	3956	81223	02, 400003, 3	267	875	—	3969	81547	02, 5003002	283	725

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
4005	—	81531	02, 5003, 4	124 531	—	3980	81817	02, 7, 2, 2, 20	279 395	—	3995	—	3995	82051	000605, 2	135 293	
—	3970	81533	02, 500203	461 585	4020	—	81839	02, 70004	72 335	4030	—	4030	—	82067	00060202, 2	244 577	
—	3971	81559	02, 5002003	213 763	—	3981	81847	02, 70203	97 363	4031	—	4031	—	82073	000602, 2, 20	376 531	
4006	—	81593	02, 5002, 202	302 817	—	3982	81853	02, 70400	147 269	—	3996	—	3996	82129	0006, 20030	381 487	
4007	—	81599	02, 5000040	410 499	4021	—	81869	02, 8, 2, 200	184 315	4032	—	4032	—	82139	0006, 20202	232 633	
4008	—	81611	02, 502, 2002	308 797	—	3983	81883	02, 80202	109 299	—	3997	—	3997	82141	0006, 20300	295 537	
—	3972	81619	02, 502002, 2	327 781	4022	—	81899	02, 90002	90 239	—	3998	—	3998	82153	0006, 30020	375 521	
4009	—	81629	02, 5020300	346 619	—	3984	81901	02, 90200	121 211	4033	—	4033	—	82163	0006, 4, 2, 2	186 455	
—	3973	81637	02, 503, 2000	403 641	—	3985	81919	02, 14	3 43	—	3999	—	3999	82171	0006, 502	123 349	
4010	—	81647	02, 50304	92 441	4023	—	81929	00010020	102 137	—	4000	—	4000	82183	000505, 3	117 371	
—	3974	81649	02, 504, 30	295 387	—	3986	81931	00010002	67 169	—	4001	—	4001	82189	000504, 200	311 525	
—	3975	81667	02, 6, 6, 2	117 253	—	3987	81937	0009030	125 157	4034	—	4034	—	82193	000503030	368 465	
4011	—	81671	02, 6, 5, 3	98 313	—	3988	81943	0009003	61 215	—	4002	—	4002	82207	000503, 5	77 495	
4012	—	81677	02, 6, 4, 200	256 433	4024	—	81953	0008040	142 171	4035	—	4035	—	82217	00050200020	556 767	
4013	—	81689	02, 6, 3, 20	338 477	—	3989	81967	0008004	55 249	—	4003	—	4003	82219	00050200002	345 901	
4014	—	81701	02, 6, 202000	382 603	4025	—	81971	0008, 2, 2, 2	136 327	4036	—	4036	—	82223	000502004	134 613	
—	3976	81703	02, 6, 202, 3	161 543	—	3990	81973	0008, 20000	217 353	—	4004	—	4004	82231	000502, 203	191 707	
4015	—	81707	02, 6, 20002	262 685	—	3991	82003	00070002, 2	190 473	—	4005	—	4005	82237	000502, 400	305 553	
—	3977	81727	02, 6, 2, 6	41 265	4026	—	82007	000700003	124 447	4037	—	4037	—	82241	000500050	322 379	
4016	—	81737	02, 6002020	394 539	—	3992	82009	0007002, 20	297 421	—	4006	—	4006	82261	0005000000000	641 1037	
4017	—	81749	02, 600000000	438 709	4027	—	82013	000700300	222 395	—	4007	—	4007	82267	00050000202	339 923	
4018	—	81761	02, 602, 40	274 337	—	3993	82021	0007, 2, 2000	291 461	—	4008	—	4008	82279	0005002, 2, 3	225 769	
—	3978	81769	02, 602020	381 529	4028	—	82031	0007, 204	72 337	4038	—	4038	—	82301	000500500	242 447	
4019	—	81773	02, 6020200	318 551	4029	—	82037	0007, 30000	262 429	4039	—	4039	—	82307	0005, 2, 5, 2	202 441	
—	3979	81799	02, 7, 4, 3	91 295	—	3994	82039	0007, 303	95 357	—	4009	—	4009	82339	0005, 2003, 2	327 745	

[illegible]

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	
—	4152	85831	0002, 4003, 3	277	909	—	4168	86161	0000402030	643	815	4217	—	86381	000030022000	874	1513	
—	4153	85837	0002, 4002, 200	675	1151	4207	—	86171	0000402, 202	426	1151	—	—	4183	86389	000030030000	837	1373
—	4154	85843	0002, 40002, 2	519	1237	—	4169	86179	000040003, 2	453	1053	4218	—	86399	00003007	66	499	
4198	—	85847	0002, 400003	320	1159	4208	—	86183	000040002, 3	336	1135	—	—	4184	86413	00003, 2, 200	747	1267
4199	—	85853	0002, 4000300	562	1003	—	4170	86197	000040020000	791	1291	4219	—	86423	00003, 2, 2003	388	1391	
4200	—	85889	0002, 5, 60	266	309	4209	—	86201	000040003, 20	664	955	4220	—	86441	00003, 2000020	1090	1507	
—	4155	85903	0002, 5, 3, 4	137	591	—	4171	86209	00004, 2, 50	447	529	4221	—	86453	00003, 2020000	958	1565	
—	4156	85909	0002, 5, 200000	599	967	—	4172	86239	00004, 205	119	677	—	—	4185	86461	00003, 20400	541	987
4201	—	85931	0002, 500002	384	1007	4210	—	86243	00004, 3, 3, 2	394	907	—	—	4186	86467	00003, 3, 4, 2	409	913
—	4157	85933	0002, 5000200	529	913	4211	—	86249	00004, 30020	706	981	4222	—	86477	00003, 3, 2, 200	752	1285	
4202	—	85991	0002, 7, 2, 3	126	437	—	4173	86257	00004, 4, 30	505	661	—	—	4187	86491	00003, 30202	467	1277
—	4158	85999	0002, 704	67	327	—	4174	86263	00004, 403	193	735	4223	—	86501	00003, 4, 2000	678	1079	
—	4159	86011	0002, 902	83	241	—	4175	86269	00004, 600	267	497	—	—	4188	86509	00003, 40200	583	1013
—	4160	86017	0000110	93	101	—	4176	86287	0000304, 4	177	745	4224	—	86531	0000207, 2	224	477	
4203	—	86027	00008002	146	369	4212	—	86291	000030302, 2	494	1165	—	—	4189	86533	0000206000	419	643
—	4161	86029	00008, 200	215	361	—	4177	86293	000030300000	811	1305	—	—	4190	86539	0000205002	361	917
4204	—	86059	00006, 20000	448	729	4213	—	86297	0000303, 2, 20	774	1091	4225	—	86561	0000203040	656	793	
—	4162	86077	00006, 400	273	493	—	4178	86311	000030202, 3	383	1289	4226	—	86573	00002030200	872	1499	
—	4163	86083	0000504, 2	257	567	—	4179	86323	0000302, 2, 2	589	1421	4227	—	86579	0000203, 2, 2, 2	598	1441	
4205	—	86111	00005005	98	543	—	4180	86341	000030003000	853	1331	—	—	4191	86587	0000203, 302	461	1275
—	4164	86113	00005, 2, 40	437	535	4214	—	86351	000030002, 4	272	1191	—	—	4192	86599	000020203, 3	403	1317
4206	—	86117	00005, 2, 2000	580	919	—	4181	86353	000030000030	985	1257	4228	—	86627	0000202, 2, 3, 2	640	1467	
—	4165	86131	00005, 3, 2, 331	805	4215	—	4182	86357	0000300000000000	1154	1807	—	—	4193	86629	0000202, 2, 2000	1093	1733
—	4166	86137	00005, 4, 20	421	609	4216	—	86369	00003002, 40	742	911	—	—	4194	86677	0000202000000000	1277	2059
—	4167	86143	00005, 7	45	323	—	4183	86371	00003002, 3, 2	573	1315	—	—	4195	86689	0000200000000000	961	1169

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
4269	—	87537	000002, 6000	468	719	4280	—	87797	000002040000	760	1251	—	4255	88093	00002, 6, 300	345	607
—	4231	87559	000002, 6, 3	217	685	4281	—	87803	0000020502	316	901	—	4256	88117	00002, 5, 20000	599	975
—	4232	87583	000002, 4, 5	149	779	—	4245	87811	000003, 6, 2	295	637	—	4257	88159	00002, 4050	407	477
4270	—	87587	000002, 303, 2	562	1273	4282	—	87833	000003, 3, 2, 20	864	1219	4295	—	88169	00002, 4, 20020	806	1117
—	4233	87589	000002, 302000	975	1537	—	4246	87853	000003, 200200	937	1613	—	4258	88177	00002, 4, 3, 30	609	793
—	4234	87613	000002, 3, 400	609	1103	4283	—	87869	000003, 2, 400	582	1057	4296	—	88211	00002, 30202, 2	588	1391
4271	—	87623	000002, 203, 3	426	1393	—	4247	87877	000003003000	869	1357	4297	—	88223	00002, 302, 5	158	847
4272	—	87629	000002, 202, 200	1048	1785	4284	—	87881	000003002020	1036	1417	—	4259	88237	00002, 3000200	935	1611
—	4235	87631	000002, 202, 4	311	1359	4285	—	87897	000003002, 4	274	1203	4298	—	88241	00002, 3002, 30	878	1137
4273	—	87641	000002, 2002, 20	1210	1717	4286	—	87911	00000302, 2, 3	394	1349	4299	—	88259	00002, 3, 2, 4, 2	448	997
—	4236	87643	000002, 200202	703	1913	4287	—	87917	000003020200	848	1469	—	4260	88261	00002, 3, 2, 3000	795	1243
—	4237	87649	000002, 2, 2, 40	865	1061	—	4248	87931	0000030402	347	981	4300	—	88289	00002, 3, 3, 40	624	769
4274	—	87671	000002, 2, 303	358	1351	—	4249	87943	000004, 4, 3	253	819	4301	—	88301	00002, 3, 30200	712	1235
—	4238	87679	000002, 2, 7	81	601	4288	—	87959	000004, 2003	326	1171	—	4261	88321	00002, 2070	339	383
4275	—	87683	000002005, 2	452	985	—	4250	87961	000004, 2, 2, 20	785	1111	—	4262	88327	00002, 205, 3	251	797
—	4239	87691	000002003002	661	1693	—	4251	87973	000004002000	811	1283	4302	—	88337	00002, 203030	784	991
—	4240	87697	000002002030	1079	1369	4289	—	87977	000004000020	884	1223	—	4263	88339	00002, 20302, 2	577	1361
4276	—	87701	00000200200000	1288	2077	—	4252	87991	0000040203	279	1043	4303	—	88379	00002, 202, 302	520	1441
4277	—	87719	00000200002, 3	546	1847	4290	—	88001	000005, 50	378	451	4304	—	88397	00002, 20002, 200	1058	1803
—	4241	87721	000002000020	1429	1975	—	4253	88003	000005, 4, 2	305	683	—	4264	88411	00002, 2000202	701	1909
—	4242	87739	000002000302	593	1651	4291	—	88007	000005, 3, 3	232	769	—	4265	88423	00002, 2002, 2, 3	463	1583
4278	—	87743	0000020006	128	849	4292	—	88019	000005002, 2	404	967	4305	—	88427	00002, 2002002	732	1927
—	4243	87751	000002002, 3, 3	131	1421	4293	—	88037	000006, 2000	456	727	4306	—	88463	00002, 2, 3, 4	256	1099
4279	—	87767	000002020003	478	1737	—	4254	88069	00002, 8000	231	353	4307	—	88469	00002, 2, 2, 0000001301823	—	—
—	4244	87793	00000204, 30	713	935	4294	—	88079	00002, 7, 4	96	397	—	4266	88471	00002, 2, 2, 2003	437	1567

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
4308	—	88493	00002, 2, 20002000	1042	1797	—	4280	88807	000020003, 2, 3	405	1393	4331	—	89057	000000005, 40	430	533
4309	—	88499	00002, 2, 202, 2, 2	680	1647	4320	—	88811	0000200030002	632	1669	4332	—	89069	000000005000	466	811
—	4267	88513	00002, 2, 3, 50	561	667	—	4281	88813	0000200030000	859	1491	—	4294	89071	000000005004	121	587
4310	—	88523	00002, 2, 3, 2002	592	1533	4321	—	88817	0000200004, 30	730	957	—	4295	89083	00000000702	157	453
4311	—	88547	00002, 2, 4, 3, 2	442	1021	—	4282	88819	000020004, 2, 2	503	1233	4333	—	89087	00000000010	18	193
4312	—	88589	00002005, 200	550	927	—	4283	88843	0000202, 4002	477	1217	—	4296	89101	00003, 6, 200	357	601
—	4268	88591	00002005, 4	173	723	4322	—	88853	0000202, 3, 0000	972	1565	—	4297	89107	00003, 502, 2	321	755
4313	—	88607	00002004, 5	124	741	—	4284	88861	0000202, 3, 300	709	1253	—	4298	89113	00003, 5, 2, 20	511	719
—	4269	88609	0000200300	679	821	—	4285	88867	0000202, 203, 2	611	1387	—	4299	89119	00003, 5, 5	95	493
4314	—	88643	0000200204, 2	524	1159	—	4286	88873	0000202, 200020	1173	1019	4334	—	89123	00003, 403, 2	362	819
—	4270	88651	0000200202002	715	1843	4323	—	88883	0000202, 2, 2, 2	678	1637	—	4300	89137	00003, 4, 2, 30	593	765
—	4271	88657	000020020030	1097	1399	—	4287	88897	00002020050	647	763	4335	—	89153	00003, 3030	444	521
4315	—	88661	0000200200000	1288	208	—	4288	88903	0000202003, 3	415	1361	4336	—	89189	00003, 3, 2, 0000	798	1265
—	4272	88663	0000200200003	493	1781	4324	—	88919	0000202000000	482	1745	—	4301	89203	00003, 3, 3, 2	449	1093
4316	—	88667	0000200200202	684	1861	4325	—	88937	0000202020000	1116	1549	—	4302	89209	00003, 3, 4, 20	567	821
—	4273	88681	00002002, 20020	1195	1657	—	4289	88951	0000202020303	317	1201	4337	—	89213	00003, 3, 500	372	685
4317	—	88721	0000200202030	1076	1365	—	4290	88969	0000203, 3020	791	1077	—	4303	89227	00003, 203002	495	1267
—	4274	88729	000020002, 2, 20	1205	1703	—	4291	88993	00002030040	693	845	4338	—	89231	00003, 203, 4	218	931
4318	—	88741	0000200000000	1393	2059	4326	—	88997	0000203002000	930	1471	4339	—	89237	00003, 20200000	972	1567
—	4276	88747	0000200000002	885	2317	4327	—	89003	0000203000002	626	1641	4340	—	89261	00003, 20000000	936	1613
—	4277	88771	000020002, 4, 2	565	1259	4328	—	89009	000020302, 30	726	1033	—	4304	89269	00003, 20020000	977	1595
—	4278	88789	0000200000000	1277	2069	—	4292	89017	000020303, 20	799	1051	4341	—	89273	00003, 2003, 20	818	1177
4318	—	88793	00002000202, 20	1148	1633	4329	—	89021	00002030400	492	899	—	4305	89293	00003, 2, 2, 2000	823	1405
4319	—	88799	00002000205	178	1019	—	4293	89041	00002040030	667	855	4342	—	89303	00003, 2, 2003	382	1387
—	4279	88801	000020003, 40	761	939	4330	—	89051	00002040202	394	1079	—	4306	89317	00003, 2, 3, 2000	787	1251

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
4381	—	90089	00008020	230	321	—	4355	90379	002, 404002	287	731	4406	—	90677	002, 303, 20000	730	1189
4382	—	90107	00001002	58	169	—	4356	90397	002, 403, 300	439	775	—	4369	90679	002, 303, 203	271	1001
—	4344	90121	002, 9020	151	203	4395	—	90401	002, 402040	488	591	—	4370	90697	002, 3020202	847	1157
—	4345	90127	002, 9, 4	47	193	—	4357	90403	002, 40203, 2	385	873	—	4371	90703	002, 30202, 4	227	991
4383	—	90149	002, 702000	284	447	4396	—	90407	002, 40202, 3	282	949	—	4372	90709	002, 3020000000	969	1567
—	4346	90163	002, 7, 2, 2	195	469	4397	—	90437	002, 40003000	630	983	4407	—	90731	002, 302, 20002	554	1457
4384	—	90173	002, 7, 400	190	343	—	4358	90439	002, 40003, 3	277	907	4408	—	90749	002, 302, 500	388	715
—	4347	90187	002, 602002	249	641	—	4359	90469	002, 4002, 2000	723	1147	—	4373	90787	002, 3000003, 2	583	1327
4385	—	90191	002, 602, 4	106	461	4398	—	90473	002, 40020020	772	1071	—	4374	90793	002, 3000000000	1105	1527
4386	—	90197	002, 60000000	456	737	—	4360	90481	002, 4003, 30	571	745	4409	—	90803	002, 300002, 2, 2	622	1505
—	4348	90199	002, 600003	175	631	—	4361	90499	002, 4, 2, 5, 2	267	583	4410	—	90821	002, 3002, 3000	778	1217
4387	—	90203	002, 600202	244	663	—	4362	90511	002, 4, 2, 3, 4	169	725	—	4375	90823	002, 3002, 3, 3	339	1117
—	4349	90217	002, 6, 20002	441	611	—	4363	90523	002, 2, 2, 2, 200	109	707	4411	—	90833	002, 3002030	856	1095
4388	—	90227	002, 6, 3, 2, 2	234	569	4399	—	90527	002, 4, 2, 2, 5	120	649	—	4376	90841	002, 300202, 20	895	1273
4389	—	90239	002, 6, 7	32	229	—	4364	90539	002, 4, 20040	551	671	—	4377	90847	002, 300205	139	795
—	4350	90247	002, 504, 3	155	497	4400	—	90533	002, 4, 20020000	742	1173	4412	—	90863	002, 300304	178	851
4390	—	90263	002, 502003	214	765	—	4365	90547	002, 4, 202, 2, 2	453	1037	4413	—	90887	002, 3, 2, 5, 3	212	675
—	4351	90271	002, 502, 5	91	487	—	4366	90583	002, 4, 30003	257	935	—	4378	90901	002, 3, 2, 300000	787	1267
4391	—	90281	002, 50000000	632	873	4401	—	90599	002, 4, 4, 2, 3	208	717	—	4379	90907	002, 3, 2, 3, 202	441	1189
—	4352	90289	002, 5002, 30	509	659	4402	—	90617	002, 4, 6, 20	296	433	4414	—	90911	002, 3, 2, 3, 5	134	709
—	4353	90313	002, 5, 2, 20200	553	757	—	4367	90619	002, 4, 602	159	435	4415	—	90917	002, 3, 2, 202000	860	1357
4392	—	90353	002, 5, 4, 30	366	479	—	4368	90631	002, 306, 3	149	469	—	4380	90931	002, 3, 2, 2, 2, 2	553	1335
4393	—	90359	002, 5, 403	140	533	4403	—	90641	002, 304030	486	613	4416	—	90947	002, 3, 2004, 2	2	436
4394	—	90371	002, 406, 2	184	395	4404	—	90647	002, 304003	232	833	4417	—	90971	002, 3, 200202	548	1493
—	4354	90373	002, 405000	341	525	4405	—	90659	002, 30303, 2	398	901	4418	—	90977	002, 3, 202, 40	660	811

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	4418	91867	002, 2, 2020202	567	1549	4467	—	92177	002006030	352	443	4479	—	92399	002003, 304	184	877
—	4419	91873	002, 2, 203, 40	649	801	—	4433	92179	00200602, 2	261	613	—	4446	92401	002003, 4, 30	595	779
—	4420	91909	002, 2, 3, 5000	475	733	4468	—	92189	002006, 300	328	577	—	4447	92413	002003, 600	313	583
—	4421	91921	002, 2, 3, 3030	663	839	—	4434	92203	00200500002	371	967	—	4448	92419	00200206, 2	289	621
—	4422	91939	002, 2, 3, 203, 2	499	1133	4469	—	92219	002005, 302	280	773	—	4449	92431	00200204, 4	203	855
4457	—	91943	002, 2, 3, 202, 3	364	1227	—	4435	92221	002005, 400	347	627	4480	—	92459	0020020200002	714	1865
—	4423	91951	002, 2, 3, 2004	229	1051	—	4436	92227	00200404, 2	323	713	—	4450	92461	0020020200000	991	1705
—	4424	91957	002, 2, 3, 2, 20000	875	1227	—	4437	92233	00200402020	701	957	—	4451	92467	00200202, 2, 2	671	1619
4458	—	91961	002, 2, 3, 2, 3, 20	740	1063	4470	—	92237	00200402, 200	634	1079	—	4452	92479	00200202, 6	117	745
4459	—	91967	002, 2, 3, 2, 6	94	603	4471	—	92243	0020040002, 2	500	1189	4481	—	92489	0020020002000	1158	1583
—	4425	91969	002, 2, 30050	523	617	—	4438	92251	002004020202	433	1177	—	4453	92503	002002000000003	499	1805
4460	—	91997	002, 2, 3000300	682	1217	—	4439	92269	002004, 20200	653	1129	4482	—	92507	00200200000202	690	1879
4461	—	92003	002, 2, 302, 3, 2	494	1135	4472	—	92297	00200303020	734	997	—	4454	92551	002002, 2, 4, 3	327	1055
4462	—	92009	002, 2, 3020020	894	1241	—	4440	92311	00200302003	361	1291	—	4455	92557	002002, 2, 3, 200	833	1413
4463	—	92033	002, 2, 4, 60	330	383	—	4441	92317	00200302, 300	667	1181	4483	—	92567	002002, 2, 2003	432	1549
—	4426	92041	002, 2, 4, 3020	619	843	4473	—	92333	00200300000200	906	1561	—	4456	92569	002002, 2, 2, 20	1043	1475
4464	—	92051	002, 2, 4, 202, 2	460	1091	—	4442	92347	00200300302	447	1243	—	4457	92581	002002, 2002000	1105	1747
—	4427	92077	002, 2, 400200	667	1151	—	4443	92353	002003, 2, 50	533	631	—	4458	92593	002002, 202, 30	957	1241
—	4428	92083	002, 2, 402, 2, 2	431	1045	4474	—	92357	002003, 2, 3000	772	1207	—	4459	92623	002002, 3, 2, 4	241	1069
—	4429	92107	002, 2, 5, 2002	349	905	4475	—	92363	002003, 2, 2002	576	1489	4484	—	92627	002002, 3002, 2	618	1477
4465	—	92111	002, 2, 5, 2, 4	142	633	4476	—	92369	002003, 20030	858	1097	4485	—	92639	002002, 305	136	785
—	4430	92119	002, 2, 50003	219	799	—	4444	92377	002003, 202, 20	901	1281	—	4460	92641	002002, 4, 40	575	711
—	4431	92143	002, 2, 604	89	433	4477	—	92381	002003, 20300	662	1183	—	4461	92647	002002, 4, 2, 3	303	1045
4466	—	92153	002, 2, 8, 20	214	315	—	4445	92385	002003, 205	141	803	4486	—	92657	002002, 5, 30	532	699
—	4432	92173	002007, 200	285	479	4478	—	92387	002003, 3, 3, 2	466	1073	4487	—	92669	002002, 700	260	489

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	N
—	4496	93481	002020000000	1153	1591	4540	—	93809	00203, 2, 3, 30	668	871	—	4523	94063	002040204	153
—	4497	93487	002020000004	277	1269	—	4510	93811	00203, 2, 3, 2, 2	465	1133	4552	—	94079	0020407	40
4529	—	93491	00202002, 2, 2, 2	670	1017	4541	—	93827	00203005, 2	328	715	—	4524	94099	00205, 202, 2	341
—	4498	93493	00202002, 20000	1063	1733	4542	—	93851	00203002, 202	512	1385	4553	—	94109	00205, 2, 300	388
4530	—	93497	00202002, 3, 20	902	1295	—	4511	93871	00203000004	243	1123	—	4525	94111	00205, 2, 5	87
4531	—	93503	00202002, 6	116	741	4543	—	93887	002030006	92	611	—	4526	94117	00205002000	529
—	4499	93523	002020000002, 2	793	1889	—	4512	93889	0020302, 50	493	585	4554	—	94131	00205000020	576
—	4500	93529	002020000002, 20	1167	1657	4544	—	93893	0020302, 3000	710	1111	4555	—	94131	00206, 3, 3	148
—	4501	93553	002020003, 30	845	1103	—	4513	93901	0020302, 2, 200	743	1269	—	4527	94153	00206, 2020	397
4532	—	93557	0020200030000	916	1503	4545	—	93911	00203020003	342	1243	4556	—	94169	0020602, 20	364
—	4502	93559	002020000303	329	1245	—	4514	93913	002030202, 20	809	1151	—	4528	94201	00209, 20	143
4533	—	93563	002020000402	400	1129	4546	—	93923	0020303, 3, 2	408	941	—	4529	94207	002012	7
4534	—	93581	0020202, 3, 200	788	1337	—	4515	93937	0020304, 30	507	665	—	4530	94219	003, 8002	123
—	4503	93601	00202020040	769	937	4547	—	93941	00203040000	540	889	4557	—	94229	003, 70000	276
—	4504	93607	0020202002, 3	433	1467	—	4516	93949	002030600	257	481	4558	—	94253	003, 600200	336
4535	—	93629	00202020400	556	1015	—	4517	93967	00204, 4, 4	139	589	—	4531	94261	003, 6, 20000	373
—	4505	93637	0020203, 3000	731	1145	4548	—	93971	00204, 302, 2	384	907	—	4532	94273	003, 5050	257
4536	—	93683	0020205, 2, 2	324	797	—	4518	93979	00204, 3, 202	351	947	—	4533	94291	003, 50002, 2	331
4537	—	93701	00203, 6000	352	541	4549	—	93983	00204, 3, 5	106	563	4559	—	94307	003, 5, 2, 3, 2	280
—	4506	93703	00203, 6, 3	163	515	—	4519	93997	00204, 200200	643	1107	—	4534	94309	003, 5, 2, 2000	479
4538	—	93719	00203, 4003	248	881	4550	—	94007	00204, 2, 203	252	935	—	4535	94321	003, 5, 3, 30	391
—	4507	93739	00203, 300002	503	1313	—	4520	94009	00204, 2, 3, 20	577	829	—	4536	94327	003, 5, 303	155
4539	—	93761	00203, 2050	484	569	—	4521	94033	00204000030	671	857	4560	—	94331	003, 5, 402	192
—	4508	93763	00203, 204, 2	399	883	4551	—	94049	0020402, 40	492	605	4561	—	94343	003, 404, 3	178
—	4509	93787	00203, 200202	517	1407	—	4522	94057	00204020020	685	951	4562	—	94349	003, 403, 200	460

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	4537	94351	003, 403, 4	141	601	4575	—	94613	003, 3, 2, 200000	804	1297	4586	—	94907	003, 20000302	466	1297
4563	—	94379	003, 40000002	446	1167	—	4550	94621	003, 3, 2, 2, 300	569	1009	—	4564	94933	003, 2002000000	1003	1655
4564	—	94397	003, 400400	372	677	4576	—	94649	003, 3, 203, 20	638	919	4587	—	94949	003, 2003, 2000	778	1237
—	4538	94399	003, 4006	67	439	—	4551	94651	003, 3, 20302	357	995	—	4565	94951	003, 2003, 2, 3	319	1097
4565	—	94421	003, 4, 20000000	686	1111	—	4552	94687	003, 3, 305	99	571	4588	—	94961	003, 2004, 30	576	755
4566	—	94427	003, 4, 20202	358	977	—	4553	94693	003, 3, 4, 2000	541	861	—	4566	94993	003, 2, 2, 3030	649	821
4567	—	94433	003, 4, 3, 40	418	515	4577	—	94709	003, 3, 50000	412	679	—	4567	94999	003, 2, 2, 3003	305	1087
4568	—	94439	003, 4, 3, 2, 3	224	769	—	4554	94723	003, 207, 2	177	377	4589	—	95003	003, 2, 2, 3, 202	438	1181
—	4539	94441	003, 4, 30020	575	799	4578	—	94727	003, 206, 3	154	485	4590	—	95009	003, 2, 2, 2040	626	759
—	4540	94447	003, 4, 304	127	605	—	4555	94747	003, 204, 202	347	933	4591	—	95021	003, 2, 2, 200200	814	1401
4569	—	94463	003, 4, 8	30	247	—	4556	94771	003, 203, 2, 2, 2	471	1135	4592	—	95027	003, 2, 2, 2, 2, 2	548	1353
—	4541	94477	003, 304, 200	459	775	—	4557	94777	003, 203, 3, 20	641	919	4593	—	95063	003, 2, 2000003	392	1419
—	4542	94483	003, 30302, 2	399	941	4579	—	94781	003, 203, 400	448	811	—	4568	95071	003, 2, 20005	149	839
—	4543	94513	003, 302, 2, 30	671	867	—	4558	94789	003, 20203000	719	1121	—	4569	95083	003, 2, 2020002	557	1467
4570	—	94529	003, 300050	468	551	4580	—	94793	003, 20202020	866	1183	4594	—	95087	003, 2, 20204	204	965
—	4544	94531	003, 30004, 2	385	853	4581	—	94811	003, 20200202	526	1431	—	4570	95089	003, 2, 203, 30	667	871
4571	—	94541	003, 30002, 200	740	1261	—	4559	94819	003, 202, 2, 3, 2	503	1153	4595	—	95093	003, 2, 2030000	722	1185
—	4545	94543	003, 30002, 4	219	959	4582	—	94823	003, 202, 2, 2, 3	356	1215	—	4571	95101	003, 2, 20500	369	683
4572	—	94547	003, 3000002, 2	574	1367	—	4560	94837	003, 202, 30000	751	1231	—	4572	95107	003, 2, 3, 5, 2	291	637
4573	—	94559	003, 300005	136	763	4583	—	94841	003, 202, 4, 20	604	875	4596	—	95111	003, 2, 3, 4, 3	236	763
—	4546	94561	003, 3002, 40	597	733	4584	—	94847	003, 202, 7	62	457	—	4573	95131	003, 2, 3, 2, 202	433	1173
—	4547	94573	003, 30020200	703	1217	—	4561	94849	003, 200060	411	473	—	4574	95143	003, 2, 3002, 3	323	1095
4574	—	94583	003, 300303	242	915	—	4562	94873	003, 20002, 2, 20	939	1327	4597	—	95153	003, 2, 302, 30	662	859
—	4548	94597	003, 3, 2, 4000	523	811	4585	—	94889	003, 2000000020	1118	1545	4598	—	95177	003, 2, 4, 2020	616	845
—	4549	94603	003, 3, 2, 3002	417	1069	—	4563	94903	003, 20000203	365	1359	4599	—	95189	003, 2, 4000000	648	1081

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
—	4575	95191	003, 2, 4, 0003	245	893	—	4587	95443	003002, 2002, 2	613	1463
—	4576	95203	003, 2, 5, 3, 2	277	641	—	4588	95461	003002, 3, 2000	777	1235
4600	—	95213	003, 2, 50200	396	689	—	4589	95467	003002, 30002	499	1317
4601	—	95219	003, 2, 6, 2, 2	222	547	4613	—	95471	003002, 304	180	859
4602	—	95231	003, 2, 10	16	167	—	4590	95479	003002, 403	221	843
—	4577	95233	003000	153	169	4614	—	95483	003002, 502	262	745
—	4578	95239	003007, 3	121	379	4615	—	95507	0030000302, 2	526	1241
—	4579	95257	003005, 2, 20	477	671	—	4591	95527	0030000202, 3	403	1357
4603	—	95261	003005, 300	372	655	4616	—	95531	0030000200002	658	1719
4604	—	95267	00300403, 2	340	769	—	4592	95539	00300002, 2, 2, 2	617	1489
4605	—	95273	00300400020	664	915	4617	—	95549	00300002, 400	576	1045
4606	—	95279	003004004	162	737	4618	—	95561	0030000002020	1054	1441
—	4580	95287	003004, 203	235	867	—	4593	95569	003000000000300	1013	1293
—	4581	95311	00300302, 4	203	885	—	4594	95581	003000000000300	799	1425
—	4582	95317	003003000000000	869	1405	4619	—	95597	00300000020200	890	1541
4607	—	95327	003003005	130	723	4620	—	95603	0030000003, 2, 2	544	1327
4608	—	95339	003003, 20002	504	1325	—	4595	95617	0030002, 60	421	487
4609	—	95369	00300203020	750	1019	4621	—	95621	0030002, 4000	644	999
—	4583	95383	00300202003	367	1313	—	4596	95629	0030002, 3, 200	735	1247
4610	—	95393	00300200040	718	873	4622	—	95633	0030002, 2030	826	1049
—	4584	95401	00300200000020	1069	1477	4623	—	95651	0030002003, 2	562	1281
—	4585	95413	003002020000	955	1559	—	4597	95701	003000300000000	853	1383
—	4586	95419	00300200302	449	1249	—	4598	95707	00300030202	439	1201
4611	—	95429	003002, 2, 3000	768	1201	—	4599	95713	0030004, 40	489	605
4612	—	95441	003002, 20030	850	1087	4624	—	95717	0030004, 2000	630	1003
—	95723	—	00300040002	398	1053	—	95723	—	00300040002	398	1053
—	4600	95731	0030005, 2, 2	307	755	—	4600	95731	0030005, 2, 2	307	755
—	4601	95737	0030006, 20	357	523	—	4601	95737	0030006, 20	357	523
—	95747	—	00302, 7, 2	184	393	—	95747	—	00302, 7, 2	184	393
—	4602	95773	00302, 4, 300	461	813	—	4602	95773	00302, 4, 300	461	813
—	95783	—	00302, 302, 3	302	1015	—	95783	—	00302, 302, 3	302	1015
—	95789	—	00302, 300200	688	1183	—	95789	—	00302, 300200	688	1183
—	4603	95791	00302, 3004	193	881	—	4603	95791	00302, 3004	193	881
—	95801	—	00302, 3, 3, 20	638	915	—	95801	—	00302, 3, 3, 20	638	915
—	4604	95803	00302, 3, 302	361	999	—	4604	95803	00302, 3, 302	361	999
—	95813	—	00302, 203000	706	1101	—	95813	—	00302, 203000	706	1101
—	95819	—	00302, 202002	538	1387	—	95819	—	00302, 202002	538	1387
—	4605	95857	00302, 2, 3, 30	665	867	—	4605	95857	00302, 2, 3, 30	665	867
—	4606	95869	00302, 2, 500	379	699	—	4606	95869	00302, 2, 500	379	699
—	95873	—	003020006	388	447	—	95873	—	003020006	388	447
—	4607	95881	00302003020	751	1021	—	4607	95881	00302003020	751	1021
—	95891	—	0030200202, 2	574	1359	—	95891	—	0030200202, 2	574	1359
—	4608	95911	0030200002, 3	397	1343	—	4608	95911	0030200002, 3	397	1343
—	4609	95917	003020000000000	887	1529	—	4609	95917	003020000000000	887	1529
—	4610	95923	003020002, 2, 2	583	1411	—	4610	95923	003020002, 2, 2	583	1411
—	4611	95929	003020003, 20	769	1107	—	4611	95929	003020003, 20	769	1107
—	4612	95947	0030202, 2002	533	1379	—	4612	95947	0030202, 2002	533	1379
—	95957	—	003020200000000	914	1481	—	95957	—	003020200000000	914	1481
—	4613	95959	00302020003	347	1401	—	4613	95959	00302020003	347	1401
—	4614	95971	0030203, 3, 2	415	957	—	4614	95971	0030203, 3, 2	415	957

z'	z''	Z	Exponenten	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	z'	z''	Z	Exponenten	N
4535	—	95987	003204, 2, 2	356	873	—	4627 96289	004, 5040	271	4663	—	96587	004, 20002002	488 1359
—	4615	95989	0032040000	551	907	4648	—	96293	374 580	—	4637	96589	004, 20002, 200	693 1181
—	4616	96001	00303, 70	247	281	4649	—	96333	226 499	—	4638	96601	004, 200002, 20	791 1123
—	4617	96013	00303, 4, 200	469	793	4650	—	96339	490 669	—	4639	96643	004, 2, 2, 5, 2	265 579
4636	—	96017	00303, 3030	546	691	—	4628 96331	004, 402002	311 801	—	4640	96661	004, 2, 2, 200000	737 1189
—	4618	96043	00303, 200002	487	1273	—	4629 96337	004, 400030	481 613	—	4641	96667	004, 2, 2, 2, 202	403 1091
4637	—	96033	00303, 2, 200000	718	1171	4651	—	96353	378 463	4664	—	96671	004, 2, 2, 5	118 639
4638	—	96059	00303, 2, 302	342	949	4652	—	96377	360 521	—	4642	96697	004, 2, 203, 20	581 837
—	4619	96079	00303002, 4	197	865	4653	—	96401	534 677	—	4643	96703	004, 2, 206	69 463
—	4620	96097	0030302, 40	523	643	4654	—	96419	382 869	4665	—	96731	004, 2, 30202	336 919
4639	—	96137	00304, 3020	500	681	4655	—	96431	172 793	4666	—	96737	004, 2, 4, 40	376 465
4640	—	96149	00304, 200000	604	975	4656	—	96443	306 851	—	4644	96739	004, 2, 4, 3, 2	287 663
—	4621	96157	00304, 2, 300	423	751	—	4630 96451	004, 3, 2, 4, 2	297 661	4667	—	96749	004, 2, 40200	416 723
4641	—	96167	00304002, 3	242	821	—	4631 96457	004, 3, 2, 2020	623 853	—	4645	96757	004, 2, 50000	367 605
4642	—	96179	0030402, 2, 2	346	839	4657	—	96461	556 949	—	4646	96763	004, 2, 602	149 427
—	4622	96181	00304020000	545	891	—	4632 96469	004, 3, 2000000	681 1103	—	4647	96769	0040080	171 191
—	4623	96199	00305, 3, 3	165	547	4658	—	96479	96 547	4668	—	96779	004005002	242 615
—	4624	96211	00305002, 2	287	687	—	4633 96487	004, 3, 2, 3	221 759	—	4648	96787	004004002, 2	313 737
4643	—	96221	003050300	296	531	—	4634 96493	004, 3, 30200	471 817	4669	—	96797	004004, 300	384 677
—	4625	96223	0030505	61	337	4659	—	96497	404 529	—	4649	96799	004004, 5	91 475
4644	—	96233	003060020	332	463	—	4635 96517	004, 205000	359 553	4670	—	96821	004003, 20000	628 1023
—	4626	96259	004, 9, 2	83	175	4660	—	96527	136 573	—	4650	96823	004003, 203	233 861
4645	—	96263	004, 8, 3	74	231	—	4636 96533	004, 20200020	769 1061	4671	—	96827	004003, 302	304 841
4646	—	96269	004, 7, 200	204	343	4661	—	96557	662 1139	—	4651	96847	00400202, 4	193 843
4647	—	96281	004, 6, 2, 20	298	419	4662	—	96581	644 1005	4672	—	96851	0040020002, 2	508 1209

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N
4673	—	96857	00402002, 20	752	1067	—	—	4663 97171	00403, 202, 2	369	875	—	4677	97501	005, 2, 20300	391	699
4674	—	96893	004002, 500	326	601	—	—	4664 97177	00403, 2, 2, 20	559	791	4698	—	97511	005, 2, 3, 2, 3	190	653
—	4652	96907	00400003002	419	1073	4687	—	—	00403003, 2	338	771	4699	—	97523	005, 2, 4, 2, 2	238	583
4675	—	96911	00400003, 4	184	787	—	—	4665 97213	004030400	307	561	4700	—	97547	005004002	242	617
—	4653	96931	004000003, 2	481	1095	—	—	4666 97231	00404, 2, 4	117	521	—	4678	97549	005004, 200	351	593
4676	—	96953	004000003, 20	676	973	4688	—	—	0040402, 20	426	607	4701	—	97553	005003030	412	521
4677	—	96959	004000006	82	543	4689	—	—	004050002	214	567	—	4679	97561	005003, 2, 20	473	667
—	4654	96973	0040002, 2, 200	667	1139	4690	—	—	005, 8, 2	90	191	4702	—	97571	00500203, 2	316	717
—	4655	96979	0040002002, 2	503	1201	4691	—	—	005, 500000	318	511	4703	—	97577	0050020020	608	839
4678	—	96989	00400020300	534	955	—	—	4667 97303	005, 5003	125	443	—	4680	97579	00500200002	377	985
—	4656	96997	0040003, 2000	627	997	—	—	4668 97327	005, 4004	103	469	4704	—	97583	005002004	146	669
4679	—	97001	00400030020	658	915	4692	—	—	005, 300003	208	751	4705	—	97607	00500003, 3	220	721
—	4657	97003	00400030002	401	1059	—	—	4669 97369	005, 3002, 20	497	705	—	4681	97609	00500002020	599	819
4680	—	97007	004000304	144	689	4693	—	—	005, 300300	370	659	4706	—	97613	00500002, 200	538	917
—	4658	97021	004000600	237	443	4694	—	—	005, 3, 2, 3, 2	278	637	4707	—	97649	0050003, 30	442	577
—	4659	97039	00402, 4, 4	135	571	—	—	4670 97381	005, 3, 2, 2000	475	753	—	4682	97651	0050003, 2, 2	307	749
4681	—	97073	00402, 2, 2, 30	604	781	—	—	4671 97387	005, 3, 20002	313	823	4708	—	97673	00502, 3020	446	607
—	4660	97081	00402, 2, 3, 20	573	823	4695	—	—	005, 3, 30000	418	685	—	4683	97687	00502, 2003	211	757
4682	—	97103	00402002, 4	188	825	—	—	4672 97423	005, 203, 4	129	551	—	4684	97711	005020004	137	635
—	4661	97117	00402000300	533	951	—	—	4673 97429	005, 20200000	575	927	—	4685	97729	00503, 50	263	313
4683	—	97127	0040202, 2, 3	272	931	—	—	4674 97441	005, 200040	435	529	—	4686	97771	005040002	215	569
4684	—	97151	0040207	42	325	—	—	4675 97453	005, 200002000	553	953	—	4687	97777	00505, 30	241	317
4685	—	97157	00403, 4000	400	621	—	—	4676 97459	005, 2002, 2, 2	365	883	4709	—	97787	0050602	102	293
—	4662	97159	00403, 4, 3	179	579	4696	—	—	005, 200203	212	789	—	4688	97789	0050700	115	217
4686	—	97169	00403, 2030	506	643	4697	—	—	005, 2, 20202	308	841	—	4689	97813	006, 400000	309	497

[illegible]

z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	z'	z''	Z	Exponenten	\bar{N}	N	
4789	—	99551	2, 4, 2, 2, 5	104	593	—	4769	99709	2, 4, 0, 0, 0, 5, 0, 0	337	623	—	4777	99859	2, 4, 2, 4, 2, 2	307	723	
—	4761	99559	2, 4, 2, 3, 2, 3	239	821	4796	—	99713	2, 4, 0, 0, 2, 6, 0	326	377	—	4778	99871	2, 4, 2, 4, 5	89	465	
4790	—	99563	2, 4, 2, 3, 0, 0, 2	374	987	4797	—	99719	2, 4, 0, 0, 2, 4, 3	224	723	—	4779	99877	2, 4, 2, 3, 0, 2, 0, 0, 0	583	919	
—	4762	99571	2, 4, 2, 4, 2, 2	301	737	—	4770	99721	2, 4, 0, 0, 2, 3, 0, 2, 0	621	845	4803	—	99881	2, 4, 2, 3, 0, 0, 0, 2, 0	652	899	
—	4763	99577	2, 4, 2, 5, 2, 0	363	529	—	4771	99733	2, 4, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0	763	1231	—	4780	99901	2, 4, 2, 3, 4, 0, 0	365	661	
4791	—	99581	2, 4, 2, 6, 0, 0	228	425	4798	—	99761	2, 4, 0, 0, 2, 0, 2, 3, 0	650	843	—	4781	99907	2, 4, 2, 2, 0, 4, 2	325	719	
—	4764	99607	2, 4, 0, 0, 3, 0, 0, 3	257	915	4799	—	99767	2, 4, 0, 0, 2, 0, 2, 3	264	985	4804	—	99923	2, 4, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2	492	1171	
4792	—	99611	2, 4, 0, 0, 3, 2, 0, 2	370	997	—	4772	99787	2, 4, 0, 0, 3, 2, 0, 0, 2	395	1023	4805	—	99929	2, 4, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 0	728	1033	
4793	—	99623	2, 4, 0, 0, 2, 0, 2, 3	308	1037	—	4773	99793	2, 4, 0, 0, 3, 0, 0, 3, 0	577	739	—	4782	99961	2, 4, 2, 2, 4, 2, 0	481	697	
—	4765	99643	2, 4, 0, 0, 2, 3, 0, 2	359	995	4800	—	99809	2, 4, 0, 0, 4, 4, 0	384	475	4806	—	99971	2, 4, 2, 0, 0, 5, 2	274	597	
—	4766	99661	2, 4, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0	727	1239	—	4774	99817	2, 4, 0, 0, 4, 0, 0, 2, 0	515	717	4807	—	99989	2, 4, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	782	1261	
—	4767	99667	2, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 5, 6, 3	1341	—	—	4775	99823	2, 4, 0, 0, 4, 0, 4	111	535	—	4783	99991	2, 4, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3	303	1085	
—	4768	99679	2, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5	133	747	—	4776	99829	2, 4, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	373	615	—	—	—	—	—	—	
4794	—	99689	2, 4, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	818	1135	4801	—	99833	2, 4, 0, 0, 6, 2, 0	282	413	—	—	—	—	—	—	—
4795	—	99707	2, 4, 0, 0, 0, 4, 0, 2	286	807	4802	—	99839	2, 4, 0, 0, 9	20	191	—	—	—	—	—	—	—

Bringt man alle Primzahlen der vorliegenden Tabelle gleich jenen der dyadischen Primzahlentabelle von 5 bis 16381 in Gruppen mit je einem gemeinsamen Werthe von N und bezeichnet die jeweiligen Zähler der mit N als Nenner versehenen Brüche mit N' oder N'' , je nachdem die Verwandlung derselben in Kettenbrüche die charakteristischen Exponenten einer Primzahl (Z') von der Form $6l-1$ oder einer solchen (Z'') von der Gestalt $6l+1$ liefert, so ergibt sich folgendes Zahlenschema, in welchem jede gleichzeitig in zwei Rubriken auftretende Specialisirung von N mit einem Sternchen versehen ist, um hiedurch die Zusammengehörigkeit der bei solchen Zahlen räumlich getrennten Primzahlengruppen zu markiren.

N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'					
3	2	5	1	7	*19	6	449			*31	14	389	17	379	*41	24	359	25	349	*47			41	4129
5	3	11	2	13	21	8	107	17	271	4	2039	9	463	15	419	23	373					5	8179	
	4	17	1	31					2, 4093			7	487	12	461	17	409	35	18433			35	18433	
7	4	23	5	19	23	7	227	18	139			27	1033	28	1277	15	439	49	30	347	31	331		
	2	29	1	127		6	479	16	157			25	1087	19	1543			13	953	19	421	13	953	
9	5	47	2	61		4	593	10	199			23	1153	34	2081	34	2113	17	3581	34	631	17	3581	
	8	257				15	641	21	4099			5	2017	36	4127	5	8101	41	8447	20	829	41	8447	
						3	1019					21	5119	8	7937	10	15361	45	32783	11	1951	45	32783	
11	7	41	8	37		12	6143					29	95539	27	40961	4	16369					9	1999	
	3	59	9	67						33	14	401	23	313	43	12	467	34	547			26	3067	
						25	11	197	18	151	5	1013	19	367	33	569	24	751			44	8209		
13	5	53	8	43		7	233	16	163		29	2063	28	523	13	911	10	907			12	61441		
	10	71	9	79		22	1031	4	1009						28	1283	8	997			4	65521		
	4	113	6	193				17	1279		35	19	761	27	283	17	3329	23	1531	51	37	593	28	757
	11	131	1	8191				12	12289				13	433	11	15359	15	1789			31	701	43	1051
	7	191						2	16381		37	26	311	29	277	40	65543	37	4159			11	983	
												14	431	23	337			29	81919					
15	8	383	11	73		27	17	167	8	229	8	491	11	457	45	29	647	28	673			30	739	
	2	509					22	269	5	499	17	773	30	541	17	863			31	719	37	1249		
							16	353	20	577	22	1409	24	643	38	1049			23	797	25	6151		
17	10	89	7	103		23	531				31	2111	15	1663	32	1217			19	887	49	65551		
	3	251	6	223															42	1091				
16	65537	4	241			29	21	149	6	991									24	1553				
							17	179	25	1039									16	1823				
	8	769					20	317	26	2053									8	2027				
							22	1131	10	3583									7	4073				
*19	12	83	7	109							39	14	443	17	397	*47	17	881	36	571				
	8	101					3	4091				11	929	28	607	20	1601	27	1471					
	15	137					27	32771								21	1567		9	1987				
	5	239									5	4079	8	3967	7	2029		7	4073					
	16	263					*31	19	173	18	181				32	2557		32	2557					
							24	281	12	211	*41	30	293	29	307	22	3079		40	73727				

N	N'	Z	N''	Z'
*89	39	3167	31	7159
	72	4337	19	7873
	14	8081	17	7951
	13	16253	42	12301
			36	13309
			51	94207
91	66	1187	27	1831
	71	2237	32	3571
	41	3119	24	3823
	37	3323	20	3907
	12	8147	48	12277
	69	9209		
	55	11261		
	33	14081		
93	52	1499	38	3313
	64	5087	22	3853
	14	8111	79	4177
	82	16481	77	4231
	44	24593	19	31741
	85	32789		
*95	66	1259	78	2137
	36	1721	52	3037
	37	3359	41	6397
	17	4007	84	8233
	44	6173	74	35839
	34	7103		
	14	8123		
	69	9473		

N	N'	Z	N''	Z'
*95	33	14321		
	97	76	1109	71
		62	1307	41
		60	1361	74
		36	1733	38
		26	1901	30
		79	2153	22
		67	2531	77
		59	2801	88
		23	3851	
		17	4019	
		34	7151	
		86	16451	
		51	49121	
		43	50177	
99	70	1229	73	4639
	58	1433	71	4861
	86	4139	61	5503
	82	4229	53	6121
	64	5153	17	8059
	26	7649	68	10177
			59	22531
			34	57349
			91	65563
*101	64	1319	57	1483
	73	2399	39	1693
	74	4673	37	17553
	60	5639	22	3919

N	N'	Z	N''	Z'
*101	89	8243	77	4591
	75	9221	69	5107
	59	11519	47	6163
	35	14337	88	8263
	40	26627	82	8641
			70	10111
			12	16333
			46	49563
			93	65557
			63	86017
103	66	1301	39	1723
	73	2447	42	3319
	65	2657	40	3361
	29	3719	32	3607
	46	6269	30	3697
	16	8093	18	4021
	91	8237	45	6337
	83	8699	20	15877
	81	8831	14	16273
	67	10271	12	16339
	49	49169	33	28687
	31	58367	25	30727
			11	32713
			82	34819
			72	39937
			10	65479
*105	76	1193	61	1447
	67	2621	29	1879

N	N'	Z	N''	Z'
*105	23	3911	62	2833
			32	3631
			59	5953
			88	8443
			68	10303
			86	34303
107	66	1373	47	1579
	60	1493	41	1699
	77	2417	88	2131
	29	3779	82	2281
	25	3863	76	2437
	19	4013	38	3559
	90	4211	30	3727
	93	8273	83	4483
	73	10223	20	15937
	96	16421	81	18427
	15	65027	37	28657
*113	83	2333	82	2371
	73	2579	70	2719
	65	2939	64	2953
	49	3191	42	3453
	50	49279	24	3943
	32	55369	39	5569
	44	6719	69	5569
	93	8513	67	5647
	17	16223	96	8353
	66	23039	34	14851
	36	28703	20	16083
	35	28707	30	16083
	62	30977	91	17401
	22	31751	47	26113
	12	32717	39	28603

N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''
*113	54	98321	98	33151	*119	23	15881	38	14347	125	53	3209	76	2803	135	32	7703	96	9601	137	29	3947	106	2251
			72	41083		41	57329	57	98317		33	3821	87	5023		115	8297	54	13297		32	7727	84	2767
			79	79873		106	65789				96	4547	23	7993		101	8573	32	15373		30	7823	105	4561
115	32	7487	81	1237	121	87	2423	71	1429		56	6257	19	8101		109	9203	26	63493		24	8039	79	5857
	24	7919	52	3109		45	3461	84	2521		46	6977	68	12163		79	11279	71	198047		60	25343	56	13249
	22	7949	42	3517		43	3557	76	2683		97	8963	24	15889		117	32993				48	28607	54	13327
	18	8087	97	4201		37	3623	35	7417		67	12239	109	16519		120	65657				36	30593	22	16141
	61	12269	93	4339		86	4871	96	8719		57	12413				92	80897				20	32507	121	16477
	48	26111	83	4801		38	7193	92	9199		112	16427				62	98561				59	51197	74	49123
	87	36857	88	9151		18	8117	54	12541		108	16607									90	81929	125	55587
	53	49409	99	16633		79	10253	42	14323		104	17393				135	32	7703	56	3271				
	104	65633	79	20353		65	12227	90	36871		16	32633				112	16901	107	4363					
			67	23041		53	12671																	
117	83	2441	49	1627		29	15377																	
	28	7691	43	1747		21	16097																	
	41	14303	89	4597		14	32687																	
	98	16889	53	6211		93	36353																	
	85	37889	76	10273		13	65423																	
			25	31489																				
119	50	1619	73	1381	123	76	1367	52	3217	127	93	2339	100	2203	131	76	1451	55	1621	137	29	3947	106	2251
	87	2351	69	1453		34	1877	101	4273		79	2693	92	2383		50	1709	36	3769		32	7727	84	2767
	45	3449	82	2539		71	2927	95	4513		71	2999	80	2671		101	2267	30	3877		30	7823	105	4561
	43	3527	76	2617		38	7229	91	4621		40	7187	33	7393		108	4253	57	6367		24	8039	79	5857
	86	4799	36	3643		80	20543	85	5059		108	10703	68	12241		100	4583	114	8269		118	16031	75	6073
	103	8291	32	3793		20	32261	73	5641		35	3761	103	4327		77	11393	104	8713		60	25343	56	13249
	67	11903	33	7489		16	32609	109	16453		29	3881	87	5101		61	12323	72	12097		48	28607	54	13327
	31	15329	100	8431		110	65729	65	24547		53	52223	107	16831	*133	75	2969	82	2749		36	30593	22	16141
	25	15809	72	11257		104	67073	23	31873		112	65921	114	32839		29	3917	48	3529		20	32507	121	16477
											96	73721				52	6689	23	8053		59	51197	74	49123

[illegible]

[illegible]

N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'								
*207			167	17389	*211	112	24533	67	28711	*215	117	48647	146	40939	*219	133	44927	67	7243	*223	46	31721	189	16759			
			49	30817		135	41729	63	29191		101	49223	114	49081		53	61463	65	7321		171	36479	177	17431			
			28	65119		51	61469	29	32533				66	57859		49	62459	121	24097		139	43013	173	17929			
209	129	2741	91	6361	217	27	65267	184	33037	219			62	59377	221			119	24337	225	138	87041	165	18481			
	81	3371	164	8839				178	33601				193	95677				160	37633				101	24847			
	130	5387	144	10159		120	47119				141	81943				130	45121				59	30529					
118	5927	134	10399		219	78	7079	157	4783	221	78	7079	157	4783	225	84	6863	96	12739	229			51	31039			
	56	7607	124	11287		127	11489	153	4933		127	11489	153	4933		62	7451	191	16603				43	31771			
	75	14177	64	14479		89	13217	139	5209		89	13217	139	5209		141	10487	183	16921				100	59047			
145	15737	48	15493		221	41	15923	125	5869	225	41	15923	125	5869	229	97	12641	179	17341	233			88	53281			
	172	17027	169	17359		156	19391	178	8563		156	19391	178	8563		87	13331	157	19489				84	53291			
	146	19973	155	18451		150	20231	120	12043		150	20231	120	12043		47	15761	155	19963				26	63353			
46	31247	89	25609		225	36	5237	163	18301	229	118	24329	82	13807	233	221	84	6863	96	12739	237						
	40	31793	63	29179		134	5351	119	24001		118	24329	82	13807		62	7451	191	16603				98	6359	164	9463	
	112	97919	142	40933		130	5573	74	57283		38	32159	171	17599		141	10487	183	16921				62	7523	158	9967	
175	67567				229	89	13049			233	37	64499	165	18397	237	97	12641	179	17341	241			191	8363	142	10627	
	175	67567				92	25583				158	75773	159	18691		87	13331	157	19489				101	12497	86	13633	
	97	98689				50	30851						149	20359		47	15761	155	19963				182	17351	137	89599	
*211	78	6959	147	5011	*215	185	33119			*219	121	24049			*223	192	16553	173	71167	*227			68	29153			
	171	8663	59	7459		182	66569				67	28921				160	19073	103	98563								
	83	13337	154	9439							61	29761				64	29663										
57	15137	150	9739		*223	166	4517	133	5443	*227	98	6311	157	4957	*231					*235			160	4937	167	4651	
	45	15749	134	10501		132	4919	97	6229		33	32401											144	5261	93	6619	
	39	15971	128	11239		136	5297	79	6991		136	43003				62	7451	191	16603				134	5669	87	6793	
37	16073	114	12211		*231	64	7307	63	7369	*235	82	6983	143	5197	*239	66	7331	131	5701	*243			128	5939	83	7027	
	182	16619	92	12703		58	7577	159	18493		30	65053				65	7331	131	5701				100	6299	67	7351	
	148	19961	58	15073		51	15401	139	20811		175	8837	144	10321		175	8837	144	10321				88	6737	61	7591	
148	19961	58	15073		*235	116	24443	99	24709	*239	219	154	4967	155	4903	*243	49	15629	132	11311	*247			84	6947	176	8971
	144	20441	40	15913		76	28541	29	32563		173	32969	95	6379	58	30671	70	14389			179	8783	132	11551			
	130	22013	173	17137							151	40577	83	6883	50	31223	48	15739			147	41213	102	12487			

N	N'	Z	N''	N'''	N	N'	Z	N''	N'''	N	N'	Z	N''	N'''	N	N'	Z	N''	N'''						
*227	41	64007	177	17911	*231	125	12197	95	26371	*235	41	16091	148	42751	*239	37	64763	181	73699	*243	133	12149	148	11197	
	200	65951	163	19423		53	15497				166	19709				204	66593				65	15227	136	11971	
	180	69761	145	20929		89	54269				136	24473				184	72701				55	15569	101	26119	
			39	32233		31	65147				104	25097					162	81899				67	60161	77	28723
			186	34297		128	96263				74	28751										218	65687	214	32983
			98	51169		89	3413	144	2731		54	30983			241	186	4523	147	5581						
			30	65167		142	5591	190	8599		197	33767				92	6833	141	5749						
			185	68863		86	6971	168	9631		153	41057				189	8849	89	6967						
						64	7541	138	11299		27	65381				93	13553	88	13291						
229	132	5861	161	4969		105	12473	90	13537		237	104	6323	145	5563		57	15413	88	14071	245	151	11003	103	6469
	50	7829	135	5683		188	17387	179	18181		98	6563	62	15319		51	15791	64	15241						
	129	11897	97	6427		178	18311	159	20443		175	9257	187	17539		188	17903	52	15727						
	67	14753	158	10141		160	20357	151	20593		107	9887	206	33091		104	25589	205	16699						
	84	28031	62	15121		88	27617	99	25633		196	16943	146	44029		84	28031	199	16963						
	42	31991	48	15817		82	28559	63	30271		182	18191				66	30203	157	20521						
	36	32327	40	16087		54	30971	55	30841		125	49109				42	32189	171	23563						
	30	32603	159	20161		42	32009	164	39679		31	65213				171	39041	71	29437						
	163	38921	145	21121		40	32237	124	49033							169	39249	53	31249						
	99	51137	133	23167		173	36887	60	61417							165	40829	210	33049						
	190	67601	101	25153		167	38903	32	65071		*239	168	4973	99	6553		77	57383	208	33223					
	176	72707	194	33529		101	51071	185	69697			138	5849	94	13339		216	65999	202	33769					
	136	90239	156	40903		51	62591					66	7517	64	15217		198	68351	168	40063					
			106	49393								188	17657	129	24439										
			201	60037		*235	146	5399	63	7603		170	19469	85	28447										
						163	10103	184	8893		164	20369	69	29683											
*231	134	5807	97	6481		149	10529	62	15289		50	31649	208	33073											
	50	7853	190	8521		139	11321	181	18169		36	32441	182	36739											
	169	9377	106	12379		129	12113	69	29443		195	34367	156	41017											
	145	10739	62	15199		51	15683	31	32587		185	35969	72	58363											
	131	11801	107	24691							83	57287	38	64609											

N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'						
269	104	6761	165	5527	*271	201	36899			*277	202	18911	174	10729	*281	86	28661	200	38923	*287	176	5531	109	6871	
	113	12959	75	7477		151	48119				170	22079	122	12601		193	40709	192	40849		227	8747	169	22777	
	71	15287	210	8941		121	50159				108	22481	84	14557		87	57791	60	62983		225	8861	167	23071	
	218	17327	156	11617		51	63737				156	23801	76	15091		130	98801	58	63439		121	12923	129	24967	
	217	34781	78	14821		238	60629				44	32309	233	16843				213	73581		61	15767	117	26357	
	175	41081	195	19009		273	100	7013	101	6949	241	33083	107	27073				197	79867		212	18503	89	28867	
	119	50307	94	57223		215	8807	80	14737		232	67559	87	28771				157	90601		206	19427	83	29071	
	37	65063	46	64480		199	9461	209	18289		228	68099	75	30241		283	221	8933	175	5449		124	35577	75	30649
	234	66173	183	81853		193	9839	187	20407		210	73679	65	30853		219	8999	208	9319		237	33923	248	33211	
						107	13367	155	23581			204	37123		205	9533	156	12073		187	41039	248	34843		
*271	196	4787	188	10099		85	14411	83	29059			239	66463		201	9749	88	14419		183	41969	50	64381		
	112	6569	118	13721		223	34313	236	33199		147	98143			127	12503	86	14533		107	55313	253	65959		
	80	7349	84	14437		71	61343				131	98377			107	13799	82	14827		101	57119	247	66541		
	221	8597	223	17029		47	64451								61	15731	62	15643							
	209	9059	207	18313		194	77951			279	173	10847	176	10639		172	22433	234	33889		289	80	7499	209	4789
	189	10007	175	20641						107	13577	106	13729		241	33347	229	69379		205	9767	162	11953		
	187	10139	173	20959		275	171	10781	226	8539	83	14621	221	17467		231	34337	225	69661		63	15671	179	21757	
	171	10631	157	23293		234	16691	162	11383		65	15461	175	21493		246	66179	203	77761		244	16787	155	24469	
	111	13241	97	28411		212	18143	102	13873		74	30497	169	22501		238	67391				134	24683	250	33181	
	176	20349	95	28603		114	26177	179	20533		163	46073	151	24391							132	24809	214	36031	
	172	21023	59	31357		96	28619	151	24223		115	52733	247	65839		285	179	10733	202	9787		132	25793	198	40801
	170	21491	228	33679		82	20201	228	33811		202	76289	149	98041		101	14249	181	21001		122	25793	198	40801	
	152	32873	200	37057		87	57467	222	34759							154	24419	131	24733		90	28817	186	41467	
	126	24959				83	58337	128	49297							124	25469	176	43777		229	34913	60	63391	
	110	26597						237	66499		*281	116	6581	109	6733		104	28151	68	61561		101	57221	52	64033
	104	27143						223	69247		217	9029	162	11719		91	57389	34	65323		91	57503	259	65701	
	64	30839				*277	160	5843	171	5479	159	11831	181	20719		53	63809				69	61553	219	73693	
	231	33329					105	13763	161	5779	220	17789	167	22549							39	65123	183	84481	
	215	34877					216	17909	218	8821	100	28433	228	34591		*287	178	5417	181	5323		224	71807		

N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''
*311	258	67607	177 94219		*317	139	12659	194 11119		321	203	10607	140 12697		*323				
	254	68639				123	13457	184 11587			133	13103	116 14107			67 31698			
313	227	9497	121 6763			67	15797	130 13219			119	13883	98 14503			61 31849			
	181	11657	222 9769			242	18329	120 13789			354	17477	70 15667			124 54277			
		93	14627	220 9949		224	19697	114 14149			224	19997	101 28759			112 57301			
	254	17291	138 12583			172	24359	84 15259			220	20393	89 29959			74 62017			
	242	18041	132 12919			142	25031	223 19843			206	20753	59 31981			100 29063			
	218	20063	197 11379			96	29123	221 20029			196	22277	190 45247			122 57320			
	172	24197	191 22303			87	60353	175 24121			182	23609				78 30809			
	122	26849	115 27967			51	64553	145 24793			86	30431				205 43019			
	116	27773	97 28879			258	68993	266 33751			56	32183				205 43019			
	56	32057	258 34033					246 35851			50	32363				78 30809			
	217	40433	238 30793					230 37951			197	44159				205 43019			
	127	53201	232 36919					192 45007			191	45077				205 43019			
	75	61511	228 37879					241 73597			49	64781				187 47129			
	69	62477	112 56827					171 97777			238	73823				187 47129			
	55	64271	277 58581			319	233	9413 118 13903			230	77813				139 53441			
	214	81671	273 66067					179 11933 263 17011			194	90089				85 61403			
	184	91139	263 67453					188 227519 1225 19717								139 53441			
	180	94079	169 97729					134 25919 141 25117								85 61403			
			165 98227					56 32141 125 26737								85 61403			
315	173	12107	92 14779					271 33413 123 27127											
	214	81869	88 14929					171 48953 260 34429											
	184	92153	71 31183					61 63599 260 40189											
			268 33391					43 65129 206 41281											
								250 70913 48 64891											
*317	186	5717	131 6571					259 69127											
	203	10427	250 8779					249 71551											
	177	12011	220 10093					197 87553											

N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''						
353	245	10091	222	10711	*357	104	19573	220	44017	*361	220	22367	211	23029	*365	107	59943	*369	313	33479	107	29641			
149	12899	204	11677	76	31517	200	47869	212	22817	97	30367	212	22817	97	30367	103	59453	305	33911	98	60961				
97	15077	271	18199	271	30821	128	56767	84	30941	284	35311	84	30941	284	35311	318	66107	161	50137	299	69313				
286	17333	243	20341	191	48998	86	61483	64	32117	280	33869	64	32117	280	33869	168	98849	157	50753	281	73477				
138	26739	195	24103	137	54287	74	63409	255	39419	260	38053	255	39419	260	38053	255	10067	155	51839						
80	31121	292	33871	316	65843	265	73783	221	44417	256	39103	221	44417	256	39103	227	10889	131	56957						
301	33317	272	30371	316	65843	265	73783	101	59651	156	51151	101	59651	156	51151	161	12653	206	11923	77	63353				
291	34031	242	40711	262	67619	233	82039	99	60383	140	53887	99	60383	140	53887	155	12893	140	13687						
61	64433	164	49339	262	74747	199	96223	75	63377	126	57241	75	63377	126	57241	109	14633	283	18127						
274	71693	56	64627	359	219	11159	254	9817	55	64793	96	60937	55	64793	96	60937	280	18341	235	20857	371	146	26669	267	19333
228	82559	231	81973	137	13679	140	13417	49	65099	293	69151	49	65099	293	69151	228	21599	223	22447	132	28439	225	22483		
				105	14759	76	15787	308	66617	225	86029	308	66617	225	86029	142	27011	205	24007	104	29819	97	30643		
				208	23291	291	17317	178	72689			178	72689			114	28859	199	24373	88	30803	87	30859		
355	251	9833	274	9043	363	265	9431	232	10459	363	265	9431	232	10459	233	43017	143	26863	71	63587	79	31513			
219	10079	154	12757	136	87551	223	21601	268	11987	160	13589	268	11987	160	13589	149	53189	135	27919	258	80387	228	44041		
99	14951	136	13597	64	30469	213	22573	268	18521	233	20749	268	18521	233	20749	133	56333	83	31153	216	49359	172	49369		
272	18257	221	21523	297	33863	209	23033	250	20327	95	30631	250	20327	95	30631	129	57149	79	31477	291	70783	241	82183		
204	23531	159	25033	273	36791	207	23431	158	25457	166	49597	158	25457	166	49597	115	57587	77	31627						
192	24407	151	25621	140	40883	111	28909	130	28403	164	49789	130	28403	164	49789	304	33829	*373	273	9371	158	12853			
156	25247	298	33739	249	52289	107	29209	293	34763	70	63541	293	34763	70	63541	302	34057	269	9623	154	13159				
96	30269	162	49639	140	52289	107	29209	139	54401	269	73849	139	54401	269	73849	150	32999	229	11027	295	17497				
78	31259			67	63761	306	33331	284	71171	247	81847	284	71171	247	81847	86	61729	109	14771	289	17959				
66	31907			312	66191	292	34543	266	74759			266	74759			291	69763	262	19919	211	23071				
63	64223					250	40129									237	82561	110	29423	209	23929				
294	67679					198	48259											84	31933	135	28183				
248	79889					96	60913											82	31253	99	30493				
216	89063																	313	33749	79	31567				
																		108	98129	242	41149				
*357	131	14009	226	10567	*361	261	9587	208	11731	*365	159	12713	206	11863	*369	143	13487	269	18919						
202	23663	304	33349	213	11351	277	18211	201	48353	98	15193	201	48353	98	15193	236	20879	265	19417						
				151	13037	251	20101	163	50153	297	17257	163	50153	297	17257	206	24029	209	23623						
								109	58379	262	38851	109	58379	262	38851	110	29207	107	24859						

N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''								
*373	176	98411	234	42979	379	231	11177	268	9829	*383	138	28283	322	33703	*387	173	50129	115	29251	*391	89	62201	212	48751			
	170	99317	230	43969		147	13469	148	13399		114	29321	300	35521		71	63977	316	34327		81	63419	297	73609			
			325	66103		115	14549	309	17203		84	31271	116	58243		244	85247	265	81649		61	64709					
			309	67651		111	14747	275	18973		80	31667	104	60427		389	163	13001	321	16987		316	69473				
			231	87037		266	19949	215	23593		323	33617	295	72673		151	13451	305	17713		393	287	9419	166	12889		
			175	98479		222	22943	209	24133		215	47681	235	88321		105	15149	287	18541			176	25037	152	13513		
375	103	15083	244	41077		208	24239	161	25639		101	61169	181	98389		300	18119	271	20047			311	34949	161	26479		
	236	21388	242	41341		174	24749	159	25981		79	63443				298	18269	239	22027			233	45179	256	41047		
	232	21767	172	49531		307	34679	157	26209		61	64601				270	20177	217	24043			215	48611	254	41233		
	116	28901	98	61297		235	43391	294	35863		330	66509				164	25847	89	31033			73	63839	244	43261		
	287	36599	323	66523		107	59441	280	36997		302	70271				148	27407	276	39043			322	68597	170	51133		
	271	38393				322	66821	262	40459		224	92033				88	31151	252	41203			238	90017				
	229	44549				246	82241	100	61153		385	314	17189	71	31963		275	39359	230	45307			220	95747			
	221	43503				244	82913	50	65173		282	18701	272	39409		181	49307	220	47353			*395	153	13499	233	22717	
	133	56963						335	65881		248	20717	208	48847		179	49433	210	48871				326	16979	231	23011	
	332	65837						213	95239		244	21089	92	61543		169	50951	122	57571				274	20201	69	32173	
377	144	6827	112	14629	381	215	11867	146	13501		218	23633	267	80833		330	66947	110	59419			272	20333	232	45631		
	219	11579	231	22147		107	14891	161	25759		212	24179	247	83071		326	67547	104	60919				228	23417	273	80929	
	159	12917	85	31177		244	20849	145	27397		106	30113				178	99137	58	64921			224	23603	269	81817		
	147	13421	320	33457		331	33107	71	31891		82	31511						309	69691			166	25889				
	242	20747	276	37441		233	44537	302	34897		293	36761										164	26141				
	148	26693	268	38959		232	89597	80	63241		334	66293															
	321	33353	222	45553				179	98443		332	66491															
	291	36161	86	62143	*383	161	12941	238	10789		284	74177			*391	145	13877	282	9619			309	35591				
	287	36749	70	63841		157	13229	315	17047		274	77849											281	38933			
	223	45281	56	64951		264	20297	299	17881														271	40751			
	115	58049	277	74623		216	23747	241	21391														227	47057			
	170	99713	213	94723		172	24989	89	30949															163	32673		
																								87	62483		
																								312	70139		

N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''
*395	258	82013			*399	338	67061			*405	239	45377	223	24181	*415	162	26813	112	60607
252	83903					286	77801			167	52721	308	36787	114	30161	359	66361		
234	90371				401	314	17783	282	9931	91	62417	224	48163	77	63857	307	73951		
184	98573					220	24251	246	11047	73	64019	293	76543	358	66467	291	79861		
						170	25679	317	17509	328	69371	263	82207	342	68087	251	90073		
397	281	9803	246	10867		152	27527	231	23473	407	239	11411	288	9811	328	70079			
251	10613	242	11173			144	28349	225	23869	407	239	11411	288	9811	417	175	15983	242	11593
245	10973	146	13963			84	31643	177	25147	235	11699	315	17989	304	18917	154	13933		
151	13709	287	10183			235	45827	153	27517	171	12953	289	19507	254	22391	112	15187		
292	18617	235	22621			215	48947	238	45127	322	17483	336	33937	182	23373	323	17971		
256	20681	173	25411			91	62213			151	55487	182	50119	94	31181	173	26161		
252	21017	93	30871			330	68111			145	50843	166	53089	337	34739	328	35317		
224	23741	83	31657			324	69497			73	64067	128	57559	329	35081	170	53113		
249	42989	326	34183											121	14741	158	13627		
167	17179	324	34351			403	255	10589	284	9883				320	17957	339	17107		
346	66089	280	39439				249	10937	280	10069				242	44599	355	60721		
254	83459	274	40543				153	13751	254	10663				162	26717	151	28111		
244	88079	126	57427				149	13913	226	11941				337	34361	298	38431		
							111	15053	315	17839				335	34607	152	55813		
							178	25127	311	18097				269	41051	78	63697		
							158	28723	281	20023				261	42491	305	74047		
							122	20129	276	40819				125	58271				
							118	29501	238	45319				109	61151				
							327	34589	86	62989				186	99833				
							289	38891	64	64621									
									189	98491									
*399	292	18749	143	28387						*409	121	14669	288	9907	*419	265	10601	242	11689
236	22643	107	30403							264	20663	333	17239	155	13901	257	22111		
220	24137	71	32089							254	21617	289	19699	117	14939	245	23017		
337	33563	124	57697							178	25463	231	23689	344	17099	151	28279		
325	34439									120	29453	171	26083	330	17609	113	30319		
185	49367									110	30341	107	30637	268	26873	89	31543		
139	57269									315	36341	228	48109	262	21011	320	36637		
340	66683									161	53327	170	52337	172	26417	244	46093		
										65	04613	166	53197	124	20327	238	47143		
										61	64919	124	58237	124	20327	238	47143		
										344	69857	321	70687	124	20327	238	47143		
										298	75743	297	75793	124	20327	238	47143		
														124	20327	238	47143		

N	N'	Z	Z''	N	N'	Z'	Z''	N	N'	Z	Z''	N	N'	Z	Z''	N	N'	Z	Z''	N	N'	Z'	Z''
*443	134	29147	129 29581	*447	271 44987	340 36781		*451	370 68483	379 67447		*457	140 28949			*461	249 48857	298 41227					
351	34919	374 33577		245 48527	160 56821			350 71699				321 39839				203 50417	260 47491						
165	55331	364 34171		364 68927	377 67231			278 88001				319 39971				131 53381	134 59233						
163	55823	330 35059		293 82007	307 81421			206 99333				293 41597				163 57077	124 60679						
157	59993	324 37567		290 82301				453 187 13163	326 38671			205 50033				145 57527	82 64189						
137	57809	173 53791		266 90149				268 26597	134 58687			129 59447				85 63939	301 82021						
119	60737	130 58897		250 95873				107 61673	104 61981			107 61737				406 65963							
352	60677	122 60223		449 324 19211	1284 10597			71 64679	329 75787			386 67121				372 69539							
318	77699	243 97021		288 20771	369 17077			370 68633	277 89083			358 71039				332 79901							
258	92177	241 97303		282 21467	351 17827			334 74331				258 94847				274 90191							
252	94229			254 23669	325 19087			274 90071				214 98519											
208	98459			248 24107	285 21019			455 264 23201	1282 10861			459 332 19139	331 19249			463 237 10853	194 13003						
206	98627			196 25367	203 24877			373 34283	192 12907			140 20027	283 21991			179 13533	176 13723						
445	123 15017	341 18253		176 26729	308 40759			291 41759	188 13147			211 49463	271 22669			171 13931	128 15013						
132	22303	162 23059		172 27197	70 64717			283 43103	349 18229			175 54779	253 24151			260 23831	261 23773						
287	41351	169 27487		379 33587	329 74761			388 66829	279 22129			161 57191	179 26833			130 29789	203 25321						
249	47903	348 35617		263 45887	441 97849			346 73283	191 22951			356 71741	137 30013			359 35879	127 30187						
97	62687	246 48187		101 51239				296 82163	81 32083							345 39887	366 35023						
83	63773	168 55249		312 80513				292 83099	198 50929							319 40637	292 42013						
338	73613	84 63709		318 80513					172 55201							163 57107	190 52861						
316	78017	78 64303		206 99041					162 58857							167 46833	212 49349						
262	91121	351 70207		*451	324 19403	333 18517			269 90619							165 57259	212 49349						
				186 26357	277 22039				209 95947							337 74719							
*447	322 19319	329 18583		367 34511	189 25999			*457	265 11621	323 19687		*461	356 18059	353 17623			286 21647	331 20071					
314	19913	251 13833		335 35267	177 26701			169 13907	278 44809			180 26801	159 26449			282 22259	283 22063						
260	23087	139 18837		349 35999	105 30931			324 19559	252 48271			136 29411	179 26893			158 96233	138 58417						
98	31277	125 19833		249 48239	288 41887			268 22907	106 61933			108 30869	137 30097			256 96353	381 68113						
277	43457	350 35569		163 56417	84 63793			162 128493	395 60403			357 35963	352 36643			253 48479	320 40351						

N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'
*487	151	57737	317	81219	*493	147	58403	382	35911	*499	353	39293	135	30259	*509	415	34403	299	22807
	135	59021	295	90001		143	59273	354	37039		279	47969	412	33931		371	37853	213	26053
	394	63689	289	90017		131	60953	346	39901		211	51461	382	36583		295	49559	209	26407
	344	78339	273	92617		344	79997	280	47149		155	57719	346	40429		233	49559	111	31333
489	112	31013	179	28081				307	86077		87	64373	146	59011		225	59231	376	37003
	361	37049	274	47857				301	89119		352	78857	118	61657				374	37309
	355	37907	208	51241	*495	302	22307	203	26437		350	79847	355	77863	503	313	10859	212	12973
	317	41177	134	60397		184	27701	191	27109		342	81569				312	21881	197	28221
	277	47237	116	61603		428	66377	272	48397		310	86399				298	22691	193	27271
	173	57059	413	67129		422	66653	92	63823		276	96323				292	23321	157	28843
	284	92069	323	79843		386	71633				232	98639				286	23627	147	29587
491	208	57003	285	23173	497	206	26183	345	20173	501	226	24923	275	24229		222	25229	141	29881
	174	28499	145	20383		204	26423	209	25867		205	45557	370	37021		182	28277	368	37861
	385	35423	380	35983		152	28979	390	35353		277	48179	346	40507		154	29033	188	53551
	309	42767	376	39559		134	39323	286	46993		131	61283	220	41863		387	36497	373	74017
	177	56343	314	41761		379	38713	194	53659		316	85121	206	52747		317	42953		
	93	63671	204	52249		353	35993	156	57559		266	98123	152	58207		279	48197		
	318	82421	142	59341		349	39869	309	86269				425	66949		137	60443		
	282	94151	132	60703	*503	317	41957	295	90247		507	214	25799	367	19081		322	83939	
	230	98507	88	64081		269	48779	267	97813		208	46249	307	22291		295	45817	212	52321
			381	71707		215	51131				196	26861	227	24907		140	30071	400	35083
			297	90067		193	53777				371	37007	219	25447		155	57977	350	49519
			261	98101		139	59663				361	38861	213	25717		89	64283	106	63313
						137	60167				321	41927	195	26947		398	70667	307	90031
						292	91199				287	45399	368	37507		392	72161		

[illegible]

N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''					
587	408	20117	329	23917	593	364	22067	485	17707	599	438	18797	165	30103	*601	330	96893	341	94351	*607	439	38303	444	37537
	370	21317	215	28057	348	22853	417	19867		346	23369	440	37321							359	45293	350	46861	
	346	22739	460	35461	463	35747	434	37489		469	35573	368	44059							339	48029	342	47581	
	248	25783	416	39157	211	56873	430	38011		457	36683	260	51001							265	50723	222	56197	
	246	25907	230	53479	163	60293	138	61879		441	37139	232	54001							189	57641	112	63913	
	229	53639	216	55819	484	68687	483	68881		417	40163	130	62731							169	59879	491	69403	
			178	58231	470	69809	459	71941		351	45833									131	62897	373	88093	
			465	69859	276	98597	321	97549		339	47303									332	97241	345	94261	
			421	77773	268	99551	317	98011		335	47939									328	97673	277	99277	
			359	89071	595	422	19541	127	27367		275	49499								278	99083	275	99367	
					437	37337	173	29611		105	64301									609	425	39989	353	23209
589	435	37019	243	26347	411	40493	488	34261		510	66713									233	54497	494	34603	
	371	42743	466	34963	269	49757	456	36493		504	67349									109	64109	374	44089	
	249	51473	364	43711	249	52103	244	52879		424	78401									514	67187	352	46687	
	175	58511	340	46831	249	52103	244	52879		382	83933									470	72383	437	77743	
	89	64853	242	52783	276	98711	228	54367												326	97943	433	77893	
	486	67981	487	67783			164	60169	*601	380	21221	433	19309							441	37847	386	41947	
	404	81527	417	78367			106	64153		465	36017	223	27739							369	44657	384	42043	
	326	96293	407	80953			104	64333		435	38177	496	33961							247	53951	234	54049	
			339	93967			457	72739		337	47777	494	34141							229	55163	232	54319	
591	128	31397	482	34381	597	334	23957	227	27427		325	48821	474	35107						133	62507	164	60457	
	467	35051	244	52639	457	36587	140	61717		285	50321	426	39139							476	70607	513	67003	
	419	39119	242	52981	385	41357	509	66643		261	50969	264	50527							354	91667	367	89917	
	488	67853	224	55057	379	42023	433	75967		233	53891	222	55711							348	94049	343	94447	
	350	90401	134	62233	371	43151				127	63197	166	60127							339	95713			
			499	67141	245	52859				520	66347	112	63781							333	96757			
			485	68473	490	68447				486	69431	445	73867							*607	370	22349	377	21613
			379	83137	436	75329				442	74489	371	87679							356	22901	251	26251	
			373	85009	268	99071				366	89591	367	89101							230	27539	476	35407	
			371	85903																				

N	N'	Z	Z'	N	N'	Z	Z'	N	N'	Z	Z'	N	N'	Z	Z'	N	N'	Z	Z'
*641				497 71761				*647	373 46877	280 51109		*653	249 54773	472 38377		*659	358 97373	427 82393	
				445 80671					265 5967	274 51427			203 57689	396 44971					
				439 81637					229 57047	238 55837			173 61043	404 55903		661	478 19163	183 29989	
				381 90187					512 69899	509 70621			149 62139	176 60661			290 25301	464 39883	
				361 95203					300 98729	393 89839			117 64091	537 68209		521	33171	422 41911	
643	466 19031	379 22741								347 97879			474 75833	411 85513		517	35603	406 44071	
	188 29531	373 23227						649	192 20339	457 19813			354 97511			279	51599	288 50833	
	471 37397	456 39097							513 35027	251 27031		655	353 35737	398 44893		245	55341	234 57037	
	415 41333	525 68659							479 37277	502 36037			379 37571	294 40993		239	56393	154 61843	
	235 56249	399 88533							415 41777	404 43051			399 44771	284 51061		177	60869	144 62701	
	187 59207	359 90697							397 44519	366 47497			361 48311	176 60733		518	70919	561 66931	
	542 67289	291 99439							290 54293	248 54559			257 53411	519 69829		516	71537	505 73237	
	508 70121								189 59159	234 56527			249 54881	503 72763			453 51373		
	506 70589								123 63659	172 61027			143 62639				411 86257		
	404 85793								700 72647	136 63277			552 67307				365 90451		
	352 97169								384 99527	515 69739			502 72977				297 99901		
645	449 40169	464 38713						651	286 25253	365 23809						663	196 29363	257 26953	
	379 45587								535 34157	239 27997							178 30389	488 37159	
	418 82373								275 51551	530 34483		657	194 29387	472 38803			383 46727	470 39133	
	412 83717								191 58907	460 39397			475 38351	461 79813			151 6189	466 39799	
	296 99023								422 82361	284 50767			401 44579				394 90203	280 51577	
*647	410 21101	455 19861							298 99119	242 55399			500 73553				206 57709		
	402 21587	273 23819								509 71293		*659	475 38543	484 37339			154 91909		
	374 23333	237 28051								299 98953			361 48503	466 39313			140 63211		
	246 27431	476 37201						*653	478 18731	403 21943			295 50093	298 49741			419 84979		
	473 37619	418 41257							515 35111	287 25237			193 58991	174 61129			365 96739		
	415 41543	396 44449							477 37643	536 34213			460 79943	140 63079		*665	258 26921	521 17749	
	409 42467	382 45337							459 39791	500 36571			422 83423	463 79621			246 27803	411 21841	

N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''
*701	568	69317			*709	484	81749	501	78787	*715	412	93847			*723	590	68711		
	426	89759				450	84089	321	99397		328	99053				550	73547		
703	434	21911	495	19819		418	90911				717	197	60317	520	37987		466	82811	
	208	29333	445	21139		326	98909				424	90599	529	74161		406	93327		
											388	97571	463	82567		398	90749		
						711	523	37223	500	39737		323	99817		326	99719			
							439	43793	412	46573									
							319	50021	314	50263									
							217	78031	302	51283									
							526	73943	154	62791									
									605	66763									
									499	79801									
									413	92641									
705	514	75653	296	51871															
	454	82889	194	60271															

N	N'	Z	N''	Z'	N'''	Z''
771	563	37691	536	40213		
283	56003	494	41647			
163	63179	625	69259			
548	77033					
422	97187					
773	559	38321	560	38119		
547	39239	456	45427			
543	39827	326	51673			
471	44741	230	58477			
177	62039					
568	74009					
566	74873					
486	85751					
450	92219					
775	451	46133	478	43951		
437	4713	448	46663			
321	52433	302	53719			
227	58079	567	75013			
598	72431	551	77899			
492	84047	491	84463			
	459	90397				
	439	94477				
777	541	40151	562	38281		
451	46349	452	46153			
596	72911	236	58153			
572	74997	214	60217			
352	90371	533	81517			
	493	84127				
N	N'	Z	N''	Z'	N'''	Z''
779	499	41669	493	21157	*787	299
491	43641	288	55663			54917
165	63131	593	76777			230
500	83003	537	81181			59077
442	94349	481	87583			649
						68023
						499
						84229
						447
						94391
						432
						96911
789	290	27947	622	35749		
173	62549	500	42193			
610	72173	172	62683			
608	72623	545	80989			
458	92681					
428	97493					
791	537	39623	572	38329		
549	40361	466	45523			
337	52529	332	51907			
297	53819	242	57943			
291	55829	559	78781			
358	99431	433	97177			
793	593	42101	335	25771		
656	67733	303	27283			
578	75707	580	37561			
562	78311	512	41299			
544	81509	344	51031			
492	86561	605	73369			
438	96431	561	78577			
			487	88177		
			443	96013		
*795	308	26987	488	44131		
449	47381	448	47503			

[illegible]

[illegible]

N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''
987	409	5391	773	71089	995	716	77351	418	51829	*1005	583	46451			*1015	281	59981	274	60589
	265	60773	613	86461				563	94651		634	85103				586	93629		
	712	76919						449	99643		554	96581				568	95783		
	620	83829								1007	776	72617	787	71359	1017	427	51869	302	58549
	446	99563						616	43753		744	77549	743	74149		650	83663	617	89899
989	627	42131	434	50581				688	81101		710	78929			1019	653	41621	646	42139
	613	43427	376	54877				612	88259		708	79493				589	46679	282	60013
	571	46811	687	80611				580	92297		632	85931				377	55589	797	71209
	415	51941						450	99611		624	86327				720	78803		
	367	55469						999	581	46187	380	54829				710	80147		
	363	56009						706	78779	821	68311					658	82571		
	724	74897						644	82781	725	75853					630	87281		
	686	80819						560	95621	641	83047					624	88799		
	572	93239								559	95803					572	95369		
								1001	359	56747	732	37579			1021	626	88547	374	56101
991	717	38261	714	38611				772	72467	388	53917							571	95881
	387	53591	781	70381						705	79201				1023	647	42407	376	55897
	277	59093	713	77383						691	81043					800	71237	302	58789
	784	69941	585	90703						591	90679					632	87539	461	99787
	776	71129														562	96821		
	696	70697						1003	615	44267	388	54037							
	608	88337								381	54941	791	70237		1013	733	38237	714	39499
										828	67883	737	74611			393	53849	781	72547
993	635	41771	410	52627						630	85853					836	67031	731	76837
	583	45677	380	54469						580	93263					784	71903	637	85711
	377	55001	358	56533						562	95717					654	82619	629	86509
	808	60029	641	82633												648	83477		
	778	70979						*1005	623	43403	422	51853			*1015	621	44501	642	42391
										613	44651	392	53653			389	54347	426	51913

N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z'		
1029	838	68909	797	71899	1043	611	43869	648	43189	1057	437	52317	446	51637	1071	788	74381	817	73387		
	760	74027	822	70373		643	87991	772	75323		811	72859	772	77069		631	91033				
	740	77489	800	72923				652	87869		681	82837	634	90473							
	652	84331									653	87541									
1031	848	68171	594	46933	1045	826	70061	408	53611	1059			581	97003	1073	688	83177	680	42187		
	812	70439	432	52009		586	93549	851	68917				652	89783		589	96907				
	652	84857	394	54547				807	72329				630	91331							
	628	89561	791	72871				611	92083				624	92387							
1033	810	70841	434	51817	1047				607	92647	1061	623	45659	466	50539	1075	417	53861	678	42571	
	728	79043											822	71849	865		68821	397	55733	773	77509
	712	81203											818	72551	835		70573	676	85703	687	83689
	654	84509											740	80039	673		84199	666	86981		
1035					1049	822	70937	756	38569	1063	651	44381	670	42643	1077	776	77201	622	46771		
													393	55661		614	46747	751	80077		
													646	89753		596	47797	659	88969		
													622	91961		412	53923	655	89653		
1037			809	71353	1051	824	70877	643	89017	1065	682	83417	446	52069	1079	789	37589	782	38053		
	383	55721	750	38299									683	42281		833	72307	691	83401		
	303	59093	402	53899									297	60251		691	83401				
	468	99623	759	74959									846	70853							
					1053	812	72503	646	44179	1067	755	39251	312	59053		297	60251				
													619	46439		817	73141	690	83537		
													586	96857		773	76231	678	85781		
																625	91771	670	86501		
1039	397	54503	737	78139	1055	733	49277	322	58027	1069	661	43613	600	47701	*1081	691	41813	668	43717		
	758	75539	633	89511									287	60779		843	70249	684	84719	847	70969
	437	51899	436	52057									770	77291		621	92623				
			374	56659												605	94603				

N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'
1139	628	96357	722	42157	1157			911	70501	*1171	526	99923			1189	762	83219	690	46381
			667	91837				683	90697	1173	343	59051	448	54631	748	85619	498	52051	
			625	96973				669	93283		826	79241	661	93131	702	90677	701	90907	
1141	659	46757	722	42349	1159	487	51803	841	75883		740	85091			692	92243	689	93139	
720	85037	929	68947			888	73037				694	90533			1191	842	78707		
662	92831	827	76081			822	78173			1175	726	87491	751	83653		740	86351		
			795	80149		816	79301			1177	745	42293	684	46261	1193	493	52571	438	55987
			695	89563		728	88647				744	84947	685	92251		844	78369	831	80221
1143	443	53927	338	58699		710	85843				728	87119			756	84401			
901	70327		901	70327		1161	730	85733	847	75541		718	89273		752	85259			
			671	91381			682	91239							1195			462	54091
1145	807	39509	708	43609	1163	737	42197	825	78121	1179	743	42677	722	44389				693	92941
796	80429	661	93637			956	68261						847	77611	1199	877	37547	458	54601
1147	673	45737	482	51787			900	71987		1181	856	76079	693	91453		768	83357	322	60757
317	60083	474	52567		1165	843	38231	734	42709		754	83813	687	92317	1201	864	77417	761	84421
880	72869	813	78283			724	86291	911	71257		666	95003	651	98589		846	79133	735	88951
			735	83257				819	79537	1183	824	80231	971	68437		762	84131	673	95707
			697	89767	1167	493	51539	490	51859							674	95429	659	96979
			679	90469		814	80021	841	77167		746	85199	915	72091	1203	884	74597	881	74827
1151	669	46229	723	85937		662	94379	721	87523		688	92381	913	72379		742	87887	805	77527
882	73013	675	91621		1169	920	70571	725	86689		668	94793	857	70249				731	89779
716	86171	673	92077			856	74861	723	87151		662	95789	831	79657				709	90997
			667	93133		814	80279						821	80749					
			663	93913			676	93257					733	86959	1205	467	53939	881	75223
1153	487	51563	737	83641	*1171	854	75629	743	84121	1185	722	89501	929	70891		872	76421	879	75571
			727	85237		722	87959				668	95093				778	82601		
			651	94819			654	96053		1187	824	86681	734	43597		706	91703		

N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'	N	N'	Z	N''	Z'
1207	745	43853			1225	708	93383	711	92707	1241	343	60077	957	72493	1259	694	96587	482	54421
	870	77081			1227	884	77243	889	76207		912	74573	721	92593				885	79561
	702	92357				772	85577	863	79411		894	77261						771	88771
1209	952	70487				748	89363				728	91529			1261	714	94541	798	42331
	664	96851				718	91943				726	92009				566	99989	705	95959
1211			853	70153	1229	900	74843	963	70951	1243	782	85607	873	79693	1263	910	77213	482	54709
			843	80341				777	84919		716	93911	763	88261	1265	798	85109		
1213	948	71387	777	83341	1231	900	75227	899	75337				723	92347					
	888	74891	739	89527		898	75557	763	86851	1245	772	86771	719	93559	1267	485	54437	802	42283
	782	82763				890	76697	695	94837	1247				977	70981				
1215	854	79589	859	78691				555	99733					699	95629				
	686	94823	751	87313	1233	952	72269	857	80473	1249	966	72101	701	95419					
1217	856	79397	745	88843				755	88819		904	76367			1269	928	75149	482	54949
	778	83597	689	94573	1235	784	84053	909	74323	1251	772	87797	458	56149				745	91369
	718	90821				758	88301	791	83383				985	70597				733	93487
	712	91997				716	93047	783	84247				787	85621				731	93901
1219	752	87833	955	71011				777	85597					763	89317				
	716	91253			1237	970	70823	871	79279	1253	960	73043	915	75367	1271	920	76343	983	72109
1221	755	43607				780	85223	777	85843		788	85691	803	83227	1273	814	83561	901	78439
	706	93287				778	85661						775	87121				786	87587
1223	885	38219	867	78259		718	92699							767	88861				
	473	54059	849	80677		698	94949												
	884	76757								1255	884	79151	791	85497	1275	487	54617	791	86587
	850	80489			1239	718	93131	863	80233		872	80537			1277	818	83339	897	79669
	754	87977						727	91459	1257	886	78989	791	85549				793	86491
	718	91367						559	99661		884	79433	781	86353	1279	742	92867	905	78511

N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''
1281	890	80567	937	75079	1307	910	80309	927	78157	1329	838	83229		
	718	95651	929	75991		822	85667	755	93463	1331	972	73353	963	76519
			745	92377	1309	828	84761	963	74419		944	78167	853	78697
1283	744	92957	791	87973	1311	838	83639	923	79309				827	86341
1285	798	86477						799	89433	1333	1044	71081	783	91237
1289	824	83609	935	75931	1313			757	93739		926	80603		
			927	77479				737	95383	1335	842	85133	841	85453
			801	86311	1315	914	80471	1031	70867				787	90931
1291	817	42323	803	86197		772	91373	817	86371	1337	788	90989	967	76379
	930	77267	787	89371	1317	503	54629	830	42667		772	93581	939	79599
	812	85643	751	92311		914	80747	833	84793	1339	1056	70229	979	75211
1293	788	89459	725	95569				817	86599				965	77137
1295	948	74903	933	77239	1319	962	75611	1031	71347				777	92791
1285	748	93497	817	85081		956	76091	963	75403	1341	778	92861	967	77017
1297	545	51797	752	46507		804	89399						605	99667
	940	76103	901	80599	1321	966	75161	833	85213	1343	946	79139	751	95911
	804	86813	831	83299	1323	503	54869	818	43627	1345			831	87517
	734	94613	821	84559		746	95027			1347			955	78229
	732	94907			1325	744	95339	959	76369				953	78553
1299	1024	70313	905	80173				849	83269	1349	832	87911		
	754	92693			1327	513	54101	814	44203				790	91823
1301			1019	71059		507	54581	783	90787	1351	856	84443	1065	70309
1303	547	51893	798	44371		932	79691	749	94873		834	87671		
			756	46411	1305		840	84551						
			959	74587		744	95603			1353			973	77491
			941	77029										
			811	86293						1381			977	78571

N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''	N	N'	Z	N''	Z''					
1383	802	92951	1003	75979	1407	892	84263	989	79579	1435	1032	77477		1477	1140	72341	1045	78541	
			857	86923				811	93787		908	84713			858	92627	865	91801	
			775	95701	1409	1022	75941	1015	77269		904	85451					829	95401	
1385	798	93851				892	84521				842	91463		1481	918	86843	947	83563	
1387	880	84137	875	85093	1411	860	89417	1103	71317	1437	1040	76403			828	93957			
	846	89303	849	88867				889	85411	1439				1483	904	89381	1145	72277	
	776	95819						789	95923	1441	1052	75431	1015	79159	1487	1076	76463	1165	70999
1389	890	83273			1413	820	92753	821	92557		894	86579			1489	872	91811	835	94539
1391	864	86423			1415			1041	74413		884	88379				866	92363		
	854	88211						821	92809	1451				1049	76717			913	88813
	804	93371			1417	898	84377	1005	78163		860	90731	1031	78487	1493	880	90971	941	85303
1393	860	87623	985	78643		878	86951			1457	860	90731			1495	946	84701		
			967	80683		874	87881				842	93419			1497			925	87481
			853	88807	1419	800	95063	1027	76387	1459	846	92987	857	91243	1499	1084	76649	1061	78427
1395	884	84407			1421			883	86323	1463	1128	72533	1059	76333		930	86573		
1397	1092	71333	1005	77419				877	87751		904	87473	1031	79063		870	92723		
	1022	75029			1423			1115	70957		848	93083	857	91753	1503	1090	75989		
1399	986	79031	857	88657				989	80491				821	95443		872	92849		
			821	91411	1425	1028	76907	799	95581	1467	910	86627	847	93607		868	93557		
1401	790	95021				914	83093						827	95083	1505	954	84317		
1403	1032	74453	811	93337	1427	1010	78437	882	43669	1469	906	87917				888	90803		
	890	84179						835	91957	1471	900	88997	927	85363	1507	936	86441	955	84391
1405	886	85193	869	87133	1429	547	54443	1117	71341				909	87433	1509	1102	73347		
	856	89513	857	89293		884	87083			1475	946	83117	857	92569	1513	1064	79451		
			789	95317	1431	808	94811				852	93479				940	86381		

N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''
1517	940	86939			1563			983	85669	1613	984	89261	995	87853	1669	1022	88811			1703			1205	78517
1519	892	91283			1565	1128	77093	987	85159	1615					1679	1064	84389			1705			1043	88729
	890	91691				1102	79259	919	91291	1617	934	93491	1025	84313	1687	1220	76631	979	92761	1709			1223	76597
1521	940	87407				986	85427			1619	1004	86729	1173	76213	1691			1223	76597	1693	1032	89387	1045	87691
1527						972	86453								1695	1048	87257			1711	1238	76493	1083	84589
1529					1567	1130	77003	969	87181	1621			1173	76441	1717	1060	87641			1719	964	95531		
						992	84533	961	88471	1623	952	91571	1027	84697	1727	1222	78509	1013	91573	1729			1251	76507
1531	1078	79283	899	91303		956	89237	925	90709	1625	1172	76949	917	94933	1733			1075	86629	1735	1222	79181		
1533	940	88523			1571	1228	71339			1637	1002	88883			1737	1072	87767			1739	1272	75083		
	898	91757			1575			1109	79273	1641	1198	75437			1741	1364	70997	1259	76651	1745	1068	88919	1079	87223
1537					1577			975	87277	1643	1016	87179			1747			1015	92581					
					1583	1120	78539	971	88423	1647	1160	79193												
1541	1128	74933	969	85717		920	92489			1649			1043	84787										
	864	95597			1585			1159	75181	1651	1058	83243	1019	87739										
1545	872	94889						919	93001	1653	970	91433												
1549	1116	77237	907	91867	1591	984	87149	983	87511	1657			1199	76471										
	948	88937											1049	84523										
	900	92507			1595			919	93481				1015	88681										
1553	984	84437	1079	80557	1597	987	43691			1659			957	93529										
								973	89269															
1555	1144	74411			1601	928	93077	1171	75109															
	994	83621			1603			1011	85147															
1559	986	84809	875	95413				977	89431															
1561	908	92333			1611			989	88237															
	906	92717																						

N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''	N	N'	Z'	N''	Z''
1749			1027	91309	1823	1130	86837			1889			1091	93523	2059				1277 86577
1751			1269	76123		1118	88469			1909			1171	88411					1261 88741
1757	1086	87323			1825			1283	79531	1913			1181	87643	2069				1267 88789
1763	1276	76379			1829			1131	87187	1927	1182	88427			2077	1282	87701		
1765			1117	84631	1831	1158	84827			1929	1192	87443			2083	1288	87221		
1769			1097	86743	1841			1167	84307	1931	1222	84659				1276	88661		
1781			1091	88663	1843			1129	88651	1939	1222	85331			2089	1322	84653		
			1043	91813	1847	1140	87719	1301	79147	1943	1240	91499			2101		1219	92821	
1785	1102	87629				1082	91733			1949			1131	92779					
1793	1052	91493			1861	1140	88667	1177	84811	1957	1210	87251			2131		1343	85333	
1797	1102	88493			1865	1084	92459			1961			1241	84649	2141		1327	86869	
1803	1106	88397			1867	1160	86357			1969			1217	87337	2143		1325	87253	
1805			1049	92503		1154	87317			1975			1219	87721	2207	1364	87383		
1807	1120	86861			1871	1156	87509			1987	1432	77141			2309		1427	87403	
	1060	91541			1877	1322	79187			2031	1298	84629			2311		1429	87211	
1811	1148	84599			1879	1092	92507	1189	84691		1272	86693			2377		1419	88747	

Bei Beschränkung auf die unter 100.000 gelegenen Primzahlen bleiben also bis zur höchsten Coordinirten aller dyadisch
 sechzehnstelligen Primzahlen: 1597 folgende 104 ungerade Zahlen theils unbesetzt, theils ohne Z' (letzte Ziffer besternt)
 beziehungsweise Z'' (erste Ziffer unterstrichen):

861*, 931*, 1035*, 1047*, 1059*, 1101, 1149, 1155, 1157*, 1191, 1195*, 1197, 1207, 1209, 1211*, 1221, 1247*, 1265,
 1285, 1287, 1301*, 1305*, 1313*, 1329, 1345*, 1347*, 1349, 1353*, 1355, 1361*, 1369*, 1371, 1373*, 1375, 1379*, 1381*,
 1385, 1389, 1391, 1395, 1401, 1415*, 1421*, 1423*, 1431, 1433, 1435, 1437, 1439*, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451*, 1453,
 1455, 1461, 1465, 1469, 1473, 1479, 1485, 1491*, 1495, 1497*, 1501, 1503, 1505, 1509, 1511, 1513, 1515, 1517, 1519,
 1521, 1523, 1525, 1527*, 1529*, 1533, 1535, 1537*, 1539, 1543, 1545, 1547, 1551, 1555, 1557, 1561, 1563*, 1569, 1571,
 1573, 1575*, 1577*, 1579, 1581, 1585*, 1587, 1589, 1593, 1595*, 1597.

Bezeichnet man im Folgenden allgemein den Quotienten, welcher sich bei Division der Anzahl aller bis 10^n vorkommenden Primzahlen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ durch die Anzahl der zu ihrer dyadischen Coordination erforderlichen ungeraden Zahlen ergibt, mit q_n , so resultiren auf Grundlage der hier berechneten Tabelle speciell für $n = 2, 3, 4, 5$ die Gleichungen:

$$q_2 = \frac{23}{9} = 2.5555556, \quad q_3 = \frac{166}{39} = 4.2564103,$$

$$q_4 = \frac{1227}{185} = 6.6324324, \quad q_5 = \frac{9590}{860} = 11.1511628,$$

welche das theoretisch geforderte Ansteigen von q_n mit zunehmendem n deutlich ersichtlich machen. Um übrigens für die nächste Specialisirung: q_6 vorläufig wenigstens einen unteren Grenzwert zu gewinnen, erwäge man, dass die 78496 innerhalb der ersten Million vorkommenden Primzahlen von der Gestalt $6l \pm 1$ bei dyadischer Schreibweise nur je drei- bis zwanzig Ziffern beanspruchen, mithin die höchsten bei ihrer dyadischen Coordination in Betracht kommenden Zahlen—unter e_n den Nenner des n ten Näherungsbruches der Entwicklung:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

verstanden—nach einem bekannten Satze¹ der Nennergruppe:

$$e_{20} = 10946, \quad e_{20} - e_1 e_{15} = 9959, \quad e_{20} - e_3 e_{13} = 9815,$$

$$e_{20} - e_5 e_{11} = 9794, \quad e_{20} - e_7 e_9 = 9791, \quad e_{20} - e_8^2 = 9790,$$

$$e_{20} - e_{10} e_6 = 9789, \quad e_{20} - e_{12} e_4 = 9781, \quad e_{20} - e_{14} e_2 = 9726,$$

$$e_{20} - e_{16} = 9349$$

angehören. Hievon beziehen sich 10946, 9794, 9790 und 9726 ausnahmslos auf Zahlen der Form $3l$, während den sechs übrigen Nennern durch die beigesetzten Zähler folgende meist zusammengesetzte Zahlen coordinirt werden:

(1) Zu 9959 durch

$$3804 : 1^2 0101010101010101^2 = 873811 = (53) (16487),$$

$$4181 : 1^2 0^2 101010101010101^2 = 830123 = (7) (118589),$$

$$5778 : 101^2 0101010101010101 = 742741 = (47) (15803),$$

$$6155 : 10101010101010101^2 01 = 699053 \text{ als Primzahl } Z',$$

¹ Vgl. Simony a. a. O. S. 241–245.

(2) Zu 9815 durch

$$\begin{aligned}
3749 : 1^2 01010101010101^2 &= 873803 = (7) (43) (2903), \\
3804 : 1^2 010^2 10101010101^2 &= 862891 = (23) (37517), \\
6011 : 10101^2 010101010101 &= 709973 = (11) (19) (43) (79), \\
6066 : 101010101010101^2 0101 &= 699061 = (11) (103) (617).
\end{aligned}$$

(3) Zu 9791 durch

$$\begin{aligned}
3740 : 1^2 010101010^2 1010101^2 &= 873843 \text{ als Primzahl } Z'', \\
3741 : 1^2 0101010^2 101010101^2 &= 873131 = (7^2) (103) (173), \\
6050 : 101010101^2 0101010101 &= 699733 \text{ als Primzahl } Z'', \\
6051 : 10101010101^2 01010101 &= 699221 \quad " \quad " \quad Z'.
\end{aligned}$$

(4) Zu 9789 durch

$$\begin{aligned}
3736 : 1^2 010101^2 0101010101^2 &= 875179 = (43) (20353), \\
3739 : 1^2 0101010101^2 010101^2 &= 873899 = (13^2) (5171), \\
6050 : 101010101010^2 1010101 &= 698965 = (5) (43) (3251), \\
6053 : 10101010^2 10101010101 &= 697685 = (5) (139537),
\end{aligned}$$

(5) Zu 9781 durch

$$\begin{aligned}
3715 : 1^2 0101^2 010101010101^2 &= 879275 = (5^2) (35171), \\
3736 : 1^2 010101010101^2 0101^2 &= 873835 = (5) (174767), \\
6045 : 10101010101010^2 10101 &= 699029 = (19) (36791), \\
6066 : 101010^2 1010101010101 &= 693589 = (13) (53353).
\end{aligned}$$

(6) Zu 9349 durch

$$\begin{aligned}
2584 : 1^2 0101010101010101^2 &= 961195 = (5) (192239), \\
3571 : 1^2 0101010101010101^3 &= 873815 = (5) (174763), \\
5778 : 101010101010101010^3 &= 699049 = (13) (53773), \\
6765 : 10^2 10101010101010101 &= 611669 = (113) (5413).
\end{aligned}$$

Der Quotient q_6 besitzt mithin den unteren Grenzwert:

$$\frac{78496}{4675} = 16.7905882.$$

Vereinigt man schliesslich alle hier auf rein arithmetischem Wege festgestellten topologischen Primzahlen mit den früher bekannt gewordenen zu einer einzigen aufsteigenden Reihe, so ergibt sich bei gesonderter Zählung der Anzahlen: ζ' , ζ'' ihrer Glieder von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ die nachstehende Tabelle, in welcher jede auch in der vollständigen Primzahlenreihe unmittelbar auf die vorhergehende folgende Primzahl durch ein Sternchen gekennzeichnet ist.

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
1	—	5	24	—	587	48	—	1367	—	67	2707
—	1	7*	25	—	593*	49	—	1373*	—	68	2713
2	—	11*	26	—	599*	—	44	1381*	70	—	2729
—	2	13*	—	23	601*	50	—	1427	—	69	2731*
—	3	19	—	24	613	—	45	1429*	71	—	2741*
3	—	23*	27	—	617*	—	46	1447	—	70	2749*
—	4	37	—	25	619*	51	—	1451*	72	—	2777
4	—	41*	28	—	647	—	47	1483	—	71	2791
—	5	43*	29	—	659	52	—	1499	—	72	2797*
5	—	47*	—	26	661*	53	—	1571	—	73	2803
6	—	53*	—	27	673*	—	48	1579*	73	—	2837
—	6	61	30	—	677*	54	—	1583*	74	—	2843*
—	7	73	31	—	683*	55	—	1619	—	74	2857
7	—	83	—	28	691*	—	49	1621*	75	—	2897
8	—	89*	—	29	727	—	50	1627*	76	—	2903*
—	8	103	—	30	733*	56	—	1637*	—	75	2917
9	—	107*	—	31	739*	—	51	1723	77	—	2957
—	9	109*	—	32	757	—	52	1741	78	—	2963*
—	10	139	32	—	761*	—	53	1831	79	—	2969*
10	—	149*	33	—	809	—	54	1873	—	76	3049
—	11	151*	—	33	811*	57	—	1907	—	77	3163
11	—	167	34	—	821*	—	55	2137	—	78	3181
—	12	173*	—	34	823*	—	56	2203	—	79	3187*
—	12	181	35	—	839	58	—	2213	80	—	3209
13	—	197	—	35	853*	—	57	2221*	—	80	3217*
14	—	227	36	—	881	—	58	2251	81	—	3221*
—	13	229*	37	—	947	59	—	2333	—	81	3253
—	14	271	38	—	971	60	—	2339*	82	—	3257*
—	15	277*	—	36	991	—	59	2341*	—	82	3271
—	16	283	—	37	1063	—	60	2347*	—	83	3307
15	—	293*	—	38	1069*	61	—	2357	—	84	3313*
—	17	307*	39	—	1109	—	61	2371*	83	—	3407
16	—	311*	—	39	1117*	—	62	2377*	84	—	3413*
—	18	313*	40	—	1163	62	—	2381*	—	85	3433*
—	19	331	40	—	1171*	—	63	2389	85	—	3491
17	—	347	41	—	1181*	63	—	2393*	—	86	3499*
—	18	383	42	—	1187*	64	—	2411	—	87	3547
—	20	397	43	—	1193*	65	—	2423	—	88	3739
19	—	401*	44	—	1229	66	—	2441	86	—	3797
20	—	443	—	41	1237*	67	—	2459	87	—	3947
21	—	467	45	—	1259	—	64	2467*	88	—	4217
—	21	547	46	—	1301	—	65	2473*	—	89	4261
22	—	557*	47	—	1319	68	—	2477*	89	—	4373
—	23	563*	—	42	1321*	69	—	2633	90	—	4397
23	—	571	—	43	1327*	—	66	2647*	—	90	4441

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
91	—	4457	—	114	5479	135	—	6863	—	158	9619*
92	—	4493	113	—	5483*	—	137	6949	—	159	9643
93	—	4517	—	115	5527	136	—	6959*	—	160	9649*
—	91	4519*	—	116	5557	—	138	6997	159	—	9689
94	—	4523*	—	117	5563*	137	—	7001*	—	161	9781
—	92	4639	—	118	5581	138	—	7013*	—	162	9787*
95	—	4649	—	119	5653	139	—	7019*	160	—	9803
—	93	4651*	—	120	5689	140	—	7079	—	163	9811*
—	94	4663	114	—	5711	141	—	7253	—	164	9817*
96	—	4679	115	—	5717*	—	139	7297	—	165	9829*
97	—	4691*	116	—	5741	—	140	7333	161	—	9833*
98	—	4703*	117	—	5783	142	—	7487	162	—	9851
99	—	4751	118	—	5801	143	—	7499	—	166	9883
—	95	4759*	119	—	5807*	—	141	7507	—	167	9901
—	96	4783*	120	—	5813*	144	—	7529	—	168	9907*
100	—	4787*	—	121	5821*	—	142	7603	—	169	9931
—	97	4789*	121	—	5843	145	—	7703	163	—	9941*
101	—	4793	—	122	5851	—	143	8539	164	—	10037
—	98	4813	122	—	5861	—	144	8677	165	—	10061
102	—	4889	123	—	5981	—	145	8887	166	—	10067*
—	99	4903*	—	123	6217	—	146	8923	167	—	10091
—	100	4909*	124	—	6311	146	—	8933	—	170	10099
103	—	4937	125	—	6317*	—	147	9001	168	—	10391
—	101	4951	126	—	6323*	147	—	9011	169	—	10457
—	102	4957*	127	—	6359	—	148	9013*	—	171	10459*
104	—	4967*	—	124	6361*	—	149	9043	—	172	10477
—	103	4969*	—	125	6421	—	150	9049*	—	173	10567
105	—	4973*	—	126	6469	—	151	9067	170	—	10589*
106	—	5003	—	127	6481	—	152	9127	—	174	10597*
—	104	5011	128	—	6491*	148	—	9137	171	—	10601*
—	105	5179	129	—	6551	149	—	9323	172	—	10607*
—	106	5227	—	128	6553*	150	—	9371	—	175	10639
107	—	5273	—	129	6571	—	153	9397	—	176	10651*
108	—	5303	130	—	6581	151	—	9413	173	—	10667
—	107	5323	131	—	6599*	152	—	9419*	174	—	10709
109	—	5333*	—	130	6691	—	154	9421*	—	177	10711*
—	108	5347*	—	131	6709	153	—	9431*	175	—	10733
110	—	5399	—	132	6733	—	155	9463	176	—	10781
—	109	5413	132	—	6761	154	—	9491	—	178	10789*
111	—	5417*	—	133	6763*	155	—	9497*	177	—	10799*
—	110	5419*	133	—	6803	156	—	9539	—	179	10837
—	111	5431*	—	134	6823*	—	156	9547*	178	—	10847*
—	112	5443	134	—	6827*	157	—	9551*	179	—	10853*
—	113	5449*	—	135	6829*	158	—	9587*	180	—	10859*
112	—	5471*	—	136	6841	—	157	9613	—	180	10861*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
—	181	10867*	202	—	13163	226	—	17987	251	—	19403
—	182	10909	203	—	13397	227	—	18059	—	246	19531
—	183	10939	—	205	13477	—	226	18061*	252	—	19541*
181	—	10949*	204	—	13487*	228	—	18089	—	247	19543*
—	184	10957*	205	—	13499*	229	—	18131	—	248	19603
—	185	10987	—	206	13591	—	227	18133*	—	249	19609*
182	—	11003	206	—	13613	230	—	18149	253	—	19661*
183	—	11057	207	—	13619*	231	—	18233	—	250	19687
—	186	11083	208	—	13649	—	228	18253	—	251	19753
184	—	11087*	—	207	13669*	—	229	18517	—	252	19759*
—	185	—	209	—	13781	—	230	18583	254	—	19763*
—	187	11113*	210	—	13877	232	—	18587*	255	—	19793
186	—	11117*	—	208	13879*	—	231	18637	—	253	19801*
—	188	11131	209	—	13903	233	—	18731	—	254	19813*
187	—	11159	211	—	13967	234	—	18749	—	255	19819*
—	188	—	212	—	13997*	235	—	18773	—	256	19861
—	189	11353	213	—	14009	—	232	18787*	—	257	19891
189	—	11411	—	210	14011*	—	233	18793*	—	258	19927
—	190	11443	—	211	14251	236	—	18797*	256	—	20021
190	—	11447*	—	212	14629	237	—	18803*	257	—	20051
—	191	11527	214	—	14669	—	234	18859	—	259	20107
191	—	11549*	—	213	14779	238	—	18869*	258	—	20117
—	192	11593	215	—	15017	239	—	18899*	259	—	20123*
192	—	11597*	—	214	15061	—	235	18919	—	260	20149
193	—	11621	216	—	15083	240	—	19013	—	261	20173
—	193	11689	—	215	15541	241	—	19031*	260	—	20183
—	194	11731	217	—	15581	242	—	19037*	261	—	20627
195	—	11863	—	216	16447	—	236	19051*	262	—	20759
—	194	11867*	—	217	16741	—	237	19081	263	—	20807
195	—	11981	—	218	16981	243	—	19139	264	—	20903
—	196	—	219	—	16987*	—	238	19141*	265	—	20921*
—	196	12613	218	—	17189	244	—	19157*	266	—	20939
—	197	12619*	219	—	17321	245	—	19163*	—	262	21013
—	198	12697	—	220	17491	246	—	19211	—	263	21031
197	—	12713	220	—	17573	—	239	19213*	267	—	21059*
—	199	12739	221	—	17579*	—	240	19219*	—	264	21067
—	200	12853	—	221	17581*	—	241	19237	268	—	21101
—	201	12889*	—	222	17623	—	242	19249*	269	—	21107*
198	—	12941	222	—	17627*	247	—	19301	270	—	21143
—	202	12973	—	223	17707	—	243	19309*	—	265	21157
—	199	12983	—	224	17737	248	—	19319*	—	266	21163*
200	—	13004*	223	—	17747*	—	244	19333*	—	267	21169*
—	203	13003*	—	225	17749*	249	—	19373*	271	—	21179*
—	204	13033	224	—	17783	250	—	19379*	—	268	21193
201	—	13109	225	—	17837	—	245	19381*	—	269	21211*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
272	—	21221*	296	—	22859	—	313	26437	—	336	30103
273	—	21227*	297	—	22871	319	—	26669	341	—	30293
274	—	21269	298	—	22961	320	—	26711	342	—	30347
—	270	21283	—	291	22963*	—	314	26839	—	337	30391
275	—	21323	—	292	22993	321	—	26921	343	—	31013
276	—	21341*	—	293	23131	—	315	26953	344	—	31397
—	271	21397	299	—	23159	—	316	26959*	—	338	31963
277	—	21419	—	294	23173	322	—	26987	—	339	33013
—	272	21589	300	—	23189*	323	—	27059	345	—	33461
—	273	21613	301	—	23201	—	317	27061*	—	340	33493
—	274	21649	—	295	23203*	—	318	27091	—	341	34123
—	275	21661*	—	296	23209*	324	—	27107	—	342	34147
—	276	21673*	—	297	23269	325	—	27179	346	—	34217
278	—	21683*	302	—	23339	326	—	27191*	—	343	34381
279	—	21713	—	298	23371	—	319	27211	347	—	35117
—	277	21739	303	—	23399*	327	—	27239*	—	344	35149
—	278	21787	—	299	23719	—	320	27253	348	—	35153*
280	—	21803	—	300	23899	—	321	27259*	—	345	35227
—	279	21817*	—	301	23917	—	322	27367	—	346	35251*
281	—	21821*	304	—	23957	—	323	27427	—	347	35401
282	—	21839*	—	302	23977	328	—	27437	—	348	35419
283	—	21851	—	303	24109	329	—	27479	—	349	35437
284	—	21863	—	304	24169	330	—	27509	—	350	35491
—	280	21871*	—	305	24229	331	—	27611	349	—	35507*
285	—	21911	305	—	24923	—	324	27691	—	351	35509*
—	281	21943	306	—	24971	—	325	27817	—	352	35527
—	282	21961*	307	—	25013	332	—	27851	350	—	35531*
286	—	21977*	308	—	25163	333	—	27941	—	353	35533*
287	—	22067	309	—	25253	—	326	27943*	351	—	35537*
288	—	22091	310	—	25307	334	—	27947*	352	—	35543*
—	283	22123	311	—	25703	—	327	28081	353	—	35597
289	—	22133	—	306	25747	—	328	28123	—	354	35671
—	284	22153	—	307	25771	335	—	28307	—	355	35677*
290	—	22157*	312	—	25799	—	329	28387	354	—	35753
—	285	22159*	313	—	25931	—	330	29101	355	—	35993
—	286	22171*	—	308	25939	336	—	29339	—	356	36007
—	287	22189*	314	—	25943*	—	331	29347*	356	—	36011*
291	—	22229	315	—	26021	337	—	29363*	—	357	36013*
292	—	22283	316	—	26183	338	—	29387	357	—	36131
293	—	22307	317	—	26189*	—	332	29629	—	358	36187
294	—	22349	—	309	26227	—	333	29863	358	—	36251
—	288	22381	—	310	26263	339	—	29867*	—	359	36523
295	—	22697	318	—	26267*	—	334	29917	—	360	36529
—	289	22717	—	311	26293*	—	335	29989	359	—	36629
—	290	22741	—	312	26347	340	—	30011*	—	361	36709

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
360	—	37013	385	—	38237*	409	—	39659	432	—	42221
361	—	37019*	386	—	38261	—	403	39703	—	425	42283
362	—	37061	—	382	38281	410	—	39719	433	—	42293*
—	362	37171	—	383	38299	—	404	39727*	434	—	42299*
—	363	37189	—	384	38317	—	405	39733*	435	—	42323
363	—	37223	387	—	38321*	411	—	39749*	—	426	42331*
364	—	37307	—	385	38329	—	406	39769	—	427	42349
—	364	37339	388	—	38333*	—	407	39979	436	—	42359*
365	—	37463	—	386	38449	412	—	39989	—	428	42391
—	365	37483*	389	—	38501	413	—	40037	—	429	42397*
366	—	37493	390	—	38543*	—	408	40099	—	430	42403*
367	—	37517	391	—	38567	414	—	40151	437	—	42407*
368	—	37529*	—	387	38569*	415	—	40169	438	—	42443
369	—	37547	392	—	38603	—	409	40213	—	431	42451*
—	366	37549*	—	388	38611	—	410	40231*	—	432	42457*
—	367	37573	—	389	38629*	—	411	40237*	439	—	42533
—	368	37579*	393	—	38669	416	—	40277	440	—	42569
370	—	37589*	—	390	38671*	—	412	40357	—	433	42571*
—	369	37591*	394	—	38699	417	—	40787	—	434	42643
371	—	37607*	—	391	38713	—	413	41077	—	435	42649*
372	—	37649	—	392	38749	418	—	41189	—	436	42667*
—	370	37657*	—	393	38803	419	—	41387	441	—	42677*
373	—	37691	—	394	39019	—	414	41389*	—	437	42697
—	371	37717	395	—	39113	420	—	41549	442	—	42701*
—	372	37747*	396	—	39191	421	—	41579*	—	438	42703*
374	—	37781*	397	—	39227	422	—	41609	—	439	42709*
375	—	37799	—	395	39229*	423	—	41621	443	—	42797
376	—	37811*	—	396	39241	—	415	41641	—	440	42841
—	373	37813*	398	—	39251*	—	416	41659	—	441	42853*
—	374	37957	—	397	39301	424	—	41669*	—	442	42859*
—	375	37963*	399	—	39317	—	417	41719	—	443	43177
—	376	37987	400	—	39323*	425	—	41771	—	444	43189*
—	377	37993	401	—	39341*	426	—	41813	444	—	43223
377	—	37997*	402	—	39371	—	418	41941	—	445	43237*
378	—	38039	—	398	39451	427	—	42071	445	—	43283
—	378	38053	403	—	39461*	—	419	42073*	446	—	43319
379	—	38069*	—	399	39499*	428	—	42101	447	—	43331
—	379	38083*	404	—	39509	429	—	42131*	448	—	43397
—	380	38119	—	400	39511*	—	420	42139*	449	—	43403
380	—	38183	405	—	39563	—	421	42157*	—	446	43411*
381	—	38189*	406	—	39569*	—	422	42169*	—	447	43441
—	381	38197*	407	—	39581*	430	—	42179*	450	—	43499
382	—	38201*	—	401	39607*	—	423	42181*	451	—	43541
383	—	38219*	—	402	39619*	—	424	42187*	—	448	43543*
384	—	38231*	408	—	39623*	431	—	42197	—	449	43573*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
452	—	43577*	—	476	45673*	—	497	50341	—	522	53593
—	450	43591	471	—	45707	—	498	50359*	—	523	53611
—	451	43597*	472	—	45737*	—	499	50461	515	—	53681
453	—	43607*	—	477	45751*	—	500	50503	516	—	53861
—	452	43609*	473	—	45779	495	—	50513*	517	—	53927
454	—	43613*	474	—	45869	—	501	50539	518	—	53939*
—	453	43627*	475	—	45971	—	502	50581	—	524	53959
455	—	43661	476	—	45989	—	503	50773	—	525	54037
—	454	43669*	—	478	46027	496	—	50867	—	526	54091
456	—	43691*	477	—	46133	—	504	50893	519	—	54101*
—	455	43717	478	—	46187	—	505	51349	520	—	54371
—	456	43753	—	479	46219	497	—	51413	—	527	54409
457	—	43853	479	—	46229*	498	—	51479	521	—	54413*
—	457	43891	—	480	46237*	—	506	51511	522	—	54419*
—	458	43933	—	481	46261*	499	—	51539	—	528	54421*
—	459	43951	480	—	46307	500	—	51563	523	—	54437*
—	460	43987	—	482	46309*	—	507	51607	524	—	54443*
—	461	44119	—	483	46381	—	508	51637	525	—	54539
—	462	44131	—	484	46441	501	—	51767	526	—	54563
458	—	44171	—	485	46477	—	509	51787	—	529	54601
—	463	44179*	481	—	46499	502	—	51797*	527	—	54617*
459	—	44189*	—	486	46507*	503	—	51803*	528	—	54629
460	—	44201*	482	—	46511*	—	510	51817*	—	530	54631*
—	464	44203*	483	—	46523*	504	—	51827*	—	531	54667
461	—	44249	—	487	46633	—	511	51829*	—	532	54679
462	—	44267	484	—	46649	—	512	51853	—	533	54709
—	465	44269*	485	—	46691	—	513	51859*	529	—	54713*
463	—	44357	486	—	46757	505	—	51869*	—	534	54829
—	466	44371*	487	—	46769*	—	514	51871*	530	—	54869
464	—	44381*	—	488	46771*	506	—	51893*	—	535	54949
—	467	44389	—	489	46807*	507	—	51899*	—	536	54979
465	—	44453	488	—	46829	—	515	51949	—	537	55603
—	468	44491	489	—	46901	—	516	52057	—	538	55621
466	—	44501	—	490	46933	—	517	52069	—	539	55639
467	—	44621	490	—	46997	508	—	52127	—	540	55717
—	469	44647	—	491	47317	509	—	52313	531	—	55721*
—	470	44893	491	—	47339*	510	—	52361	—	541	55897
—	471	45403	492	—	47459	511	—	52391	532	—	55901*
468	—	45413*	—	492	47521	512	—	52517	—	542	55987
—	472	45481	—	493	47701	513	—	52571	533	—	56099
469	—	45497	493	—	47717	—	518	52627	—	543	56101*
—	473	45541	—	494	47917	514	—	52691	—	544	56149
—	474	45613	—	495	47947	—	519	52813	534	—	56171
470	—	45659	—	496	47977	—	520	52951	—	545	56599
—	475	45667*	494	—	48299	—	521	53419	535	—	56663

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
536	—	56747	—	568	70891	—	593	73387	—	614	75979
—	546	58027	559	—	70937	579	—	73907	603	—	75989
—	547	58057	560	—	70949*	—	594	74323	604	—	76079
—	548	58543	—	569	70951*	580	—	74381	—	615	76123
—	549	58549*	—	570	70957*	581	—	74411	—	616	76129*
—	550	58573	—	571	70981	—	595	74413*	—	617	76147*
537	—	58679	561	—	70991*	—	596	74419*	—	618	76207
—	551	58693	562	—	70997*	582	—	74441*	—	619	76213*
—	552	58699*	—	572	70999*	—	597	74449*	605	—	76253
—	553	58711*	—	573	71011*	583	—	74453*	—	620	76261
538	—	58733	—	574	71023*	—	598	74587	—	621	76333
539	—	59051	—	575	71059	584	—	74597*	606	—	76343*
—	554	59053*	563	—	71069*	—	599	74827	—	622	76369
540	—	59561	564	—	71081*	585	—	74843	607	—	76379*
541	—	59723	—	576	71089*	586	—	74903	—	623	76387*
542	—	59753	565	—	71261	—	600	74923*	608	—	76403*
—	555	59797	577	—	71317	587	—	74933	—	624	76441
543	—	59957	566	—	71327*	—	601	75079	609	—	76463*
544	—	60077	567	—	71333	588	—	75083*	—	625	76471*
545	—	60317	568	—	71339*	—	602	75109*	610	—	76487
546	—	60761	—	578	71341*	589	—	75149	611	—	76493*
—	556	62299	—	579	71347*	590	—	75161*	—	626	76507*
—	557	62773	—	580	71353*	—	603	75181	—	627	76519
—	558	67927	569	—	71387	—	604	75193*	—	628	76579
547	—	68171	—	581	71389*	591	—	75209*	—	629	76597*
—	559	68437	—	582	71479	—	605	75211*	612	—	76631
548	—	68909	570	—	71861	—	606	75223	613	—	76649*
—	560	69031	—	583	71899	592	—	75227*	—	630	76651*
549	—	70061	—	584	72019	—	607	75253	—	631	76717
550	—	70229	—	585	72043	—	608	75307	614	—	76847
—	561	70309	571	—	72101	—	609	75337	615	—	76883
551	—	70313*	—	586	72109	593	—	75347*	616	—	76907*
552	—	70379	—	587	72139*	594	—	75353*	617	—	76943
—	562	70423	572	—	72269	—	610	75367*	618	—	76949*
553	—	70451	—	588	72277	595	—	75431	—	632	76963
554	—	70487	573	—	72341	596	—	75437*	619	—	77003
—	563	70489*	—	589	72367	597	—	75479*	—	633	77017*
—	564	70501*	—	590	72469	—	611	75541	620	—	77093
—	565	70549	—	591	72493	598	—	75611	—	634	77101*
555	—	70571*	574	—	72503	599	—	75617*	621	—	77141
556	—	70823	575	—	72533*	600	—	75629	622	—	77201
557	—	70841*	576	—	72617	601	—	75653	623	—	77213*
—	566	70843*	—	592	72997	—	612	75883	624	—	77237*
—	567	70867	577	—	73043	—	613	75931	—	635	77239*
558	—	70877*	578	—	73079	602	—	75941	625	—	77243*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
—	636	77269	646	—	79397	672	—	84377	—	703	85837
626	—	77351	647	—	79451	673	—	84389*	694	—	86183
627	—	77417	—	661	79531	—	680	84391*	—	704	86197*
—	637	77419*	—	662	79579	674	—	84407	—	705	86323
628	—	77477	648	—	79589*	—	681	84421*	695	—	86357
—	638	77491	—	663	79669	675	—	84437	696	—	86423
629	—	77513	—	664	79693	676	—	84443*	697	—	86441*
630	—	77543	—	665	80173	—	682	84499	698	—	86477
—	639	77557	649	—	80231	—	683	84589	—	706	86587
631	—	77621	—	666	80233*	677	—	84629*	699	—	86627
—	632	78101	650	—	80309	—	684	84631*	—	707	86629*
—	640	78121*	651	—	80471	—	685	84649*	—	708	86677*
633	—	78137*	—	667	80473*	678	—	84653*	—	709	86689*
—	641	78139*	—	668	80557	679	—	84659*	700	—	86729
—	642	78157*	652	—	80567*	—	686	84691	—	710	86743*
—	643	78163*	653	—	80681	—	687	84697*	701	—	86771
—	644	78229	654	—	81233	680	—	84701*	702	—	86837
—	645	78259	—	655	81293	681	—	84761	703	—	86843*
—	646	78427	—	669	82981	—	688	84787*	—	711	86857
634	—	78437*	656	—	83117	682	—	84809	704	—	86861*
—	647	78439*	657	—	83177	—	689	84811*	—	712	86869*
—	648	78487	658	—	83219	683	—	84827*	705	—	86939
635	—	78509	659	—	83243	684	—	85061	—	713	87133
—	649	78511*	660	—	83273	—	690	85093	706	—	87149*
—	650	78517*	661	—	83339	685	—	85109	707	—	87179
636	—	78539*	—	670	83341*	686	—	85133	—	714	87181*
—	651	78541*	662	—	83417	—	691	85147*	—	715	87187*
—	652	78571	—	671	83557	—	692	85159*	—	716	87211*
—	653	78643	663	—	83561*	687	—	85193*	708	—	87221*
—	654	78691	—	672	83563*	—	693	85213	—	717	87223*
637	—	78707	664	—	83609	688	—	85229	709	—	87251*
638	—	78989	665	—	83639	—	694	85297	—	718	87253*
639	—	79031	—	673	83641*	—	695	85303*	710	—	87257*
640	—	79139	—	674	83653*	689	—	85331	—	719	87277*
—	655	79147*	666	—	84053	—	696	85333*	711	—	87323
641	—	79151*	—	675	84067	—	697	85363	—	720	87337*
—	656	79153*	—	676	84121	—	698	85429	712	—	87383
—	657	79159*	667	—	84137	—	699	85453	—	721	87403*
642	—	79181*	—	677	84181	690	—	85469*	713	—	87407*
643	—	79187*	668	—	84263	—	700	85549	714	—	87443
644	—	79193*	669	—	84299*	691	—	85607	—	722	87481
—	658	79273	—	678	84307*	—	701	85669	715	—	87491*
—	659	79279*	—	679	84313*	—	702	85717	716	—	87509*
645	—	79283*	670	—	84317*	692	—	85733*	—	723	87511*
—	660	79309	671	—	84347	693	—	85817	—	724	87517*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
717	—	87623	—	742	88789	755	—	91499*	—	772	93337
718	—	87629*	735	—	88793*	756	—	91571	770	—	93383
719	—	87641	736	—	88811	—	757	91573*	771	—	93491
—	725	87643*	—	743	88813*	—	758	91591	—	773	93523
—	726	87691	—	744	88843	757	—	91811	—	774	93559
—	727	87697*	737	—	88883	—	759	91867	—	775	93607
720	—	87701*	738	—	88919	758	—	92333	—	776	93739
721	—	87719*	—	745	88993	759	—	92459	772	—	93851
—	728	87721*	739	—	88997*	—	760	92461*	773	—	93893
—	729	87739*	—	746	89017	—	761	92503	774	—	94541
722	—	87767	740	—	89261	760	—	92507*	775	—	94547
723	—	87797	—	747	89269*	—	762	92557	—	777	94771
724	—	87833	741	—	89381	—	763	92569	776	—	94811
—	730	87853*	742	—	89387*	—	764	92581*	777	—	94889
—	731	87877	743	—	89417	—	765	92707	—	778	94933
725	—	87911	—	748	89449	761	—	92753	778	—	95021
726	—	87917*	744	—	89459*	—	766	92761*	779	—	95063
—	732	87961	—	749	89491	—	767	92779	780	—	95339
—	733	87973*	745	—	89501*	—	768	92821	—	779	95413
—	734	88117	746	—	90281	762	—	92861	—	780	95419*
—	735	88237	—	750	90523	763	—	92867	781	—	95531
727	—	88241*	747	—	90731	—	769	92893*	—	781	95539*
728	—	88397	—	751	90793	—	770	92899*	—	782	95569
—	736	88411*	748	—	90833	764	—	92951	—	783	95581*
—	737	88423*	749	—	90917	765	—	92957*	—	784	95911
729	—	88427*	750	—	90971	766	—	92987	782	—	96557
730	—	88493	751	—	90989	767	—	93077	783	—	96587
731	—	88523	—	752	91237	768	—	93131	—	785	97003
732	—	88547*	—	753	91243*	—	771	93253	784	—	97157
—	738	88651	752	—	91283	769	—	93323	—	786	99607
—	739	88657*	—	754	91303						
—	740	88663	—	755	91309*						
733	—	88667*	753	—	91433						
734	—	88721	—	756	91453*						
—	741	88747	754	—	91493						

Hienach befinden sich unter den bis 100.000 vorkommen-
den Primzahlen nur 1570 topologische, von welchen 635
isolirt, dagegen 935 Primzahlen als Glieder von Zahlen-
gruppen auftreten. Es enthält nämlich die in Rede stehende
Zahlenreihe 192 zweigliedrige, ferner 67, 37, 18, 12 drei-, vier-,
fünf- und sechsgliedrige Zahlengruppen, sowie ausserdem in
19301, 19309, 19319, 19333, 19373, 19379, 19381;
38183, 38189, 38197, 38201, 38219, 38231, 38237

zwei siebengliedrige, in

42101, 42131, 42139, 42157, 42169, 42179, 42181, 42187;
79139, 79147, 79151, 79153, 79159, 79181, 79187, 79193

zwei achteigliedrige, endlich in

87179, 87181, 87187, 87211, 87221,
87223, 87251, 87253, 87257, 87277

eine zehngliedrige Zahlengruppe, während bekanntlich in beiden arithmetischen Primzahlenreihen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ schon sechsgliedrige lückenlose Zahlengruppen relativ selten vorkommen.

Anderseits umgrenzen je zwei aufeinanderfolgende topologische Primzahlen, zwischen welchen irgend eine Potenz von 2—etwa 2^p —gelegen ist, schon für mässige Werthe von p individuenreiche Gruppen rein arithmetischer Primzahlen, wie aus nachstehendem, deren jeweilige Anzahl: k_p nebst beiden topologischen Grenzzahlen: P'_p, P''_p für $p = 5, 6, \dots 16$ liefernden Schema hervorgeht:

p	P'_p	k_p	P''_p	p	P'_p	k_p	P''_p	p	P'_p	k_p	P''_p
5	23	2	37	9	467	9	547	13	7703	86	8539
6	61	2	73	10	991	11	1063	14	15581	88	16447
7	109	4	139	11	1907	29	2137	15	31963	109	33013
8	229	7	271	12	3947	28	4217	16	62773	463	67927

Hienach besitzt die Reihe der topologischen Primzahlen auch hinsichtlich ihrer Vertheilung über die vollständige Primzahlenreihe einen eigenthümlichen Charakter, ohne dass sich jedoch vorläufig die Frage entscheiden lässt, ob das einzige allen topologischen Primzahlen gemeinsame arithmetische Merkmal eine selbstständige zahlentheoretische Untersuchung derselben ermöglicht? — In diesem Sinne musste sich die vorliegende Arbeit darauf beschränken möglichst viele für weitere Forschungen verwertbare specielle Resultate festzustellen und hat ihren Zweck erfüllt, wenn sie wenigstens zur Aufsuchung mathematischer Beweise für jene topologisch-arithmetischen Inductionsschlüsse angeregt hat, deren empirische Grundlage erst durch die hier mitgetheilten numerischen Ergebnisse in allen Details verificirt worden ist.

XVI. SITZUNG VOM 14. JUNI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1894) des 103. Bandes, Abtheilung I, der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner übergibt eine Abhandlung: »Über eine optische Reaction der Binde-substanzen auf Phenole«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung vom Adjuncten der Prager Sternwarte Dr. R. Spitaler unter dem Titel: »Bahnbestimmung des Kometen 1851 III«.

Der Secretär Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: »Die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel und auf den Berggipfeln überhaupt«.

XVII. SITZUNG VOM 21. JUNI 1894.

Herr Prof. H. Höfer an der k. k. Berg-Akademie in Leoben übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die geologischen Verhältnisse der St. Pauler Berge im östlichen Kärnten«.

Herr Prof. Dr. Karl Bobek an der k. k. deutschen Universität in Prag übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit unter dem Titel: »Bemerkungen über die Constitution der fetten Säuren und die Löslichkeit ihrer Salze«.

Ferner legt Herr Hofrath Lieben eine Arbeit aus seinem Laboratorium von G. Johanny vor: »Über die Einwirkungsproducte der Blausäure auf Methyläthylacrolein«.

Herr Dr. Ed. Mahler in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Die Apisperiode der alten Ägypter«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Arnoux, G., *Essais de Psychologie et de Métaphysique positives. Arithmétique graphiques. Les espaces arithmétiques hypermagiques.* Paris, 1894; 8°.

Caruelii, Th., *Epitome florae Europae terrarumque affinium sistens plantas Europae, Barbariae, Asiae occidentalis et*

centralis et Sibiriae quoad divisiones, classes, cohortes, ordines, familias, genera ad characteres essentielles exposita. Fasc. I. Monocotyledones. Fasc. II. Dicotyledones. Florentiae, 1892 et 1894; 8^o.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg, Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. I. Thermometrische Arbeiten. Berlin, 1894; 4^o.

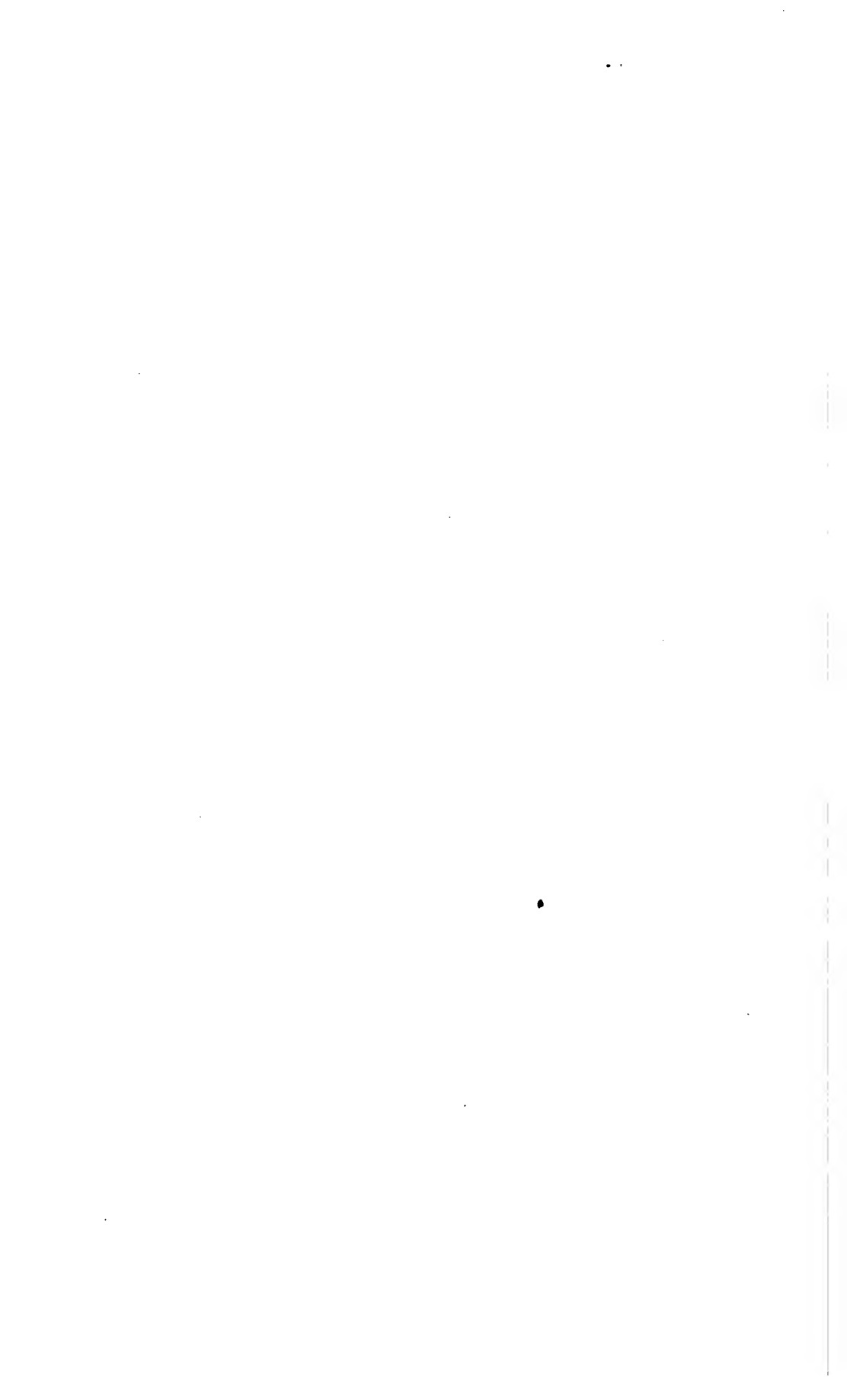
SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

**ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.**



XVIII. SITZUNG VOM 5. JULI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Doppelheft IV—V (April—Mai 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Die königl. italienische Botschaft in Wien übermittelt ein Druckwerk von Prof. Roberto Campana an der k. Universität in Rom unter dem Titel: »Lepra«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. Ign. Klemenčič: »Über die circulare Magnetisirung von Eisendrähten«.

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von F. Wenzel, betitelt: »Synthese des Kynurins«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. E. Freiherr v. Haerdtl unter dem Titel: »Zur Frage der Perihelbewegung des Planeten Mercur«.

Das c. M. Herr Oberst A. v. Obermayer überreicht eine Abhandlung: »Über die Wirkung des Windes auf schwach gekrümmte Flächen«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Campana, R., Lepra. (Mit Illustrationen.) Genova, 1894.

Martel, E. A., Les abîmes, les eaux souterraines, les cavernes,
les sources, la spéléologie. Explorations souterraines
effectuées de 1888 à 1893 en France, Belgique, Autriche
et Grèce. (Mit Illustrationen.) Paris, 1894; 4^o.

Die tägliche Periode der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel und auf Berggipfeln überhaupt

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1894.)

Die anemometrischen Aufzeichnungen auf dem Sonnblickgipfel erstrecken sich nunmehr schon auf mehr als sechs Jahre (beginnend mit September 1887). Leider war es bisher wegen Mangel an Arbeitskräften nicht möglich, dieselben vollständig zu reduciren. Bloss die zweijährigen Aufzeichnungen September 1887 bis August 1889 inclusive sind vollständig reducirt, discutirt und auch in extenso veröffentlicht worden. Es geschah dies in der Abhandlung von Herrn Dr. J. M. Pernter: »Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick und einigen anderen Gipfelstationen« (Denkschriften, LVIII. Bd., Wien, 1891. Vorgelegt im December 1890).

Um die jetzt schon vorliegenden anemometrischen Registrirungen wenigstens nach einer Richtung hin verwerthen zu können, liess ich die Windgeschwindigkeit ohne Rücksicht auf die Richtung nach Stundenintervallen für den ganzen restirenden Zeitraum September 1889 bis December 1893 inclusive reduciren und Mittelwerthe der stündlichen Windgeschwindigkeit für die Periode September 1887 bis December 1893 ableiten (October 1888 und Juni 1890 fehlen). Diese Mittelwerthe gedachte ich zunächst einer eingehenderen Discussion zu unterziehen, da die jährliche Periode im täglichen Gange der Windstärke einige Anhaltspunkte für die Aufdeckung der wahren Ursache der letzteren zu liefern

versprach. Die eigentliche Ursache der Umkehrung im täglichen Gange der Windstärke auf hohen Berggipfeln ist ja noch immer nicht vollständig aufgedeckt, denn wenn auch die Espy-Köppen'sche Erklärung derselben für die Höhe des Eiffelthurmes (300 *m*), woselbst die Umkehrung sich bereits eingestellt hat, als vollkommen zureichend erscheint, wofür auch im Folgenden Nachweise gegeben werden, so kann dies doch nicht für die folgenden 4000 *m* mächtigen Luftschichten behauptet werden, in welchen durchwegs, nach den Aufzeichnungen auf Berggipfeln, die Umkehrung des täglichen Ganges gleichfalls eintritt.

Es ist also, wie sich derart herausstellt, die Haupterscheinung im täglichen Gange der Windstärke, dass das Minimum der letzteren um Mittag und das Maximum in der Nacht eintritt, denn so verhält es sich vom Eiffelthurm (300 *m*) aufwärts bis zum Gipfel von Pikes Peak (4308 *m*). Der früher als allgemeine Regel geltende tägliche Gang der Windstärke in der Nähe der Erdoberfläche mit einem Maximum bald nach Mittag und einem Minimum in den frühen Morgenstunden, tritt nach unseren jetzigen Erfahrungen als eine ganz untergeordnete, auf die untersten bloss etwa 200 *m* mächtigen Luftschichten beschränkte Erscheinung dagegen zurück.

So viel ich weiss, war es Herr Dr. G. Hellmann, welcher zuerst die Aufmerksamkeit der Meteorologen auf die unerwartete Thatsache hinlenkte, dass auf Berggipfeln der tägliche Gang der Windstärke der entgegengesetzte sei von jenem an der Erdoberfläche. Es geschah dies in einer Discussion der stündlichen Aufzeichnungen auf dem Mount Washington im Mai 1872 (*Ein Beitrag zur Physik der höheren Luftschichten.* Zeitschrift für Met., B. X, 1875, S. 311). Die späteren Registrirungen der Windgeschwindigkeit auf dem Säntis- und Obirgipfel, die frühesten ihrer Art (beginnend mit August, respective September 1883; jene auf Pikes Peak reichen allerdings weiter zurück, die Ergebnisse derselben sind aber erst spät bekannt geworden) haben diese ersten Andeutungen der Umkehrung des täglichen Ganges der Windstärke in der Höhe vollkommen bestätigt.¹

¹ Zeitschrift für Met., B. XVIII, 1883, S. 416.

Der Constatirung dieser Thatsache ist aber keineswegs alsbald auch eine zureichende Erklärung derselben gefolgt, denn die ersten darüber ausgesprochenen Ansichten sind wohl bald wieder fallen gelassen worden. Man muss vielmehr gestehen, dass bis zum heutigen Tage die wahre Ursache der Abnahme der Windstärke um Mittag und deren Zunahme in der Nacht auf den Berggipfeln noch keineswegs ganz aufgeklärt ist.

Darum schien mir eine eingehende Discussion des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel, gegründet auf sechsjährige Registrirungen, nicht ohne wissenschaftliches Interesse zu sein.

Herr Dr. Pernter konnte den täglichen Gang der Windstärke auf dem Sonnblick nur im allgemeinen Mittel darstellen, da er bloss über zweijährige Beobachtungen verfügte. Aus den jetzt mehr als sechs Jahrgänge umfassenden Aufzeichnungen lässt sich aber der tägliche Gang auch schon für die einzelnen Monate ableiten, was zu einigen auffälligen Resultaten führte, die mir dann Veranlassung gegeben haben, die jahreszeitlichen Veränderungen im täglichen Gange der Windstärke auch in den Registrirungen auf anderen Berggipfeln aufzusuchen, um zu erfahren, ob die für den Sonnblick gefundenen Resultate eine allgemeinere Geltung beanspruchen dürfen oder nicht. So erweiterte sich mir während der Arbeit die Discussion des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel zu einer Discussion dieser Erscheinung auf den Berggipfeln überhaupt. Die Ergebnisse haben aber nicht ganz meinen Erwartungen entsprochen und entscheidende Resultate haben sich dabei nicht herausgestellt. Eine einheitliche Bearbeitung der jetzt von den Berggipfeln verschiedener Höhe vorliegenden mehrjährigen Registrirungen der Windstärke, wie sie im Nachfolgenden geboten wird, dürfte trotzdem ein grösseres und bleibendes Interesse haben, wie dies der wissenschaftlichen Beschreibung einer Naturerscheinung überhaupt nicht abgesprochen werden kann.

Herr Billwiler in Zürich hat mich bei dieser Arbeit in höchst dankenswerther Weise unterstützt, indem er mir handschriftlich die stündlichen Windgeschwindigkeiten nach den

anemometrischen Aufzeichnungen auf dem Säntisgipfel für die einzelnen Monate der achtjährigen Periode 1886—1893 mitgetheilt hat. Herrn Angot in Paris verdanke ich die freundliche Übermittlung eines Separatabdruckes aus dem noch nicht ausgegebenen Jahrgange 1892 der »Annales du Bureau Central Mét. de France«, die Beobachtungsergebnisse 1892 auf dem Eiffelthurme enthaltend.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Die folgende Tabelle enthält die Abweichungen der Stundenmittel der Windgeschwindigkeit (Meter pro Secunde) vom Monatsmittel nach einer ersten Ausgleichung der auch in sechsjährigen rohen Mitteln noch recht störend hervortretenden Unregelmässigkeiten. Die Ausgleichung erfolgte nach dem gewöhnlichen Schema $\frac{1}{4}(a+2b+c)$. Die unmittelbaren Werthe der absoluten Windgeschwindigkeit, sowie der Abweichungen der Stundenmittel von den Monatsmitteln theile ich im Anhange mit. Dort findet man auch einige weitere Erläuterungen und kritische Bemerkungen zu diesen Tabellen.

Die bemerkenswertheste Thatsache, die uns in der Tabelle A entgegentritt, ist der frühe Eintritt des Minimums der Windgeschwindigkeit. Im Jahresmittel selbst tritt das Minimum der Windgeschwindigkeit schon um 9^h Vormittag ein. Nach den vorherrschenden Ansichten über die Ursache der täglichen Variation der Windstärke auf den Berggipfeln sollte der Eintritt des Minimums am Nachmittage stattfinden.

Das Maximum der Windgeschwindigkeit stellt sich in den Abend- und Nachtstunden ein, wie wir dies schon von den Berggipfeln wissen.

Selbst die ausgeglichenen Zahlenwerthe der Tabelle A zeigen noch so grosse Divergenzen des täglichen Ganges von Monat zu Monat und Unregelmässigkeiten innerhalb desselben Monates, dass man deutlich sieht, dass eine sechsjährige Periode noch zu kurz ist zu einer genaueren Darstellung des jährlichen Ganges der täglichen Variation der Windstärke. Besonders abweichend verhalten sich die Monate October und Jänner.

Um die jährliche Periode im täglichen Gange der Windstärke übersichtlicher darzustellen, so wie sie wahrscheinlich

A. Sonblickgipfel. Windgeschwindigkeit.

Abweichungen der Stundenmittel vom Monatsmittel. Meter pro Secunde. Ausgegliche Werthe.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitth. — 1 ^h a.	— .01	.43	— .02	.00	.28	.42	.10	.19	.06	.45	— .10	.23	.09
1—2	.15	.71*	.16	.05	.04	.28	.09	.24	.16	.42	.05	.28	.13
2—3	.15	.36	.09	.29	.21	.04	.23	.19	.16	.47*	.07	.01	.06
3—4	.22	.41	.06	.39	.56	.04	.26	.39	.04	.40	.15	.03	.03
4—5	.33	.10	.13	.46	.75	.22	.25	.24	.23	.31	.14	.18	.14
5—6	.43*	.09	.28	.58	.83*	.39	.42	.22	.28	.16	.10	.30	.22
6—7	.34	.28	.46	.60*	.79	.72	.51	.15	.27*	.17	.02	.28	.32
7—8	.29	.51	.65	.51	.66	.88	.64	.28	.27	.00	.15	.34*	.38
8—9	.01	.57	.74*	.43	.54	1.03	.66*	.35	.20	.09	.13	.23	.41
9—10	— .24	.75*	.72	.25	.31	1.03*	.62	.47*	.22	.04	.29*	.25	.43*
10—11	.12	.71	.60	.11	.21	.94	.50	.26	.15	.05	.24	.10	.33
11—Mittag	.03	.61	.29	.07	.03	.77	.34	.34	.29	.10	.08	.01	.21
12—1 ^h p.	.14	.54	.16	.19	.01	.58	.11	.30	.15	.20	.02	.04	.13
1—2	.24	.18	.23	.28	.27	.16	.07	.08	.17	.31	.17	.17	.09
2—3	.07	.13	.11	.35	.15	.00	.27	.19	.11	.27	.27*	.16	.10
3—4	.01	.13	.28	.16	.20	.25	.20	.15	.06	.31	.14	.04	.12
4—5	.17	.15	.40	.21	.23	.42	.54	.16	.01	.46*	.24	.11	.23
5—6	.12	.15	.35	.08	.13	.53	.55	.14	.01	.31	.05	.13	.14
6—7	.02	.32	.67	.30	.51	.66	.78*	.07	.32	.62	.14	.06	.36
7—8	.24	.06	.48*	.31	.51	.74	.62	.19	.30	.27	.06	.04	.26
8—9	.32	.32	.56	.54*	.76	.84	.60	.28	.54*	.25	.03	.13	.37*
9—10	.45	.27	.37	.50	.80*	.89*	.48	.36	.52	.08	.17	.13	.30
10—11	.44	.32	.28	.40	.55	.91	.41	.40*	.39	.23	.17	.27	.26
11—Mittn.	.24	.62	.23	.35	.54	.73	.26	.33	.37	.31	.07	.30*	.26
Mittel	.20	.36	.35	.31	.41	.56	.40	.25	.22	.26	.13	.16	.22

aus langjährigen Mitteln sich ergeben dürfte, habe ich auf die noch nicht ausgeglichenen Stundenmittel der Windgeschwindigkeit die Bessel'sche Formel angewendet, mich aber mit der Berechnung von zwei Gliedern begnügt. Es handelt sich ja nur um eine Herausschälung der einfachsten und wichtigsten Charakterzüge des täglichen Ganges der Windstärke, und diesen Zweck erreicht man am sichersten durch Berechnung der ersten Glieder einer periodischen Reihe.

Die zur Ableitung des jährlichen Ganges der Constanten der Bessel'schen Formel verwendeten Reihen, sowie die Zwischenrechnungen enthält die Tabelle III des Anhangs. Da die Berechnung der Constanten auf Grund der unmittelbar aus der Reduction der Anemogramme erhaltenen Zahlen vorgenommen worden war, mussten die numerischen Coëfficienten hinterher auf absolutes Mass (Centimeter pro Secunde) reducirt werden, wozu ich den Factor 34·7 verwendete.

Die Constanten des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel (Centimeter pro Secunde. $x = 0$ für Mitternacht).

	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner.....	21	19	92°6	1°5
Februar.....	33	27	114·8	325·3
März.....	45	13	142·8	348·4
April.....	63	26	158·0	105·0
Mai.....	74	26	157·2	114·3
Juni.....	75	5	147·6	351·8
Juli.....	67	13	138·7	325·6
August.....	50	6	140·5	145·6
September.....	31	15	165·6	177·8
October.....	25	12	209·5	263·5
November.....	18	16	230·1	340·3
December.....	3	21	142·5	25·4
Jahr.....	38	6	149·9	15·9

Mittelst dieser Constanten wurde der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit in den einzelnen Monaten berechnet und die Tabelle B erhalten.

B. Berechneter täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonblickgipfel.
Centimeter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	21	9	25	49	52	39	37	35	8	— 24	— 19	11	21
1 ^h a.	30	16	21	30	25	24	29	21	— 7	— 29	— 14	18	15
2	34*	24	16	4	—	7	19	5	— 21	— 29*	— 7	22*	6
3	33	29*	7	— 24	— 40	— 11	6	— 10	— 31	— 26	— 2	19	4
4	26	28	— 5	— 52	— 66	— 30	— 9	— 24	— 35	— 20	— 1*	11	— 15
5	14	21	— 19	— 72	— 84	— 47	— 26	— 35	— 35*	— 14	— 2	0	— 25
6	— 1	7	— 34	— 84	— 92*	— 63	— 43	— 42	— 30	— 10	— 6	12	— 34
7	— 16	— 12	— 46	— 84*	— 88	— 73	— 59	— 46	— 24	— 7	— 10	— 20	— 41
8	— 28	— 31	— 55	— 75	— 75	— 79*	— 72	— 46*	— 17	— 5	— 14*	— 24*	— 43*
9	— 35	— 48	— 58	— 58	— 58	— 78	— 78*	— 44	— 11	— 5	— 14	— 22	— 42
10	— 35*	— 58	— 54	— 37	— 38	— 71	— 77	— 40	— 8	— 5	— 10	— 15	— 37
11	— 29	— 59*	— 45	— 15	— 19	— 58	— 68	— 35	— 7	— 4	— 2	— 4	— 29
Mittag	— 20	— 50	— 30	2	— 5	— 41	— 51	— 28	7	0	8	7	— 18
1 ^h p.	— 10	— 34	— 13	15	5	— 20	— 31	— 20	— 7	7	19	16	— 6
2	— 0	— 14	4	22	12	1	— 8	— 11	— 5	14	28	21*	5
3	5	6	19	24	18	22	15	— 1	0	23	34*	20	15
4	7*	22	30	26	25	39	34	11	8	30	33	13	22
5	5	32	37	28	33	54	49	23	19	34	27	3	28
6	0	34	39*	32	45	64	58	35	29	34*	17	7	31
7	— 4	30*	38	40	58	69	61*	45	38	29	5	15	32
8	— 6*	22	35	49	70	71*	61	52	43*	20	8	18*	33*
9	— 4	13	32	58	79	68	57	55*	42	8	— 17	— 16	31
10	— 2	7	29	62*	79*	61	51	53	35	— 5	— 22	— 9	29
11	11	6*	27	60	71	52	45	47	23	— 16	— 23*	1	26
Mittel	16	25	30	42	48	48	43	32	20	17	14	13	24

Die berechneten Werthe des täglichen Ganges lassen die jährliche Periode desselben schon etwas klarer zu Tage treten. Im Jahresmittel tritt das Minimum der Windstärke schon um 8^h Morgens ein, das Maximum um 8^h Abends. In den Wintermonaten liegt das Minimum näher dem Mittag, im Frühjahr tritt es zeitlich am Morgen ein, im Sommer wieder näher dem Mittag und im Herbst tritt es sogar noch in der Nacht (während der ersten Morgenstunden) ein. Im October und November nähert sich der tägliche Gang jenem in der Niederung, nur mit dem Unterschiede, dass das Maximum der Windstärke erst gegen Abend statt früh am Nachmittage eintritt. Freilich ist dann überhaupt der tägliche Gang sehr schwach entwickelt, was auch für den Winter gilt, wo doppelte Maxima und Minima auftreten.

Am grössten ist die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke von März bis August inclusive, das Maximum der täglichen Variation tritt im Mai und Juni ein.

Bei den Unregelmässigkeiten, welche selbst der berechnete tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel noch in den Monatsmitteln zeigt, erscheint es zweckmässig, Mittel für die Jahreszeiten zu bilden und einer ähnlichen Berechnung zu unterwerfen. Ich habe deshalb die unmittelbar aus den Beobachtungen folgenden stündlichen Mittel der Windgeschwindigkeiten für die vier Jahreszeiten gebildet und nach der Bessel'schen Formel berechnet.

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit für die Jahreszeiten sind ($x = 0$ für Mitternacht, Centimeter pro Secunde):

$$\text{Winter} \dots\dots\dots 20 \cdot 1 \sin (106^\circ 4 + x) + 18 \cdot 9 \sin (2^\circ 8 + 2x)$$

$$\text{Frühling} \dots\dots\dots 56 \cdot 5 \sin (159 \cdot 0 + x) + 14 \cdot 4 \sin (98 \cdot 1 + 2x)$$

$$\text{Sommer} \dots\dots\dots 61 \cdot 6 \sin (135 \cdot 8 + x) + 7 \cdot 0 \sin (331 \cdot 0 + 2x)$$

$$\text{Herbst} \dots\dots\dots 21 \cdot 7 \sin (182 \cdot 4 + x) + 13 \cdot 9 \sin (268 \cdot 3 + 2x)$$

Mittelst dieser Formeln erhält man folgende stündliche Windgeschwindigkeiten:

Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht.....	20	35	39	—15
1 ^h a.....	27	17	30	—19
2	31*	— 3	19	—19*
3	29	—25	5	—16
4	21	—44	—10	—13
5	8	—59	—26	— 9
6	— 7	—67	—41	— 8
7	—21	—68*	—54	— 8
8	—31	—61	—63	—11
9	—37*	—50	—68*	—14
10	—35	—35	—66	—17
11	—29	—20	—59	—16
Mittag.....	—18	— 6	—46	—13
1 ^h p.....	— 7	5	—30	— 6
2	3	14	—11	4
3	9	21	7	16
4	11*	27	24	26
5	9	32	38	33
6	5	38	48	35*
7	0	45	54	33
8	— 2	50	56*	26
9	— 1	54*	55	15
10	4	53	52	3
11	11	47	47	— 7

Im Winter erinnert der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel an jenen, wie ich ihn für Sturmtage in Wien gefunden habe, im Herbst ist er jenem in der Niederung ähnlich. In diesen beiden Jahreszeiten ist aber der tägliche Gang überhaupt unregelmässig und schwach entwickelt (mittlere Ordinate 16 *cm*).

Im Frühling und Sommer ist die tägliche Variation mehr als doppelt so gross (mittlere Ordinate 36 und 39 *cm*) und das Minimum fällt dann auf 8^h Vormittag im Mittel, das Maximum auf 9^h Abend.

Wir stehen also jedenfalls der bemerkenswerthen Thatsache gegenüber, dass das Minimum der täglichen Windstärke auf dem Sonnblickgipfel nicht am Nachmittage und auch nicht um Mittag, sondern früh am Vormittage um 8^h oder 9^h eintritt. Würde die Ursache der Abschwächung der Windgeschwindigkeit bei Tage auf den Berggipfeln in Übereinstimmung mit der Espy-Köppen'schen Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche in der Mischung der unteren und oberen Luftschichten infolge der täglichen Erwärmung und den dadurch hervorgerufenen aufsteigenden und niedersinkenden Bewegungen der Lufttheilchen zu suchen sein, so müsste das Minimum der Windstärke im täglichen Gange sich nach oben hin verspäten und könnte auf dem Sonnblickgipfel in 3100 *m* Seehöhe jedenfalls erst ziemlich spät am Nachmittage eintreten. Ich stimme der Espy-Köppen'schen Erklärung der täglichen Periode der Windstärke an der Erdoberfläche vollkommen bei, weil alle Thatsachen für dieselbe sprechen. Ihre unmittelbare Anwendung aber auf die Erklärung des umgekehrten täglichen Ganges der Windstärke auf den hohen Berggipfeln schien mir stets unzulässig, da die Wirkung der Mischung der unteren trägen Luftmassen mit den höheren rascher bewegten sich wohl nicht zu so grossen Höhen erstrecken kann. Seitdem wir aber nun wissen, dass selbst schon in 300 *m* Höhe das Minimum der Windstärke bei Tage eintritt, und dass die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit, wie wir sie an der Erdoberfläche überall mit grösster Gleichmässigkeit beobachten, sich nicht einmal bis zu 200 *m* über die Erdoberfläche erstreckt, kann wohl nicht mehr die Rede davon sein, dass die Abnahme der Windstärke bei Tage auf den hohen Berggipfeln ein directer Ausfluss der Espy-Köppen'schen Theorie sei.

Die kaum 200 *m* mächtigen trägeren Luftmassen in der Nähe der Erdoberfläche können doch unmöglich die mindestens 2000—3000 *m* mächtigen Schichten über sich derart beeinflussen, wobei noch zu bedenken ist, dass die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke auf den hohen Berggipfeln mindestens eben so gross oder selbst noch grösser ist als jene der täglichen Variation an der Erdoberfläche. Ginge die Ab-

schwächung der Windstärke bei Tage von unten aus, so müsste sie nach oben hin immer kleiner werden und würde wohl in relativ geringen Höhen kaum noch merklich sein, wobei der Eintritt des Minimums nach oben sich verspäten müsste. Die Thatsachen stehen mit diesen kaum abzuweisen- den Consequenzen der erwähnten Ansicht vollkommen in Widerspruch.

Man hat für die Abschwächung der Windstärke bei Tage auf den Berggipfeln auch eine andere Ursache angeführt, die manches für sich zu haben scheint und die auch mir stets recht wahrscheinlich erschienen ist. Es ist dies die Wirkung der an den Bergseiten aufsteigenden Luftbewegung bei Tage als eine Folge der Erwärmung der Thäler und Bergabhänge.

Die an den Berghängen tagsüber aufsteigenden Thalwinde könnten wohl auf den Berggipfeln eine Abschwächung der von einem horizontal gestellten Robinson'schen Schalenkreuz gemessenen Luftbewegungen hervorbringen. Wenn aber die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit in erster Linie durch diese aufsteigenden Luftströmungen hervorgerufen würde, dann müsste wohl das Minimum der Windgeschwindigkeit im täglichen Gange auf den Nachmittag fallen, gerade so, wie die anderen aus diesem Vorgange stammenden meteorologischen Phänomene, so z. B. die Bewölkung, die Regen- und Gewitterbildung an den Gebirgen. Das frühe Eintreten des Minimums der Windstärke schon vor dem Mittag auf dem Sonnblickgipfel steht damit nicht in Übereinstimmung. Da wir keine stündlichen Schätzungen der Bewölkung haben, so will ich an Stelle derselben die Registrirungen des Sonnenscheins anführen, wobei natürlich zu beachten ist, dass der Gang der Bewölkung der umgekehrte von jenem der Häufigkeit des Sonnenscheins ist.

Zeit												
6/7	7/8	8/9	9/10	10/11	11/Mg.	0/1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	
Dauer des Sonnenscheins (Frühling und Sommer)												
8·2	12·6	13·8	13·8	13·1	11·6	10·5	9·8	9·1	8·4	7·6	5·6	
Abweichungen der Windgeschwindigkeit (Centimeter pro Secunde)												
- 56	- 70	- 66	- 57	- 50	- 33	- 7	0	22	23	10	31	

Wenn die aufsteigende Luftbewegung die Hauptursache der Abschwächung der Windstärke bei Tage auf dem Sonnblickgipfel wäre, dann müsste diese aufsteigende Luftbewegung schon ziemlich früh am Morgen zwischen 7^h und 9^h ihr Maximum erreichen. Das ist nun an sich schon sehr unwahrscheinlich, wird aber auch direct widerlegt durch den täglichen Gang der Bewölkung. Gerade die Stunden, welche dem von dem Gange der Windstärke geforderten Maximum der aufsteigenden Luftbewegung folgen, d. i. 8^h bis 10^h Vormittag, haben die grösste Frequenz des Sonnenscheins, also die geringste Bewölkung aufzuweisen. Die aufsteigende Luftbewegung kann also nicht so früh am Vormittage ihr Maximum erreichen, wie dies ja auch dem Gange der täglichen Erwärmung widerspricht. Die Bewölkung nimmt Nachmittags sehr rasch zu, die Differenz in der Dauer des Sonnenscheins in den gleich weit von Mittag (eigentlich 11^{1/2}^h a. m.) abstehenden Stunden ist

$$10\frac{1}{2}^h \text{ a.} - 0\frac{1}{2}^h \text{ p.} = 2\cdot6 \text{ Stunden,}$$

$$9\frac{1}{2}^h \text{ a.} - 1\frac{1}{2}^h \text{ p.} = 4\cdot0 \quad >$$

$$8\frac{1}{2}^h \text{ a.} - 2\frac{1}{2}^h \text{ p.} = 4\cdot7 \quad >$$

$$7\frac{1}{2}^h \text{ a.} - 3\frac{1}{2}^h \text{ p.} = 4\cdot2 \quad >$$

Die Bewölkung erreicht demnach erst um 2^h bis 3^h Nachmittag ihr Maximum, wie dies auch dem Gange der Erwärmung der Berghänge und der Stärke der Thalwinde vollkommen entspricht.

Wenn also die aufsteigenden Bergwinde die Hauptursache des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln wären, dann müsste das Minimum der Windstärke erst am Nachmittage nach 3^h etwa eintreten, nicht aber schon am Vormittage.

Der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel unterstützt demnach keineswegs die Annahme, dass es der aufsteigende Thalwind sei, welcher die Abschwächung der Windstärke daselbst hervorbringt.

Es muss wohl hervorgehoben werden, dass diese Annahme auch die Voraussetzung enthalten würde, dass der auf den Berggipfeln registrirte tägliche Gang der Windstärke nur eine locale Erscheinung sei, die in der freien Atmosphäre nicht zur

Beobachtung gelangen könnte, weil die aufsteigenden Winde ja nur den Gebirgen eigenthümlich sind.

Alle Erfahrungen und desgleichen alle rationellen Vorstellungen über den täglichen verticalen Luftaustausch in der Atmosphäre infolge des täglichen Ganges der Erwärmung widersprechen der Annahme, dass in der freien Atmosphäre bis zu Höhen von mehreren tausend Metern hinauf eine Mischung der unteren und oberen Luftschichten stattfinden könne.

Nachdem wir derart gefunden haben, dass die Registrirungen der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel keiner der bisherigen Ansichten über die Ursache des täglichen Ganges der Windstärke auf den hohen Berggipfeln entsprechen, müssen wir nun aber auch der Tragweite dieser Beobachtungen uns versichern. Wir müssen zunächst untersuchen, ob nicht vielleicht der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel durch Zufälligkeiten und ganz locale Verhältnisse derart modificirt wird, dass er weder für noch gegen die bisher aufgestellten Ansichten über die Ursache der täglichen Variation der Windgeschwindigkeit auf Berggipfeln geltend gemacht werden kann. Diese Untersuchung ist aber auf keinem anderen Wege zu führen, als dadurch, dass wir den täglichen Gang der Windstärke auf anderen hohen Berggipfeln wenigstens für die vier Jahreszeiten ableiten und nachsehen, in wie weit derselbe mit den für den Sonnblick gefundenen Resultaten übereinstimmt. Eine übersichtliche Darstellung des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln ist meines Wissens bisher überhaupt noch nicht versucht worden und darum dürften die nachfolgenden Zusammenstellungen, bei denen auf möglichst vollständige Vergleichbarkeit das grösste Gewicht gelegt worden ist, für alle ferneren Untersuchungen über die tägliche Variation der Windgeschwindigkeit auf Berggipfeln von einigem Nutzen sein.

Natürlich suchte ich zunächst den täglichen Gang der Windstärke auf dem Säntisgipfel mit jenem auf dem Sonnblick zu vergleichen, da letzterer nach Höhe und Lage, sowie infolge der günstigen Aufstellung des Anemometers das beste Vergleichsmaterial zu liefern versprach.

Herr Director R. Billwiler in Zürich hat mir mit grösster Zuvorkommenheit die monatlichen Stundenmittel der Wind-

stärke auf dem Säntis für die ganze Periode 1886—1893 handschriftlich zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm grossen Dank schulde. Die mittleren stündlichen Windgeschwindigkeiten aus acht Jahrgängen abgeleitet, findet man, in Meter pro Secunde ausgedrückt, in der Tabelle IV des Anhangs zu dieser Abhandlung.

Es wurden auf Grund derselben die Abweichungen der Stundenmittel von den entsprechenden Monatsmitteln gebildet und diese hierauf, um einen regelmässigeren, die Haupterscheinungen klarer zum Ausdrucke bringenden Gang zu erhalten, nach dem Schema $\frac{1}{3}(a+2b+c)$ ausgeglichen. Ich theile nun die derart ausgeglichenen Werthe hier mit, welche man in der folgenden Tabelle C zusammengestellt findet.

Man sieht, dass auch auf dem Säntis das Minimum der Windgeschwindigkeit am Vormittage eintritt, nicht Nachmittags, wie zu erwarten wäre, wenn dasselbe ein Resultat des verticalen Luftaustausches infolge der Erwärmung der untersten Schichten sein würde.

Von einer Verspätung gegenüber dem Maximum der Windgeschwindigkeit an der Erdoberfläche, das in Zürich im Sommer um $2\frac{1}{2}^h$ Nachmittag eintritt, kann schon gar nicht die Rede sein. Nehmen wir für die Tagesstunden die mittleren Abweichungen der Monate Mai—August, so erhalten wir folgenden Gang der Windgeschwindigkeit:

Säntis (Mai—August) Centimeter pro Secunde

6/7	7/8	8/9	9/10	10/11	11/Mg.	0/1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6
—6	—26	—49	—70	—83*	—80	—67	—59	—50	—33	—14	+6

Das Minimum der Windstärke tritt also schon um $10\frac{1}{2}^h$ oder um 11^h Vormittag ein, und die Nachmittagsstunden haben schon wieder eine grössere Windgeschwindigkeit als die entsprechenden vom Mittag gleich weit abstehenden Vormittagsstunden.

Die Stärke des aufsteigenden Luftstromes, des aufsteigenden Thalwindes, hat auch auf dem Säntis sicherlich sein Maximum am Nachmittage, wie dies auch der tägliche Gang der Frequenz des Sonnenscheins, der jenem auf dem Sonnblickgipfel parallel verläuft, bezeugt. Nehmen wir diesmal die mittlere Häufigkeit

C. Sántis. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit
in Abweichungen von den Monatsmitteln (ausgeglichen). Achtjährige Mittel. Centimeter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.
12— 1 ^a a.	—	27	—	19	26	51*	76	69*	75	—	5	—
1— 2	—	29*	—	28	4	45	83*	67	76*	—	7	0
2— 3	—	24	—	32	—	45	78	59	69	—	6	15
3— 4	—	18	—	36	10	45	78	54	68	—	1	27
4— 5	—	14	—	40	—	48	81	41	54	—	7	36
5— 6	—	7	—	44*	10	32	63	28	48	—	10	44
6— 7	—	8	—	27	—	9	21	16	34	—	17	48*
7— 8	23	16	—	6	5	—	26	6	21	—	2	43
8— 9	25	—	5	—	—	—	61	—	4	—	5	30
9— 10	23	8	6	—	24	48	85	39	34	—	12	23
10— 11	25*	—	9	—	43	66	107	65	52	—	12	18
11— Mittag	20	15	13	—	46*	77*	129	81*	60	—	2	—
0— 1	—	20	20	13	—	70	134*	80	66	—	0	19
1— 2	—	7	—	6	—	50	118	67	71	—	7	25
2— 3	—	3	—	7	—	36	97	63	78*	—	23	10
3— 4	16	9	20	35	—	38	71	61	79	—	25	9
4— 5	16	21	30	29	25	32	32	51	67	—	8	45
5— 6	6	25*	34*	16	13	15	5	34	56	—	5	66*
6— 7	0	23	27	12	—	0	31	9	46	—	44	53
7— 8	4	18	17	30	28	20	55	8	21	50*	11	39
8— 9	—	4	10	27	50	33	70	13	10	45	7	23
9— 10	—	3	16	24	66	37	75	26	38	32	9	4
10— 11	—	8	7	35	71*	40	79	52	60	24	16*	7
11— 12	—	17	—	49*	58	40	76	61	65	16	14	4
Mittel	—	—	—	5	41	46	69	61	66	2	10	4
	—	14	12	19	29	38	72	46	52	20	10	25

einer Wolkenhaube auf dem Säntisgipfel, die ja auch zumeist durch die aufsteigende Luftbewegung hervorgerufen wird, als Index für denselben, so finden wir folgende Zahlen:

Mittlere Häufigkeit der Nebeltage auf dem Säntis.

Stunde.....	7 ^h a.	10 ^h a.	1 ^h p.	4 ^h p.	9 ^h p.
Tage	10·8	10·8	11·8	13·5	11·9

Nach diesen Mitteln (für Mai—September) tritt die grösste Nebelfrequenz um 4^h Nachmittag ein, wie dies dem Gange der aufsteigenden Luftbewegung entspricht. Um 10^h Vormittag, wo das Minimum der Windstärke eintritt, ist die Nebelfrequenz dem Minimum nahe.

Es scheint also auch nach den Registrirungen der Windstärke auf dem Säntisgipfel die tägliche Variation der Windgeschwindigkeit mit dem täglichen Gange der aufsteigenden Luftbewegung an den Berghängen in keinem engeren Connex zu stehen.

Da der tägliche Gang der Windstärke in den einzelnen Monatsmitteln selbst aus achtjährigen Registrirungen abgeleitet, noch vielfach unregelmässig verläuft, so habe ich (aus den noch nicht ausgeglichenen Zahlen) Jahreszeitenmittel gerechnet und auf diese die Bessel'sche Formel angewendet. Die auf diesem Wege mittelst zweier periodischen Gliedern erhaltenen Zahlenwerthe finden sich in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt.

Im Winter ist die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke klein (mittlere Ordinate 12 *cm*) und der tägliche Gang kommt jenem in der Niederung an der Erdoberfläche fast gleich. Im Frühling fällt das Minimum auf den Mittag, das Maximum auf 9^h Abends (mittlere Ordinate 20 *cm*), im Sommer, wo der tägliche Gang mehr als viermal stärker auftritt, als im Winter (mittlere Ordinate 52 *cm*), tritt das Minimum schon um 11^h ein und das Maximum um 1—2^h Nachts. Im Herbst verspätet sich das Minimum bis 1^h p. und der Gang verläuft dann jenem in der Niederung fast entgegengesetzt, aber er ist nur schwach entwickelt, wie im Winter (mittlere Ordinate 14 *cm*).

Die absoluten Werthe der Windgeschwindigkeit im Mittel der Jahreszeiten findet man im Anhang (Tabelle X).

Berechneter täglicher Gang der Windstärke auf dem
Säntisgipfel (Centimeter pro Secunde).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht.....	—10	21	66	14
1 ^h a.....	—14	10	69*	7
2	—17	1	69	2
3	—18*	— 6	63	0
4	—17	—11	51	— 1
5	—15	—13	33	— 1
6	—14	—14	9	0
7	—11	—14	—19	— 2
8	—10	—15	—46	— 5
9	— 7	—18	—70	—10
10	— 5	—22	—87	—16
11	— 2	—26	—95*	—23
Mittag.....	2	—29*	—93	—28
1 ^h p.....	6	—29	—83	—29*
2	11	—25	—64	—26
3	16	—17	—43	—19
4	19	— 6	—20	— 9
5	22*	8	1	3
6	22*	21	19	14
7	19	33	32	23
8	15	39	42	29
9	9	42*	49	29*
10	3	39	56	27
11	— 4	31	61	21

Bei diesen Resultaten angelangt, schien es mir nun von Interesse, den täglichen Gang der Windstärke in den einzelnen Jahreszeiten in allen Höhenstufen zu verfolgen, so weit dies die publicirten Stundenmittel der Windstärke auf Berggipfeln gestatten, wobei natürlich nur mehrjährige Mittelwerthe Verwendung finden konnten. Um den Vergleich durch alle Höhenstufen hindurch führen zu können, berechnete ich auch den täglichen Gang der Windstärke zu Paris und auf dem Eiffel-

thurme aus der Periode Juli 1889 bis inclusive December 1892 (Sommer somit bei beiden Stationen 11 Monate, Herbst 12, Winter 10, Frühling 9). Den Jahrgang 1892 verdanke ich Herrn Alfred Angot.

Zwischen Paris und Eiffelthurm schaltet sich noch die Gipfelstation Blue Hill ein, welche um 100 *m* niedriger ist, als jene auf dem Eiffelthurm, und nur 142 *m* über die umliegende Gegend sich erhebt. Wir haben also

Paris, Bureau Central. Anemometer 54 *m* über dem Meeresniveau, 21 *m* über dem Boden (Juli 1889 bis December 1892 inclusive);

Blue Hill. Anemometer Draper 203 *m* über dem Meere und circa 142 *m* über dem umgebenden Lande (9·5 *m* über dem Berggipfel). Fünfjährige Mittel 1886 bis 1890 inclusive;¹

Eiffelthurm. Anemometer 338·5 *m* über dem Meere, 305 *m* über dem Boden.

Die Registrirungen zu Paris und auf dem Eiffelthurm sind derart reducirt worden, dass die zu der betreffenden Stunde gehörige momentane Windgeschwindigkeit den Anemogrammen entnommen wurde, und nicht ein mittlerer Werth für ein ganzes Stundenintervall, wie dies bei allen anderen Stationen der Fall ist. Nur auf dem Ben Nevis, wo die Windstärke stündlich geschätzt wird, gilt gleichfalls die Windstärke für die Stunde selbst und nicht für ein Stundenintervall.

Ben Nevis. Mittel der vier Jahre 1884—1887 inclusive. Windstärke geschätzt nach Beaufort's Scala. Durch sehr häufige Vergleichen der Schätzungen mit den Registrirungen konnte aber eine Reductionsscale aufgestellt werden, die für die mittleren Stärken ziemlich genau gelten dürfte. Ich habe, um eine leichtere Vergleichung der Amplituden zu ermöglichen, nach dieser Scale die geschätzten Stärken auf Meter pro Secunden reducirt. Eine strenge Vergleichbarkeit der Amplituden ist der Natur der Sache nach auch auf diesem Wege nicht zu erreichen. (Transactions Royal Soc. of Edinburgh, vol. XXXIV, Meteorology of Ben Nevis by Alex. Buchan.)

¹ Annals of the Astron. Observ. of Harvard College, vol. XXX. P. II, Cambridge 1891.

Obir. Mittel aus den fünf Jahren 1886—1890. Seither wurde das Anemometer günstiger und höher aufgestellt¹ und die mittlere Windgeschwindigkeit kommt nun grösser heraus. Das Mittel der fünf Jahre 1886—1890 ist $14\cdot59\text{ km}$ pro Stunde, das Mittel des Jahres 1893 ist aber $19\cdot92$. Um auch die absoluten Windgeschwindigkeiten des Obir und die Amplituden der täglichen Variation mit den übrigen Stationen besser vergleichbar zu machen, habe ich die Mittel 1886—1890 auf die neue Aufstellung reducirt und dabei auf den Charakter des Jahres 1893 gegenüber dem Mittel 1886—1890 in Bezug auf Windstärke Rücksicht genommen, soweit die vorliegenden Messungen dies gestatteten.

Die Phasenzeiten des täglichen Ganges stimmen in der fünfjährigen Reihe mit jenen der einjährigen sehr nahe überein, aber die Amplituden der täglichen Variation ergeben sich nun viel grösser, wie folgender Vergleich zeigt.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Obirgipfel im Jahresmittel (Centimeter pro Secunde).

$$\begin{aligned} 1886-1890 & \dots\dots\dots 57 \sin (83\cdot6+x) + 20 \sin (205\cdot8+2x) \\ 1893 & \dots\dots\dots 91 \sin (88\cdot4+x) + 18 \sin (279\cdot0+2x). \end{aligned}$$

Das Minimum der Windgeschwindigkeit fällt in der neuen Reihe näher auf den Mittag, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Obir. Mittlere Windgeschwindigkeit.
(Centimeter pro Secunde. Abweichungen vom Jahresmittel.)

	7/8	8/9	9/10	10/11	11/Mg.	0/1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7
1893	8	—35	—58	—95	—105*	—99	—95	—83	—71	—60	—37	0
1886/90..	—1	—13	—28	—42	—54	—68	—73*	—65	—58	—43	—13	16

Wie viel von diesem Unterschied auf Rechnung des einen Jahres 1893 kommt, muss dahingestellt bleiben. Sicher ist nur, dass die tägliche Amplitude in der neuen freieren Aufstellung viel grösser ausfällt.

¹ Siehe diese Sitzungsber., B. CII, Abth. II. a. Juliheft 1893.

Säntis und Sonnblick wurden schon oben behandelt, auch Pikes Peak bedarf keines Commentars. Die Mittel sind jene der Jahre 1874—1887.¹

Ich lasse nun den berechneten täglichen Gang der Windstärke für die vier Jahreszeiten folgen, damit man die Änderung im Eintritt des Minimums vom Winter zum Sommer oder anderseits etwa die Unabhängigkeit der Eintrittszeiten des Minimums von der Jahreszeit leichter zu überblicken vermag.

Berechneter täglicher Gang der Windstärke.

(Centimeter pro Secunde.)

a) Paris, Bureau Central, 21 m.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht.....	—18	—56	—58	—27
1 ^h a.....	—20	—63	—64	—32
2	—23	—69	—69	—38
3	—27	—71*	—71*	—45
4	—30	—70	—69	—50*
5	—31*	—62	—61	—50
6	—29	—49	—48	—43
7	—23	—32	—30	—30
8	—13	— 9	— 7	—11
9	0	16	19	11
10	15	40	44	34
11	28	61	65	54
Mittag.....	38	77	81	66
1 ^h p.....	44	86	88*	70*
2	45*	86*	87	66
3	40	79	79	54
4	31	67	64	38
5	20	48	46	20
6	9	28	25	4
7	— 1	9	6	— 8
8	— 9	— 8	—12	—16
9	—13	—24	—27	—21
10	—16	—37	—39	—22
11	—17	—47	—49	—24

¹ Man vergl. Meteorolog. Zeitschrift, Bd. XXVI, 1891, S. 219.

Das Minimum der Windgeschwindigkeit tritt im Frühling und Sommer um 2 Stunden früher ein (schon um 3^h Morgens) als im Winter; das Maximum fällt im Winter und Frühling auf die Zeit zwischen 1^h und 2^h, im Sommer etwas näher auf 1^h und im Herbst auf 1^h. Es sind dies die bekannten Eigenthümlichkeiten des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche.

b) Eiffelthurm, 305 m.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht.....	46	130*	138	98
1 ^h a.....	36	127	143*	88
2	34*	116	132	78
3	40	96	106	71
4	52	69	67	64
5	65	36	21	55
6	72*	— 1	— 28	40
7	68	— 39	— 71	17
8	48	— 75	— 104	— 14
9	15	— 106	— 124	— 52
10	— 28	— 128	— 130*	— 92
11	— 73	— 139	— 123	— 127
Mittag.....	— 112	— 141*	— 108	— 151
1 ^h p.....	— 137	— 131	— 89	— 161*
2	— 142*	— 112	— 68	— 151
3	— 127	— 85	— 50	— 125
4	— 94	— 55	— 34	— 84
5	— 51	— 21	— 19	— 36
6	— 6	12	— 2	13
7	33	43	17	56
8	60	71	41	87
9	72*	95	68	106
10	60	113	96	112*
11	59	125	121	108

Auf dem Eiffelthurme tritt das Maximum der Windstärke im Winter schon um 9^h ein, im Frühling um Mitternacht, im

Sommer um 1^h Morgens und im Herbst um 10^h p. Das Minimum der Windstärke fällt im Winter auf 2^h p.; zur selben Zeit erreicht an der Erdoberfläche die Windstärke ihr Maximum. Gegen den Sommer hin weicht aber die Eintrittszeit der kleinsten Windgeschwindigkeit immer mehr gegen den Vormittag zurück und fällt im Sommer auf 10^h Vormittag, d. i. fast 4 Stunden früher als die Eintrittszeit des Maximums der Windstärke unten. Im Herbst fallen die entgegengesetzten Extreme oben und unten wieder auf die gleiche Stunde, d. i. auf 1^h p. Der frühe Eintritt des Minimums der Windstärke auf dem Eiffelthurm im Sommer ist eine sehr bemerkenswerthe Thatsache.

Nach der Köppen-Espy'schen Theorie der Ursache des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche möchte man zunächst annehmen, dass das Minimum oben mit dem Maximum unten zugleich eintreten müsste.¹

¹ Es dürfte auch von Interesse sein, die Unterschiede im täglichen Gange der Windgeschwindigkeiten zu Paris und auf dem Eiffelthurme kennen zu lernen. Die folgende Tabelle enthält die berechneten Werthe dieser Geschwindigkeitsdifferenzen; aber nicht die absoluten Differenzen, die ja stets positiv sein würden, wenn man Eiffelthurm—Paris nimmt, sondern die Differenzen der Abweichungen vom Tagesmittel, in denen also der mittlere Unterschied der Windstärke oben und unten schon eliminirt ist und nur die Unterschiede im täglichen Gange zu Tage treten.

Die Gleichungen, welche den Unterschied im täglichen Gange der Windstärke auf dem Eiffelthurme und zu Paris darstellen, sind:

Unterschied im täglichen Gange der Windstärke Eiffelthurm—Paris.
($x = 0$ für Mitternacht, Centimeter pro Secunde).

Winter.	131 sin (61°7'+ x)+66 sin (220°9'+2 x)
Frühling	205 sin (80°9'+ x)+16 sin (275°4'+2 x)
Sommer	194 sin (82°9'+ x)+24 sin (8°4'+2 x)
Herbst	175 sin (77°8'+ x)+56 sin (235°9'+2 x)
Jahr	172 sin (77°3'+ x)+29 sin (241°1'+2 x)

Es ist nicht uninteressant, aus der nachstehenden Tabelle zu ersehen, dass die Extreme der Differenzen im täglichen Gange sehr nahe auf Mitternacht und Mittag, und zwar etwas nach diesen Stunden eintreten.

Es ist gerade dieser Erscheinung gegenüber von grossem Interesse, den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit auf einer etwas niedrigeren Gipfelstation mit jenem auf dem Eiffelthurm zu vergleichen. Diesen Vergleich ermöglichen die Registrirungen an der Station des Herrn L. Rotch auf dem Blue Hill bei Boston.

Im Sommer, wo das Minimum der absoluten Windstärke auf dem Eiffelthurm schon um 10^h Vormittag eintritt, tritt das Maximum des Gangunterschiedes oben und unten erst um 11^{1/2}^h a., also nahe dem Mittage ein.

Unterschiede im täglichen Gange der Windgeschwindigkeit.

Eiffelthurm—Paris (Centimeter pro Secunde).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht . . .	64	186	196	125	143
1 ^h a.	56	190	207	120	148
2	57	185	201	116	140
3	67	167	177	116	132
4	82	139	136	114	118
5	96	98	82	105	95
6	101	48	20	83	63
7	91	— 7	— 41	47	22
8	61	— 66	— 97	— 3	— 26
9	15	—122	—143	— 63	— 78
10	— 43	—168	—174	—126	—128
11	—101	—200	—188*	—181	—167
Mittag	—150	—218*	—189*	—217	—193
1 ^h p.	—181	—217*	—177	—231*	—201*
2	—187*	—198	—155	—217	—189
3	—167	—164	—129	—179	—160
4	—125	—122	— 98	—122	—117
5	— 71	— 69	— 65	— 56	— 65
6	— 15	— 16	— 27	9	— 12
7	34	34	11	64	36
8	69	79	53	103	76
9	85	119	95	127	106
10	96	150	135	184	126
11	76	172	170	132	237
Mittel	87	131	124	116	111

Blue Hill, circa 142 *m* relativ (203 *m* absolut).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	— 1	—22	41 *	— 3
1 ^h a.	— 1 *	—19	40	— 2 *
2	— 3	—17	32	— 5
3	— 7	—20	17	— 9
4	—11	—27	— 2	—16
5	—14 *	—36	—23	—20 *
6	—14 *	—44	—41	—21
7	—11	—48 *	—52	—17
8	— 5	—46	—56 *	— 8
9	3	—36	—52	5
10	12	—18	—41	18
11	19	6	—25	31
Mittag.	23 *	31	— 9	38
1 ^h p.	23 *	53	4	40 *
2	20	68	13	35
3	13	73 *	16 *	24
4	5	68	15	11
5	— 2	55	11	— 2
6	— 8	35	9	—14
7	—11	14	8 *	—21
8	—12 *	— 4	11	—22 *
9	— 9	—17	19	—20
10	— 6	—24	28	—14
11	— 3	—25 *	37	— 8

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Blue Hill in einer mittleren Höhe zwischen der Erdoberfläche und dem Eiffelthurm (Paris 21 *m*, Blue Hill circa 142 *m*, Eiffelthurm 305 *m*) hat in der That ganz den Charakter des Überganges von den Verhältnissen unten zu jenen oben, wo die Umkehrung des täglichen Ganges schon complet ist.

Im Winter ist der tägliche Gang jenem an der Erdoberfläche ganz gleich. Vom Winter zum Sommer verspätet sich das Minimum von 5¹/₂ ^h a. bis 8^h a. auf dem Eiffelthurm bis 10^h a.

Es findet also eine Art Fortschreiten des Minimums der Windgeschwindigkeit von unten nach oben statt. Das Anemometer¹ auf dem Thurm des Post Office in Boston, 58 *m* über dem Boden, zeigt den Eintritt des Minimums im Sommer um 5^h a. an, drei Stunden später tritt das Minimum in 140 *m* über dem Boden oder 84 *m* höher ein, und fünf Stunden später in 300 *m* (wenn man Eiffelthurm damit vergleichen darf). Wir hätten somit beiläufig:

Eintritt des Morgenminimums in verschiedenen
Höhen über dem Boden im Sommer

Höhe.....	21 <i>m</i>	58 <i>m</i>	140 <i>m</i>	300 <i>m</i>
Minimum	3 ^h a.	5 ^h a.	8 ^h a.	10 ^h a.

Dies scheint trefflich mit der Ansicht von Espy-Köppen übereinzustimmen. Der Einfluss der Erwärmung des Erdbodens und der dadurch bedingten aufsteigenden Luftbewegung und Luftmischung schreitet von unten nach oben fort und, natürlich im gleichen Sinne, die Hemmung der Windgeschwindigkeit in den etwas höheren Schichten über dem Erdboden, die eine Consequenz davon ist.

Auch der tägliche Gang des Dampfdruckes auf dem Eiffelthurm im Vergleich mit jenem an der Erdoberfläche scheint damit in guter Übereinstimmung zu stehen. Der Dampfdruck erreicht oben in 300 *m* wie unten um 9^h das Hauptmaximum, nimmt aber von 10^h an oben viel rascher ab als unten, was für das nun lebhafter eintretende Herabsinken der Luftschichten oberhalb 300 *m* gedeutet werden kann. Bis 9^h bringt die von unten aufsteigende Luft einen Zuwachs von Wasserdampf, sobald die Reaction aber in höhere Schichten hinaufgreift und die Luftschichte in 300 *m* nun auch mit herabsinkender trockenerer Luft von oben gemischt wird, nimmt dann der Dampfdruck auf dem Eiffelthurm rasch ab.²

¹ Im Mittel derselben Jahre 1886—1890 wie für Blue Hill.

² Angot hat in den Comptes rendus der Pariser Akademie, t. CXVII (1893, II) p. 1076, die Stundenmittel des Dampfdruckes in den Sommern 1890 bis 1892 für die Station beim Bureau Central und oben auf dem Eiffelthurm mitgetheilt.

Würde die Reaction der unteren Schichten auf die oberen nur bis 300 *m* hinaufreichen, dann müsste das Maximum der Windgeschwindigkeit unten an der Erdoberfläche auch schon um 10^h a. eintreten, während es in der That erst nach 1^h p. eintritt. Wir müssen also im Sinne dieser Theorie annehmen, dass die Mischung noch höher hinaufreicht, wogegen auch keinerlei Thatsachen oder aus anderen Erscheinungen abgeleitete Deductionen sprechen, während der eben erwähnte tägliche Gang des Dampfdruckes sehr deutlich dafür spricht. Wohl aber sprechen die Erscheinungen und Überlegungen dagegen, diesen Einfluss der Mengung der unteren und oberen Luftschichten in Folge der steigenden Erwärmung des Bodens bei Tage bis zu sehr grossen Höhen, sagen wir viel über 1000 *m* hinaufreichen zu lassen. Das Phänomen des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln darf darum nicht schlechthin mit jenem auf dem Eiffelthurm gleichgestellt werden.

Sonderbar erscheint der Eintritt des Minimums der Windstärke im Winter. Man möchte im Verfolg der oben angeregten Gedanken wohl glauben annehmen zu dürfen, dass im Winter bei geringer Erwärmung des Bodens die Reaction der unteren Schichten auf die oberen nur bis zu geringen Höhen hinaufreicht, und auf die Luftschichte in der Höhe des Eiffelthurms nur mehr wenig Einfluss nehmen könnte.

Die Beobachtungen stimmen aber mit diesen naheliegenden Consequenzen gar nicht.

Eintritt des Minimums der Windstärke im Winter.

Höhe.....	21 <i>m</i>	58 <i>m</i>	140 <i>m</i>	300 <i>m</i>
Zeit.....	5 ^h a.	5 ¹ / ₂ a.	5 ¹ / ₂ a.	2 ^h p.

Wenn man nun auch annimmt, dass uns hier die eigentlichen streng vergleichbaren Zwischenglieder fehlen, und dass wegen der spät erst beginnenden Erwärmung des Bodens im Winter die Reaction der unteren Luftschichten auf die höheren erst um 2^h das Niveau von 300 *m* erreicht, und darüber wohl nicht mehr hinausgeht, was sehr plausibel scheint, so ist es doch auffällig und mit diesen Deductionen scheinbar in Widerspruch stehend, dass die Abschwächung der Windgeschwindig-

keit in 300 *m* Seehöhe im Winter nach den Beobachtungen auf dem Eiffelthurm grösser ist als im Sommer, und dass einer Abnahme der Windstärke auf dem Eiffelthurm von 142 *cm* nur eine Zunahme unten von 45 *cm*, d. i. weniger als $\frac{1}{3}$ gegenübersteht, und doch sollte angenähert Gewinn und Verlust gleich sein, wenn sich im Winter der Luftaustausch zwischen dem Erdboden und 300 *m* abspielt. Den absoluten Werthen der Amplituden der täglichen Variation ist allerdings eine strenge Vergleichbarkeit nicht zuzuschreiben. Die grössere Abschwächung der Windstärke im Winter könnte vielleicht gerade dadurch erklärt werden, dass dann von oben keine Luft herabsinkt und wieder einen Zuwachs von Geschwindigkeit bringt.

Kehren wir nun zur Betrachtung des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Blue Hill zurück. Das Maximum der Windstärke tritt daselbst im Herbst, Winter und Frühling am Nachmittage ein, wie an der Erdoberfläche und zwar beziehungsweise um 1^h p., 0^{1/2} ^h p. und 3^h p., also mit zunehmender Tageslänge verspätet. Im Sommer dagegen tritt das entschieden hervortretende Maximum um Mitternacht ein, also wie auf dem Eiffelthurm; es macht sich aber daneben noch ein secundäres Maximum um 3^h p. bemerkbar, so dass selbst im Sommer der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit in 140 *m* über dem Boden noch eine Zwischenstellung einnimmt, zwischen jenem an der Erdoberfläche und jenem in 300 *m* über derselben. Eine Zunahme der Windstärke in der Nacht ist übrigens auch im Herbst, im Winter und im Frühling angedeutet.

Die Beobachtungen auf dem Blue Hill zeigen uns die interessante Thatsache, dass im Sommer das Maximum der Windstärke bei Nacht mindestens bis zum Niveau von rund 150 *m* herabreicht. Wir dürften aber hier der unteren Grenze schon ziemlich nahe sein, denn es tritt daneben noch ein secundäres Maximum um 3^h Nachmittag ein, welches durch die von oben herabsinkenden stärker bewegten Luftmassen bedingt wird. Auch in 60 *m* (Boston) über dem Boden tritt das Maximum, hier aber das einzige entwickelte Maximum, zwischen 3^h und 4^h p. ein (die Abweichung vom Tagesmittel ist +89 *cm* pro Secunde). Im Winter ist, wie schon bemerkt, der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Blue Hill in 142 *m* relativer und

203 *m* absoluter Höhe ganz gleich jenem an der Erdoberfläche. Auf einem schlanken Thurme von gleicher Höhe dürfte dies nicht der Fall sein. Die, wenn auch geringe Oberfläche des Berges genügt wohl im Winter, um den täglichen Gang der Windstärke ähnlich zu beeinflussen, wie die Erdoberfläche in den Niederungen selbst. Vielleicht bringen uns Anemometer auf Thürmen, wie z. B. jenes auf dem Strassburger Münster, eine nähere Aufklärung darüber.

Die vorstehende kleine Untersuchung scheint mir demnach zu dem Resultat zu führen, dass die Mengung der unteren und oberen Luftschichten in Folge der Erwärmung des Erdbodens bei Tage und der dadurch entstehenden aufsteigenden und niedersinkenden Luftbewegungen, wie sie Espy und Köppen zur Erklärung der täglichen Periode der Windstärke an der Erdoberfläche annehmen, in der That stattfindet und im Sommer in unserem Klima bis zu 800—1000 *m* etwa hinaufreicht, im Winter kaum über 300 *m*.

Nach den Ergebnissen nächtlicher wissenschaftlicher Ballonfahrten des Münchner Vereins für Luftschiffahrt können an ruhigen, warmen Sommertagen die unteren Luftschichten bis zu mindestens 900 *m* hinauf die adiabatische Temperaturvertheilung annehmen, d. h. die aufsteigende und niedersinkende Luftbewegung in Folge der Erhitzung des Bodens erstreckt sich bis zu dieser Höhe. Dies stimmt sehr gut mit den obigen Darlegungen.

Da die Windgeschwindigkeit von der Erdoberfläche nach oben hin anfangs sehr rasch und dann immer langsamer zunimmt, und der Werth dieser Zunahme nach den Örtlichkeiten natürlich recht verschieden sein wird, so ist a priori wohl kaum möglich zu bestimmten Annahmen darüber zu gelangen, zu welchen Zeitpunkten das Minimum der Windgeschwindigkeit in Folge dieses Luftaustausches in den verschiedenen Höhen eintreten dürfte.

Die vorhin mitgetheilten Registrirungen der Windgeschwindigkeit in 21 *m*, 58 *m*, 142 *m* und 300 *m* zeigen wenigstens im Allgemeinen das zeitliche Vorrücken des Eintrittes des Minimums nach oben, und damit das Fortschreiten des Eingriffes der unteren Schichten in dieser Richtung.

Zum Schlusse will ich die Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke für die verschiedenen Höhen hier zusammenstellen ($x = 0$ für Mitternacht, Centimeter pro Secunde)

Höhe	Winter
21 m	$34 \sin (236 \cdot 5 + x) + 12 \sin (57 \cdot 0 + 2x)$
58 m	$41 \sin (247 \cdot 3 + x) + 19 \sin (89 \cdot 4 + 2x)$
142 m	$12 \sin (257 \cdot 1 + x) + 11 \sin (75 \cdot 2 + 2x)$
300 m	$116 \sin (86 \cdot 0 + x) + 15 \sin (233 \cdot 4 + 2x)$

	Sommer
21 m	$78 \sin (242 \cdot 2 + x) + 12 \sin (70 \cdot 1 + 2x)$
58 m	$68 \sin (239 \cdot 0 + x) + 25 \sin (53 \cdot 1 + 2x)$
142 m	$35 \sin (134 \cdot 0 + x) + 23 \sin (44 \cdot 2 + 2x)$
300 m	$124 \sin (95 \cdot 9 + x) + 32 \sin (28 \cdot 3 + 2x)$

Auch in diesen Gleichungen tritt das Fortschreiten der Phasenzeiten, deren Verspätung von unten nach oben sehr schön zu Tage.

Höhe	Jahr
21 m	$60 \sin (240 \cdot 5 + x) + 14 \sin (69 \cdot 3 + 2x)$
58 m	$69 \sin (243 \cdot 9 + x) + 23 \sin (54 \cdot 7 + 2x)$
142 m	$19 \sin (205 \cdot 5 + x) + 18 \sin (41 \cdot 9 + 2x)$
300 m	$116 \sin (86 \cdot 0 + x) + 16 \sin (233 \cdot 4 + 2x)$

Wir sind nun bei den Gipfelstationen angelangt, welche so viel Eigenthümliches im täglichen Gange der Windstärke zeigen, dass die Erklärung derselben grosse Schwierigkeiten macht.

Das Maximum der Windstärke tritt auf dem Ben Nevis das ganze Jahr bei Nacht ein, vom Herbst bis zum Frühling um 1^h, im Sommer eigenthümlicher Weise erst um 3^h Morgens. Es spielt da sicherlich die tägliche Periode der stürmischen Winde mit hinein, die von jener der ruhigen Tage, in der Niederung wenigstens, wesentlich abweicht, wie ich vor einiger Zeit ausführlicher gezeigt habe.¹

¹ Hann, Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1892. Diese Sitzungsber., Bd. CII, Abth. II. a. Februar 1893.

Ben Nevis, 1440 *m.*

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	46	58	52	52
1 ^h a.	52*	64*	62	57*
2	50	62	69	56
3	43	55	70*	49
4	31	42	65	36
5	17	28	55	20
6	6	15	40	4
7	— 3	4	24	—11
8	— 8	— 4	6	—22
9	— 9	—10	—10	—30
10	— 9	—15	—25	—33
11	— 9	—21	—38	—34*
Mittag	—10	—26	—49	—33
1 ^h p.	—15	—35	—55	—32
2	—22	—44	—58	—31
3	—30	—53	—60*	—30
4	—38	—56*	—57	—30
5	—42*	—55	—52	—27
6	—41	—48	—44	—23
7	—34	—33	—32	—14
8	—21	—14	—17	— 3
9	— 3	8	0	11
10	16	30	18	27
11	33	48	36	41

Das Minimum der Windstärke tritt auf dem Ben Nevis, den Herbst ausgenommen, auffallend spät ein, im Winter erst um 5^h Nachmittag, im Frühling um 4^h, im Sommer um 3^h p.; im Herbst aber schon um 11^h Vormittags. Im Winter stehen die Epochen des Maximums und Minimums um 16 Stunden von einander ab, im Sommer nur um 12 Stunden. Von 8^h Morgens bis 8^h Abends inclusive ist die Windstärke auf dem Ben Nevis unter dem Mittel, die Maxima derselben sind dementsprechend stärker ausgeprägt als die Minima. Irgend welche theoretische Consequenzen vermag ich aus der täglichen Variation der Wind-

geschwindigkeit auf dem Ben Nevis nicht zu entwickeln. Vielleicht wäre in dieser Beziehung nur das Vorrücken der Epoche des Minimums vom Winter zum Sommer hervorzuheben.

Obir, 2140 *m*.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	0	45	107 *	41
1 ^h a.	—13	37	101	36
2	—22	30	91	31
3	—25 *	25	79	28
4	—21	21	64	27
5	—14	19	48	26
6	— 7	16	29	23
7	0	11	5	16
8	1	1	— 20	6
9	— 3	—12	— 48	— 8
10	—10	—28	— 76	—26
11	—18	—44	—101	—44
Mittag	—25	—58	—120	—59
1 ^h p.	—27 *	—67	—129 *	—69
2	—24	—68 *	—128 *	—70 *
3	—15	—61	—113	—63
4	0	—46	— 88	—47
5	16	—26	— 55	—28
6	27	— 2	— 15	— 6
7	42	19	22	15
8	45 *	37	56	32
9	42	48	81	43
10	31	52 *	98	47 *
11	16	51	106	46

Auf dem Obirgipfel tritt das Maximum der Windstärke schon frühzeitig ein, am Abend zwischen 8^h und 10^h, nur im Sommer verspätet sich dasselbe bis gegen Mitternacht. Das Minimum tritt das ganze Jahr hindurch zwischen 1^h und 2^h Nachmittag ein. Im Winter zeigt sich ein secundäres Minimum um 3^h Morgens und ein nur wenig hervortretendes zweites

Maximum um 8^h Vormittag. Die tägliche Periode ist dann überhaupt schwach entwickelt, dagegen sehr stark im Sommer (mittl. Ordinaten im Winter 18 *cm*, Frühling und Herbst 35 *cm*, Sommer 74 *cm*). In theoretischer Beziehung bietet auch der tägliche Gang der Windstärke auf dem Obirgipfel nichts Bemerkenswerthes. Er weicht recht wesentlich ab von jenem der beiden nächsten höheren Stationen, Säntis und Sonnblick, den ich schon früher besprochen habe, und der sich durch ein frühes Auftreten des täglichen Minimums der Windstärke auszeichnet.

Pikes Peak, 4308 *m*.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	39	112	75	88
1 ^h a.	51	133	105	103
2	60	148	129	115
3	65*	152*	143*	119*
4	63	143	140	111
5	54	119	120	92
6	37	83	82	59
7	14	33	33	17
8	—11	— 20	— 20	— 30
9	—35	— 72	— 70	— 76
10	—55	—115	—108	—113
11	—67	—146	—131	—138
Mittag.	—71*	—163*	—136*	—147*
1 ^h p.	—67	—159	—127	—139
2	—57	—144	—106	—119
3 ^h p.	—43	—120	— 80	— 90
4	—28	— 91	— 55	— 58
5	—16	— 61	— 35	— 27
6	— 5	— 32	— 21	— 1
7	2	— 7	— 12	19
8	8	17	— 4	35
9	13	40	7	47
10	20	63	24	60
11	29	87	47	73

In der neuen Reihe von Windregistrirungen auf dem Obirgipfel tritt aber, wenigstens im Mittel eines Jahres (1893), das Minimum der Windstärke zwei Stunden früher ein und der tägliche Gang nähert sich dadurch etwas jenem auf dem Säntis und Sonnblick.

Von allen hohen Gipfelstationen zeichnet sich die Station auf Pikes Peak durch den regelmässigsten und am stärksten ausgeprägten täglichen Gang der Windgeschwindigkeit aus. Das Maximum tritt das ganze Jahr hindurch um 3^h Morgens auf, das Minimum dessgleichen um Mittag. Die Amplituden sind sehr gross, im Frühling ist der Unterschied zwischen Maximum und Minimum über 3·1 *m*, im Sommer 2·8 *m*, im Herbst 2·7 *m* (die mittleren Ordinaten sind: Winter 38 *cm*, Frühling 94 *cm*, Sommer 75 *cm*, Herbst 78 *cm*). Die Windstärke bleibt von 8^h Morgens bis gegen 7^h Abends unter dem Mittel. Damit haben wir die Darstellung des täglichen Ganges der Windstärke auf den einzelnen Berggipfeln abgeschlossen.

Nachdem wir aber derart jede Station für sich in Bezug auf die tägliche Periode und deren Modification nach den Jahreszeiten einer Betrachtung unterzogen haben, empfiehlt es sich nun auch nachzusehen, in welcher Weise zu jeder Jahreszeit die Änderung der täglichen Variation der Windstärke mit der Höhe vor sich geht, da möglicher Weise dabei einige bemerkenswerthe Thatsachen sich ergeben könnten, die sich für die Theorie von einigem Werthe erweisen.

Ich habe desshalb in den folgenden fünf Tabellen den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für jede einzelne Jahreszeit separat zusammengestellt mit Hilfe von Gipfelstationen und einer Station an der Erdoberfläche, als welche Paris genommen worden ist. Für die vier Jahreszeiten sind die berechneten Werthe eingesetzt, nur für das Jahr wurden die unmittelbar aus den Registrirungen sich ergebenden Mittelwerthe genommen, die desshalb auch, wie man sogleich bemerken wird, noch einige Unregelmässigkeiten aufweisen, die man aber nicht mehr zu unterdrücken braucht. Wenn eine regelmässige Verschiebung der Epochen des Eintrittes der Maxima und namentlich der Minima mit zunehmender Seehöhe stattfinden würde, so müsste dies in den folgenden Tabellen zu Tage treten.

D. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Winter.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs. ...	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel. ...	21	140	305	(1400)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 18	— 1*	46	46	0	— 10	20	39
1	— 20	— 1	36	52*	— 13	— 14	27	51
2	— 23	— 3	34*	50	— 22	— 17	31*	60
3	— 27	— 7	40	43	— 25*	— 18*	29	65*
4	— 30	— 11	52	31	— 21	— 17	21	63
5	— 31*	— 14*	65	17	— 14	— 15	8	54
6	— 29	— 14	72*	6	— 7	— 14	— 7	37
7	— 23	— 11	68	— 3	0	— 11	— 21	14
8	— 13	— 5	48	— 8	1	— 10	— 31	— 11
9	0	3	15	— 9	— 3	— 7	— 37*	— 35
10	15	12	— 28	— 9	— 10	— 5	— 35	— 55
11	28	19	— 73	— 9	— 18	— 2	— 29	— 67
Mittag	38	23	— 112	— 10	— 25	2	— 18	— 71*
1	44	23*	— 137	— 15	— 27*	6	— 7	— 67
2	45*	20	— 142*	— 22	— 24	11	3	— 57
3	40	13	— 127	— 30	— 15	16	9	— 43
4	31	5	— 94	— 38	0	19	11*	— 28
5	20	— 2	— 51	— 42*	16	22*	9	— 16
6	9	— 8	— 6	— 41	27	22*	5	— 5
7	— 1	— 11	33	— 34	42	19	0	2
8	— 9	— 12*	60	— 21	45*	15	— 2	8
9	— 13	— 9	72*	— 3	42	9	— 1	13
10	— 16	— 6	70	16	31	3	4	20
11	— 17	— 3	59	33	16	— 4	11	29
Mittel	·22	·10	·64	·24	·18	·12	·16	·38

E. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Frühlunge.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs. ...	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel. ...	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 56	— 22	130*	58	45	21	35	112
1	— 63	— 19	127	64*	37	10	17	133
2	— 69	— 17	116	62	30	1	— 3	148
3	— 71*	— 20	96	55	25	— 6	— 25	152*
4	— 70	— 27	69	42	21	— 11	— 44	143
5	— 62	— 36	36	28	19	— 13	— 59	119
6	— 49	— 44	— 1	15	16	— 14	— 67	83
7	— 32	— 48*	— 39	4	11	— 14	— 68*	33
8	— 9	— 46	— 75	— 4	1	— 15	— 61	— 20
9	16	— 36	— 106	— 10	— 12	— 18	— 50	— 72
10	40	— 18	— 128	— 15	— 28	— 22	— 35	— 115
11	61	6	— 139	— 21	— 44	— 26	— 20	— 146
Mittag	77	31	— 141*	— 26	— 58	— 29*	— 6	— 163*
1	86	53	— 131	— 35	— 67	— 29*	5	— 159
2	86*	68	— 112	— 44	— 68*	— 25	14	— 144
3	79	73*	— 85	— 53	— 61	— 17	21	— 120
4	67	68	— 55	— 56*	— 46	— 6	27	— 91
5	48	55	— 21	— 55	— 26	8	32	— 61
6	28	35	12	— 48	— 2	21	38	— 32
7	9	14	43	— 33	19	33	45	— 7
8	— 8	— 4	71	— 14	37	39	50	17
9	— 24	— 17	95	8	48	42*	54*	40
10	— 37	— 24	113	30	52*	39	53	63
11	— 47	— 25	125	48	51	31	47	87
Mittel	50	34	86	34	34	20	36	94

F. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Sommer.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs. ...	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel. ...	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 58	41*	138	52	107*	66	39	75
1	— 64	40	143*	62	101	69*	30	105
2	— 69	32	132	69	91	69	19	129
3	— 71*	17	106	70*	79	63	5	143*
4	— 69	— 2	67	65	64	51	— 10	140
5	— 61	— 23	21	55	48	33	— 26	120
6	— 48	— 41	— 28	40	29	9	— 41	82
7	— 30	— 52	— 71	24	5	— 19	— 54	33
8	— 7	— 56*	— 104	6	— 20	— 46	— 63	— 20
9	19	— 52	— 124	— 10	— 48	— 70	— 68*	— 70
10	44	— 41	— 130*	— 25	— 76	— 87	— 66	— 108
11	65	— 25	— 123	— 38	— 101	— 95*	— 59	— 131
Mittag	81	— 9	— 108	— 49	— 120	— 93	— 46	— 136*
1	88*	4	— 89	— 55	— 129*	— 83	— 30	— 127
2	87	13	— 68	— 58	— 128	— 64	— 11	— 106
3	79	16	— 50	— 60*	— 113	— 43	7	— 80
4	64	15	— 34	— 57	— 88	— 20	24	— 55
5	46	11	— 19	— 52	— 55	1	38	— 35
6	25	9	— 2	— 44	— 15	19	48	— 21
7	6	8	17	— 32	22	32	54	— 12
8	— 12	11	41	— 17	56	42	56*	— 4
9	— 27	19	68	0	81	49	55	7
10	— 39	28	96	18	98	56	52	24
11	— 49	37	121	36	106	61	47	47
Mittel	50	25	79	41	74	52	39	75

G. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Herbst.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs. ...	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel. ...	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 27	— 3	98	52	41	14	— 15	88
1	— 32	— 2*	88	57*	36	7	— 19	103
2	— 38	— 5	78	56	31	2	— 19*	115
3	— 45	— 9	71	49	28	0	— 16	119*
4	— 50*	— 16	64	36	27	— 1	— 13	111
5	— 50	— 20	55	20	26	— 1	— 9	92
6	— 43	— 21*	40	4	23	0	— 8	59
7	— 30	— 17	17	— 11	16	— 2	— 8	17
8	— 11	— 8	— 14	— 22	6	— 5	— 11	— 30
9	11	5	— 52	— 30	— 8	— 10	— 14	— 76
10	34	18	— 92	— 33	— 26	— 16	— 17*	— 113
11	54	31	— 127	— 34*	— 44	— 23	— 16	— 138
Mittag	66	38	— 151	— 33	— 59	— 28	— 13	— 147*
1	70*	40*	— 161*	— 32	— 69	— 29*	— 6	— 139
2	66	35	— 151	— 31	— 70*	— 26	4	— 119
3	54	24	— 125	— 30	— 63	— 19	16	— 90
4	38	11	— 84	— 30	— 47	— 9	26	— 58
5	20	— 2	— 36	— 27	— 28	3	33	— 27
6	4	— 14	13	— 23	— 6	14	35*	— 1
7	— 8	— 21	56	— 14	15	23	33	19
8	— 16	— 22*	87	— 3	32	29	26	35
9	— 21	— 20	106	11	43	29*	15	47
10	— 22	— 14	112*	27	47*	27	3	60
11	— 24	— 8	108	41	46	21	— 7	73
Mittel	35	17	83	29	35	14	16	78

*H. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im
Jahresmittel (Centimeter pro Secunde).*

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffel- thurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonn- blick	Pikes Peak
Höhe abs. ...	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel. ...	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 39	11	100	47	42	29	20	99
1	— 45	— 7	84	47	38	23	— 2	98
2	— 50	— 4	76	59	30	9	6	109
3	— 51	— 9	75	70*	25	20	— 10	114*
4	— 52*	— 15	63	66	26	1	— 13	101
5	— 49	— 20	57	0	20	— 2	— 20	81
6	— 46	— 26	38	10	11	— 12	— 32	60
7	— 31	— 41*	6	7	— 1	— 3	— 46	7
8	— 11	— 27	— 49	— 6	— 13	— 24	— 47*	— 38
9	10	— 7	— 90	— 3	— 28	— 31	— 38	— 79
10	38	— 5	— 106	— 18	— 42	— 41*	— 42	— 118
11	55	4	— 115	— 24	— 54	— 39	— 28	— 142*
Mittag	65	33	— 112*	— 37	— 68	— 33	— 1	— 124
1	69	34	— 115	— 44*	— 73*	— 34	2	— 107
2	70*	41*	— 109	— 44	— 65	— 36	19	— 87
3	57	40	— 96	— 29	— 58	— 10	18	— 64
4	53	14	— 69	— 28	— 43	4	6	— 53
5	39	— 3	— 44	— 54*	— 13	12	28	— 37
6	19	— 13	— 8	— 48	16	26	23	— 6
7	— 2	3	30	— 45	44	26	45*	5
8	— 14	— 4	76	— 2	56	25	29	24
9	— 19	1	97	16	55*	37*	30	43
10	— 29	— 5	106	21	48	33	32	54
11	— 36	— 2	110*	34	49	24	21	69
Mittel	40	15	76	32	38	22	23	72

Indem wir diese Tabellen einer Discussion unterziehen, wollen wir uns dabei auf die höheren Gipfelstationen beschränken, da wir den Verlauf der täglichen Periode in den unteren Schichten bis zu 300 *m* hinauf schon eingehender behandelt haben.

Wir glaubten aber die Zahlenwerthe des täglichen Ganges für diese unteren Schichten in die synoptischen Tabellen doch aufnehmen zu müssen, da der Eiffelthurm das ganze Jahr hindurch, Blue Hill wenigstens im Sommer sich den hohen Schichten in Bezug auf den täglichen Gang anschliesst und man derart mit einem Blicke ersehen kann, dass dann von 140 *m* (relativ) bis zu 4300 *m* hinauf der tägliche Gang der Windstärke nahezu der gleiche ist, und nur die dem Boden nächsten Luftschichten den umgekehrten Gang zeigen. Man sieht da auch gleich, dass es nicht angeht, den täglichen Gang in den hohen oberen Schichten als das Ergebniss der Reaction der unteren Schichten auf dieselben zu betrachten, weil Ursache und Wirkung in einem schreienden Widerspruche stehen würden.

Im Allgemeinen bemerkt man zunächst in diesen Tabellen, dass je zwei oder drei Stationen mit einander übereinstimmen, während die übrigen von denselben abweichen. Es müssen also die localen Verhältnisse von grossem Einflusse sein. Nur im Sommer ist die Übereinstimmung aller fünf Gipfelstationen über 1400 *m* eine recht befriedigende.

Wir wollen desshalb auch darauf verzichten, die Tabellen im Einzelnen durchzugehen. Um nun aber doch zu einigen allgemeineren Sätzen in Bezug auf den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in den höheren Schichten der Atmosphäre zu gelangen, haben wir uns erlaubt, Mittelwerthe zu bilden für das Höhenintervall Ben Nevis bis Pikes Peak inclusive, d. i. für die Höhenschicht von 1400 *m* bis 4300 *m*. Da die absoluten Windgeschwindigkeiten und damit auch die Grösse der Abweichungen vom Mittel nicht strenge vergleichbar sind, können allerdings diese Mittelwerthe keine grössere Bedeutung beanspruchen. Sie mögen nur dazu dienen, Fingerzeige dafür zu geben, wie im Allgemeinen die tägliche Variation der Windstärke in diesen hohen Regionen vor sich geht.

Im Folgenden soll in diesem Sinne eine Übersicht über den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in den höheren Regionen der Atmosphäre gegeben werden.

Täglicher Gang im Winter (1400—4300 *m*).

Stunde . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm. . . .	19	21*	20	19	15	10	3	-4	-14	-18	-23	-25*
Nachm. . .	-25	-22	-18	-13	-7	-2	2	6	9	12	15	17

Mittlere Ordinate 14 *cm*, Amplitude 46 *cm*. Das Maximum tritt zwischen 1^h und 2^h Morgens ein, das Minimum zwischen 11^h und Mittag, fällt also noch auf den Vormittag.

Täglicher Gang im Frühlinge (1400—4300 *m*).

Stunde . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm. . . .	54*	52	48	40	30	19	7	-7	-20	-32	-43	-51
Nachm. . .	-56	-57*	-53	-46	-34	-20	-5	11	26	38	47	53

Mittlere Ordinate 35 *cm*, Amplitude 110 *cm*. Das Maximum tritt um Mitternacht ein, das Minimum kurz vor 1^h Nachmittag.

Täglicher Gang im Sommer (1400—4300 *m*).

Stunde . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm. . . .	68	73	75*	72	62	46	24	-2	-29	-53	-72	-85
Nachm. . .	-89*	-85	-73	-58	-39	-21	-3	13	27	38	50	59

Mittlere Ordinate 51 *cm*, Amplitude 164 *cm*. Das Maximum tritt um 2^h Morgens ein, das Minimum fällt genau auf den Mittag.

Im Sommer ist der tägliche Gang der Windstärke durch das ganze Höhenintervall von 300 *m* bis 4300 *m* sehr gleichförmig und ein Mittelwerth für diese ganze Höhenschicht hat desshalb reelle Bedeutung.

Stellen wir die Gleichungen des täglichen Ganges für diese Jahreszeit in den verschiedenen Höhen zusammen, so erhalten wir:

Constanten des täglichen Ganges im Sommer¹
(Centimeter pro Sekunden).

Höhe	$x = 0$ für $11\frac{1}{2}$ h p.				$x = 0$ für Mitternacht			
	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
300 m ..	120	—29	7	31	96	28	124	32
1440 ..	43	48	0	5	50	17	65	5
2140 ..	110	36	— 2	—18	79	202	115	18
2500 ..	80	6	—15	6	94	292	80	17
3100 ..	48	—39	— 5	5	136	331	62	7
4300 ..	99	64	—38	22	64	316	118	44
Mittel ...	83	14	— 9	8·5	87·8	328·4	84·5	12·4

Für den Sommer gilt demnach von 300 m bis 4300 m sehr angenähert die Gleichung

$$84\cdot5 \sin (87\cdot8+x) + 12\cdot4 \sin (328\cdot4+2x).$$

In einer mittleren relativen Höhe von 1750 m circa dürfte hiernach das Minimum der Windgeschwindigkeit im Sommer noch am Vormittage zwischen 11^h und Mittag eintreten, denn die Abweichungen vom Tagesmittel sind:

Täglicher Gang im Sommer (1750 m).

Stunde	9	10	11	Mittag	1	2	3 p.
Centimeter	—65	—82	—91*	—92*	—85	—73	—56

Im Herbste wird der tägliche Gang in den verschiedenen Höhenstufen wieder viel unregelmässiger und es ist namentlich der Sonnblick, der am meisten von den übrigen Stationen abweicht. Soweit die Mittelbildung für diese Jahreszeit gestattet sein mag, erhält man folgenden Gang:

¹ Die Werthe von A_1 und A_2 und a_1 und a_2 sind mit den noch nicht abgerundeten Werthen von p und q gerechnet.

Täglicher Gang im Herbste (1400—4300 *m*).

Stunde ..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm....	36	35	37*	36	32	26	16	2	-12	-28	-41	-51
Nachm. .	-56*	-55	-48	-39	-24	-9	4	15	24	29	33	35

Mittlere Ordinate 30 *cm*, Amplitude 93 *cm*. Das Maximum tritt um 2^h Morgens ein, das Minimum um Mittag. Der tägliche Gang im Herbste stimmt (im Mittel) mit jenem im Sommer überein.

Täglicher Gang im Jahresmittel (1400—4300 *m*).

Stunde ..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm....	47*	41	43	44*	36	16	7	-7	-26	-36	-52	-57*
Nachm. .	-53	-51	-43	-29	-23	-13	2	15	26	36	38	39

Mittlere Ordinate 32 *cm*, Amplitude 104 *cm*. Das Maximum tritt im Jahresmittel bald nach Mitternacht ein. Der nicht ausgeglichene Gang zeigt in der Nacht noch einige Unregelmässigkeiten. Aber auch nach der gewöhnlichen Ausgleichung fällt das Maximum zwischen Mitternacht und 1^h a. Das Minimum der Windgeschwindigkeit tritt im Jahresmittel und im Durchschnitt aus allen Stationen um 11^h Vormittag ein.

Da die Epoche des Eintrittes des Minimums der täglichen Windgeschwindigkeit für die Theorie das grösste Interesse hat, so wollen wir recapitulirend constatiren, dass, den Frühling ausgenommen, dasselbe im Mittel aller Stationen in allen übrigen Jahreszeiten schon vor dem Mittage eintritt und dass dies auch für das Mittel des ganzen Jahres gilt.

Wir wollen nun zum Schlusse hier noch die Constanten der Gleichungen zusammenstellen, welche zur Berechnung der Abweichungen der Stundenmittel von den Monatsmitteln in den Tabellen *D*, *E*, *F*, *G* gedient haben. Die Abweichungen im Mittel des Jahres (Tabelle *H*) sind ohne irgend eine Ausgleichung geblieben.

Die Constanten des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit (Centimeter pro Secunde).

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Paris, Bureau Central								
Winter	-28	-19	+10	+ 7	236.5	57.0	34	12
Frühling . . .	-67	-39	+11	+ 4	239.8	69.2	77	11
Sommer	-69	-37	+12	+ 4	242.0	70.1	78	12
Herbst	-46	-24	+20	+ 5	242.8	77.1	52	20
Jahr	-52.5	-29.7	+13.2	+ 5.0	240.5	69.3	60.3	14.1
Eiffelthurm								
Winter	+ 79	+39	-33	-43	63.7	217.4	88	55
Frühling . . .	+135	- 7	- 5	+ 5	92.8	316.1	135	8
Sommer	+123	-13	+15	+28	95.9	28.3	124	32
Herbst	+125	+13	-27	-27	83.9	224.7	126	38
Jahr	+115.5	+ 8.0	-12.5	- 9.2	86.0	233.4	115.8	15.5
Blue Hill ¹								
Winter	-11	- 4	+10	+ 6	257.1	75.2	12	11
Frühling . . .	-21	-43	- 3	+27	213.7	9.5	48	27
Sommer	+28	-21	+11	+20	134.0	44.2	35	23
Herbst	-20	- 6	+15	+12	260.4	66.7	21	19
Jahr	- 6.0	-18.5	+ 8.2	+16.2	205.5	41.9	19.4	18.2
Ben Nevis								
Winter	+28	+24	+18	+ 6	49.9	70.8	37	19
Frühling . . .	+42	+33	+16	+ 1	51.6	86.1	54	16
Sommer	+49	+42	+ 2	+ 5	49.6	17.4	65	5
Herbst	+43	+13	+ 9	+ 9	72.6	45.3	45	13
Jahr	+40.5	+28.0	+11.3	+ 5.2	55.3	65.2	49.2	12.4

¹ Die p und q für $x = 0$ für $11\frac{1}{2}^h$ p., die Winkelconstanten für $x = 0$ um Mitternacht.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Obir* ¹								
Winter	+ 14	— 17	— 7	— 22	147·4	212·2	22	23
Frühling	+ 50	+ 16	— 2	— 19	79·8	200·6	52	19
Sommer	+ 110	+ 36	— 2	— 18	79·1	202·3	115	18
Herbst	+ 48	+ 20	— 4	— 19	74·6	207·7	52	19
Jahr	+ 55·5	+ 13·7	— 3·7	— 19·5	83·6	205·8	57·2	19·9
Obir* 1893 (neue Aufstellung)								
Jahr	+ 90	+ 14	— 18	— 2	88·4	279·0	91	18
Säntis*								
Winter	— 3	— 18	— 4	— 2	198·2	257·8	19	4
Frühling	+ 27	— 14	— 1	— 12	124·9	197·8	30	12
Sommer	+ 80	+ 6	— 15	+ 6	93·6	291·9	80	17
Herbst	+ 21	— 4	— 4	— 11	109·4	215·2	22	12
Jahr	+ 31·2	— 7·5	— 6·0	— 4·7	111·0	246·9	32·1	7·6
Sonnblick*								
Winter	+ 20	— 3	— 4	+ 19	106·4	2·8	20	19
Frühling	+ 27	— 50	+ 14	+ 2	159·0	81·9	56	14
Sommer	+ 48	— 39	— 5	+ 5	135·8	331·0	62	7
Herbst	+ 2	— 22	— 13	— 4	182·4	268·3	22	14
Jahr	+ 24·2	— 28·5	— 2·0	+ 5·5	147·2	355·0	37·4	5·8

¹ Bei den mit * versehenen Stationen ist für die p und q die Zeit von $11\frac{1}{2}$ p. an gezählt (Stundenintervall 11^h bis Mitternacht), die Winkelconstanten sind aber auf die Zählung von Mitternacht an reducirt. Bei den übrigen Stationen gelten auch die p und q für $x = 0$ um Mitternacht.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
	Pikes Peak*							
Winter.....	+ 52	+28	-18	+ 7	69·3	305·2	59	19
Frühling....	+127	+74	-28	+ 9	67·2	303·1	147	29
Sommer.....	+ 99	+64	-38	+22	64·0	315·6	118	44
Herbst.....	+112	+45	-33	- 2	75·6	281·3	121	33
Jahr.....	+97·5	+52·7	-29·2	+ 9·0	69·1	302·1	110·9	31·3

Wenn wir uns jetzt fragen, inwieweit die im Vorstehenden eingehend discutirten Beobachtungsergebnisse über die tägliche Periode der Windstärke auf den Berggipfeln von 1400 *m* bis zu 4300 *m* Seehöhe einen bestimmten Hinweis enthalten auf die derselben zu Grunde liegenden Ursachen, so müssen wir bekennen, dass wir einen solchen nicht haben finden können. Die Aussagen der vorstehenden Tabellen verhalten sich im Gegentheile negativ gegenüber den bisher geäußerten Ansichten über die Ursache der Erscheinung.

Der frühe Eintritt des Minimums der täglichen Windstärke spricht nach meinem Dafürhalten entschieden gegen die Annahme, dass es die an den Bergseiten aufsteigenden Thalwinde sind, welche die Abnahme der Windgeschwindigkeit bei Tage auf den Berggipfeln bewirken.

Es ist ferner auch die Ansicht ausgesprochen worden, dass infolge der täglichen Wanderung des Maximums der Erwärmung von Osten nach Westen in der Höhe ein wenn auch geringer, in gleicher Richtung wandernder Gradient entsteht, der in der Höhe eine Tendenz zu Ostwinden am Vormittage und eine Tendenz zu Westwinden am Nachmittage zur Folge hat. Die Ostwinde müssten hiernach das Maximum ihrer Stärke am Vormittage haben, die Westwinde am Nachmittage. In ähnlicher Weise müssten die Südwinde bei Tag verstärkt, die Nordwinde geschwächt werden.

Es ist wohl an sich recht unwahrscheinlich, dass ein merklicher derartiger Gradient entstehen kann, weil die Tempe-

raturdifferenzen zwischen Ost und West durch zu grosse Entfernungen getrennt sind, als dass ein wirksamer Temperaturgradient entstehen könnte. Aber es immer gut, in solchen Fällen auch die Erfahrung zu Rathe zu ziehen.

Herr Dr. Pernter hat sich in dankenswerther Weise der grossen Mühe unterzogen, für jede der acht Windrichtungen und für die Stationen Sonnblick, Säntis und Obir den täglichen Gang der Geschwindigkeit abzuleiten.¹ Ich habe mit Hilfe der von ihm auf vier Richtungen reducirten respectiven Werthe die folgende Tabelle *K* berechnet, indem ich Mittelwerthe nahm und selbe nach der Bessel'schen Formel berechnete. Wenn ein derartiger Einfluss auf die tägliche Periode der verschiedenen Windrichtungen vorhanden ist, so muss er für alle Berggipfel gelten.

Es wäre sehr zu wünschen, dass die von Dr. Pernter zuerst vorgenommenen Rechnungen auch auf die Windregistri- rungen anderer Berggipfel ausgedehnt werden möchten und dass mehrjährige Aufzeichnungen denselben zu Grunde gelegt werden.

Der Nord- und der Ostwind haben das Hauptmaximum ihrer Stärke Abends zwischen 8^h und 9^h, ein secundäres Maximum um 5^h Morgens und das Minimum ihrer Stärke um 1^h Nachmittags. Der Südwind weht am kräftigsten um 9^h Abends, am schwächsten um 8^h Morgens; der Westwind erreicht seine grösste Stärke um Mitternacht und ist am schwächsten um 1^h Nachmittags. Ein entschiedener Gegensatz im täglichen Gange ihrer Stärke ist bei den entgegengesetzten Windrichtungen nicht vorhanden; eine Umkehrung des Ganges zwischen West und Ost, wie sie wohl bestehen müsste, wenn die erwähnte Ursache der täglichen Periode der Windstärke auf Berggipfeln zu Grunde liegen würde, ist nicht zu bemerken. West- und Ostwind erreichen das Minimum ihrer Stärke um 1^h Nachmittags und das Maximum derselben in der Nacht, und beim Nordwind ist dasselbe der Fall. Der Südwind weicht am meisten von dem allgemeinen Mittel und von dem Verhalten

¹ »Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick«. Denkschriften der Wiener Akademie, LXVIII. Bd., December 1890, S. 210.

K. Täglicher Gang der Windstärke für jede der vier Hauptwindrichtungen. Centimeter pro Secunde.

Zeit	N	E	S	W	N	E	S	W	Zeit
Beobachtet					Berechnet ¹				
Mittern.—1	21	1	23	45	21	5	23	48	Mittn.
1—2	23	6	9	38	18*	5*	15	41	1
2—3	21	12	—7	24	20	9	4	30	2
3—4	24	18	—18	11	21	16	—6	17	3
4—5	31	33	—19	—2	25	23	—16	4	4
5—6	32	36	—26	—11	26*	28*	—26	—7	5
6—7	25	26	—29	—15	23	27	—33	—15	6
7—8	3	10	—36	—25	13	21	—38	—21	7
8—9	—20	7	—41	—29	—3	7	—40*	—25	8
9—10	—41	—37	—43*	—35	—20	—10	—38	—27	9
10—11	—54	—49*	—38	—27	—40	—28	—34	—28	10
11—Mittag	—57	—49*	—22	—24	—56	—44	—27	—29	11
0—1	—72*	—26	—9	—26	—65	—53	—18	—31	Mittag
1—2	—52	—33	0	—28	—66*	—53*	—9	—32*	1
2—3	—43	—41	5	—37*	—55	—46	0	—31	2
3—4	—27	—48	15	—33	—40	—31	9	—29	3
4—5	—7	—26	20	—23	—19	—13	17	—23	4
5—6	9	13	22	—6	3	5	23	—13	5
6—7	28	44	26	13	21	20	29	—2	6
7—8	39	45*	34	24	35	28	33	12	7
8—9	43*	22	38*	32	38	30*	35	26	8
9—10	34	19	37	39	39*	25	35*	38	9
10—11	21	8	32	44	34	18	33	47	10
11—Mittern.	17	7	27	49*	27	11	29	50*	11
Mittel	31	24	27	26	30	23	24	26	Mittel

¹ Die Gleichungen für den täglichen Gang sind:

$$N \dots\dots 43 \sin (89 \cdot 2 + x) + 24 \sin (255 \cdot 6 + 2x)$$

$$E \dots\dots 29 \sin (82 \cdot 4 + x) + 25 \sin (252 \cdot 0 + 2x)$$

$$S \dots\dots 37 \sin (146 \cdot 4 + x) + 3 \sin (55 \cdot 9 + 2x)$$

$$W \dots\dots 40 \sin (100 \cdot 0 + x) + 10 \sin (124 \cdot 0 + 2x)$$

45*

der anderen Winde ab durch den frühen Eintritt des Minimums seiner Stärke, schon um 8^h Morgens.

Es müssten noch von mehr Berggipfeln ähnliche Berechnungen vorliegen, um der Ursache dieses frühen Minimums grössere Bedeutung beilegen zu können; Herr Dr. Pernter hat auch nur zweijährige Beobachtungen der Rechnung unterziehen können. Im Widerspruche mit der Annahme einer Verstärkung der Winde durch die infolge der täglichen Wanderung der wärmsten Erdstellen bewirkte Verlagerung der oberen Gradienten steht die Thatsache, dass der Westwind am Nachmittage mehr an Stärke einbüsst als der Ostwind; es müsste umgekehrt sich verhalten. Der Ostwind müsste das Minimum seiner Stärke am späten Nachmittage, der Westwind am frühen Vormittage haben. Das ist aber nicht der Fall, die Epoche des Minimums fällt für beide auf 1^h Nachmittags. Im grossen Ganzen zeigt jede der vier Hauptwindrichtungen denselben täglichen Gang ihrer Stärke, d. i. jenen, den wir als den allgemein in der Höhe herrschenden gefunden haben. Ich glaube demnach nicht, dass man in dieser Tabelle eine Bestätigung der Ansicht finden kann, dass die oberen Gradienten für Ostwinde am Morgen, für Westwinde am Nachmittage verstärkt werden infolge der täglichen Wanderung der Richtung, nach welcher hin die wärmste Erdstelle liegt. Die Unterschiede der Erwärmung zwischen hinlänglich benachbarten Erdstellen, die aus dieser Quelle stammen, sind offenbar viel zu gering, d. h. der Temperaturgradient ist zu klein, um merkliche obere Druckgradienten hervorzubringen.

Für ganz entschieden halte ich aber die Frage doch noch nicht; man müsste, wie schon bemerkt, den bezüglichen Rechnungen eine grössere Ausdehnung geben und wohl besser nur auf den Sommer beziehen. Bemerkenswerther Weise habe ich vor langer Zeit schon aus den Windregistrirungen auf dem Dodabetta Peak in Südindien, 2643 *m* Seehöhe, ein Resultat erhalten, welches für eine Verstärkung der Ostwinde am Vormittage und der Westwinde am Nachmittage sprechen könnte. Die von November bis Mai herrschenden ENE-Winde erreichen um 9^h und 10^h Vormittags das Maximum ihrer Stärke, das Minimum aber in der Nacht; die westlichen Monsunwinde von

Juni bis October erreichen das Maximum ihrer Stärke am Abende, das Minimum um 1^h und 2^h Nachmittags. Der Ostmonsun hat einen fast entgegengesetzten täglichen Gang der Stärke, wie der Westmonsun.¹

Wenn man also nicht annehmen will, und ich glaube es stehen doch manche Bedenken dieser Annahme entgegen, dass die oberen Theile des Berggipfels durch ihre Erwärmung auf das Anemometer auf dem Gipfel selbst in analoger Weise einwirken, wie die Erdoberfläche auf das Anemometer auf dem Eiffelthurm, so sehe ich zunächst keine andere plausible Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln.

Für diese Annahme würde sprechen die starke Erwärmung der Bergoberfläche im Sommerhalbjahre, welche durch die grosse tägliche Temperaturamplitude bezeugt wird, die, wie ich nachgewiesen habe, viel grösser ist als jene in der freien Atmosphäre in gleicher Höhe. Man könnte über der erwärmten Bergoberfläche bei Tage ein ebensolches Spiel aufsteigender und niedersinkender Luftmassen annehmen, wie über der Niederung, nur müsste die Hauptwirkung von jenen Theilen des Berges ausgehen, die bloss einige hundert Meter unter dem Anemometer liegen, weil sonst der Eintritt des Minimums der Windstärke am Vormittage oder bald nach Mittag auf diesem Wege nicht zu Stande kommen könnte.

Wie sich aber dieser Vorgang mit dem längs der Bergseiten von den Thälern herauf aufsteigenden Luftströmen vereinigen lassen möchte, ist mir unklar. Die zunehmende Bewölkung über dem Berggipfel und die Wolkenkappen auf demselben am Nachmittage sprechen wie so manches Andere zu deutlich für die über dem Berge aufsteigenden Luftmassen. Bevor diese aufsteigende Bewegung aus den Thälern herauf den Berggipfel erreicht hat, könnte allerdings der oben erwähnte locale Vorgang Zeit und Raum zur Entwicklung finden und das frühe Eintreten des Minimums der Windstärke am Vormittage auf manchen Berggipfeln erklären.

¹ Hann, »Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes«. Diese Sitzungsber., Bd. LXXIX, II., Jännerheft 1879.

Die bedeutenden Unterschiede im Eintritte des Minimums der Windstärke auf den verschiedenen Berggipfeln würden unter dieser Annahme vollkommen verständlich. Ich möchte dieselbe jedoch nur als Anregung zu weiterem Nachdenken und Nachforschen hinstellen.

Eine Entscheidung über diese Frage könnten nur Wolkenbeobachtungen bringen. Consequente stündliche Aufzeichnungen selbst nur der relativen Geschwindigkeit der Wolken bei Tage würden feststellen, ob auch in der freien Atmosphäre ein Minimum der Geschwindigkeit der Luftströmungen um Mittag eintritt. Dann müsste die Ansicht definitiv aufgegeben werden, dass der tägliche Gang der Windstärke auf den Berggipfeln in seiner Gesamtheit eine locale Erscheinung sei, die von den Erhebungen der Erdoberfläche selbst bedingt wird, und es würden die Registrirungen der Windstärke auf den Berggipfeln erhöhtes Interesse gewinnen und die Frage nach deren Ursache eine grössere Tragweite erlangen.

Die jährliche Periode der Windstärke auf den Berggipfeln.

Die folgende Tabelle *L* enthält die einzelnen Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblick und auf dem Säntis in Meter pro Secunde.

Die Beobachtungsreihe des Sonnblick und auch jene des Säntis ist zu kurz, um die jährliche Periode der Windgeschwindigkeit genauer bestimmen zu lassen. Man sieht aber, wie zu erwarten, dass das Maximum der Windstärke auf unseren Alpengipfeln in den Wintermonaten eintritt, wie in den Niederungen. Doch hat auf den Berggipfeln auch der Sommer eine grosse Windgeschwindigkeit und die Amplitude der jährlichen Variation der Windstärke ist deshalb gering.

Auf dem Sonnblick trat das Minimum der Windstärke in den Monaten Mai bis Juli ein, auf dem Säntis von April bis Juni, der Juli hat wieder eine sehr grosse Windstärke. Bei Gegenüberstellen der gleichen Monate vermisst man fast jede Übereinstimmung im Gange der Windstärke zwischen Sonnblick und Säntis. Besonders auffallend ist die grosse Windgeschwindigkeit des Juli 1888 auf dem Säntisgipfel; auf dem Sonnblick war dieser Monat relativ ruhig. Der Februar 1891,

L. Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit. (Meter pro Secunde.)

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Sonnblick													
1887	—	—	—	—	—	—	—	—	8·5	7·7	7·9	6·7	—
1888	10·7	8·2	10·4	6·9	8·6	6·7	6·9	7·0	6·2	(9·9)	7·7	8·5	8·1
1889	8·6	8·7	10·4	8·6	7·6	8·6	7·9	10·3	9·1	8·8	10·4	10·4	9·1
1890	13·8	9·7	11·3	10·5	9·8	(10·3)	8·4	12·3	11·1	10·7	9·0	10·9	10·6
1891	8·9	14·5	12·1	8·5	9·9	9·1	8·2	9·7	8·8	10·6	10·2	10·9	10·1
1892	11·4	10·3	9·4	9·4	8·1	9·0	7·9	9·0	8·7	10·2	8·9	10·2	9·4
1893	12·3	9·8	10·1	9·0	6·6	7·0	8·1	6·7	8·8	11·3	9·1	9·4	9·0
Mittel	10·95	10·20	10·62	8·82	8·43	8·45	7·90	9·17	8·74	9·89	9·03	9·57	9·31
Säntis													
1886	8·9	5·4	7·7	6·2	6·6	5·8	8·7	8·6	6·4	7·2	10·8	12·1	7·9
1887	6·9	8·4	7·3	7·4	8·4	6·4	6·7	7·9	7·1	6·7	7·1	8·9	7·4
1888	9·7	7·7	10·4	7·1	7·3	6·7	11·3	6·6	5·6	8·3	9·2	7·5	8·1
1889	8·7	12·7	5·9	5·5	5·1	5·3	8·0	8·6	8·5	7·8	6·5	7·9	7·5
1890	11·3	7·2	7·6	6·2	6·9	8·8	8·3	8·6	6·7	8·2	6·9	6·9	7·8
1891	8·6	7·1	9·2	5·2	6·5	7·7	8·7	8·8	5·9	7·4	8·6	11·3	7·9
1892	8·9	10·4	6·6	6·1	6·6	8·3	8·4	7·2	7·2	8·1	6·4	7·8	7·7
1893	7·3	9·1	6·3	5·2	5·3	6·4	6·7	5·8	8·8	9·4	7·0	7·9	7·1
Mittel	8·79	8·50	7·62	6·11	6·59	6·92	8·35	7·76	7·02	7·89	7·81	8·79	7·88

der dem Sonnblick das höchste Monatsmittel der Windstärke brachte, war wieder umgekehrt auf dem Säntis ruhig.

Ich habe die Monatsmittel der Windstärke für Kremsmünster und Wien aus den gleichen Monaten abgeleitet, wie für den Sonnblick. Auch hier vermisst man eine Übereinstimmung. Die folgende kleine Tabelle enthält diese Mittel, sowie jene für den Obir aus der Periode Februar 1884 bis November 1890 inclusive und Jänner bis December 1893 (also für nicht ganz acht Jahrgänge). Die Mittel für den Säntis sind zum Vergleiche beigegeben.

Jährliche Periode der Windgeschwindigkeit.
Meter pro Secunde.

Ort	Obir	Säntis	Sonn- blick	Krems- münster ¹	Wien ¹
Höhe	2140 m	2500 m	3110 m	390 m	220 m
Jahre	8	8	6	6	6
Jänner	7·5	8·8	10·9	3·7	5·9
Februar	7·2	8·5	10·2	4·8	5·8
März	6·6	7·6	10·6	4·8	6·8
April	5·6	6·1*	8·8	3·7	5·4
Mai	5·3	6·6	8·4	3·4	4·7
Juni	5·4	6·9	8·4	3·5	4·9
Juli	4·8	8·3	7·9*	3·6	5·3
August	4·7*	7·8	9·2	3·2*	4·8
September	5·3	7·0	8·7	3·3	4·8
October	6·2	7·9	9·9	3·2	4·7
November	6·3	7·8	9·0	3·3	4·4*
December	6·7	8·8	9·6	3·1*	4·5
Jahr	6·0	7·7	9·3	3·5	5·1

¹ Aus genau derselben Periode abgeleitet, aus welcher die Mittel für den Sonnblick stammen.

Auf den Gipfelstationen hat der Jänner und nach ihm der Februar das Maximum der Windstärke, das Minimum fällt auf das Frühjahr oder den Sommer (zwischen April und August).

Die mit den Sonnblick-Mitteln der Zeit nach genau correspondirenden Mittel der Windgeschwindigkeit für Kremsmünster und Wien zeigen durchaus keinen parallelen Gang, weder mit dem Sonnblick, noch untereinander.

Auf die mittlere Windgeschwindigkeit nehmen locale Verhältnisse in hohem Grade Einfluss, so dass eine Übereinstimmung im jährlichen Gange der Windstärke selbst in gleichen Perioden nur wenig zur Geltung kommt. Unten trat das Maximum der Windstärke im März ein, auf denselben Monat fällt auch im vieljährigen Mittel das Maximum. Der Juli, in dem auf dem Sonnblick die kleinste Windgeschwindigkeit registriert worden ist, hatte unten in Kremsmünster und Wien ein secundäres Maximum der Windstärke.

Der Vollständigkeit der Charakterisirung der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel halber will ich zum Schlusse auch noch einige Daten über die absoluten Maxima der Windgeschwindigkeit anführen. Wegen der Unsicherheit der Reduction der Aufzeichnungen auf absolutes Maass darf man bei den folgenden Zahlen keine grosse Genauigkeit voraussetzen.

Die mittleren Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit aus der Periode September 1887 bis December 1893 sind:

Mittlere Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Meter pro Secunde.

December.....	30	Juni	27
Jänner.....	35	Juli	27
Februar	32	August	29
März	33	September	28
April	28	October	30
Mai	29	November.....	31

Das mittlere Jahresmaximum ist 40 *m* pro Secunde. Die grösste Windgeschwindigkeit trat in der Nacht vom 17. zum 18. Februar 1891 ein bei einem Sturme aus NE und N. Der

Beobachter notirte um 9^h Abends NE₈ und um 7^h Morgens N₁₀ bei —13° C. Das Anemometer gibt als grösste Windgeschwindigkeit 48 *m* pro Secunde (d. i. mittlere Windgeschwindigkeit für ein ganzes Stundenintervall).

A n h a n g.

Tabelle I und II enthalten den täglichen Gang der Windstärke auf dem Sonnblick nach den rohen Mitteln.

Die Reduction der anemometrischen Aufzeichnungen der Windgeschwindigkeit auf Meter pro Secunde erfolgte unter der Annahme der Robinson'schen Regel. Da aber von März 1889 an infolge einer Änderung am Registrirapparat die Windgeschwindigkeiten etwas kleiner ausfielen, wurden dieselben von da an mit einem empirischen Factor 1·4 multiplicirt, um sie mit den früheren unmittelbar vergleichbar zu machen.¹ Man darf aus diesen und anderen Gründen, die zum Theile für die Windregistrirungen überhaupt gelten, den folgenden absoluten Werthen der Windgeschwindigkeiten auf dem Sonnblickgipfel keine zu grosse Bedeutung beilegen.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit im August im Mittel der sechs Jahre 1888—1893 war so abweichend von jenem der übrigen Monate, dass ich, um den jährlichen Gang dieses Elementes, wie er sich im Mittel vieler Jahre herausstellen dürfte, etwas übersichtlicher zu erhalten, mir erlaubte, für diesen Monat nur die vierjährigen Mittel 1890 bis 1893 einzustellen. Es ergab sich nämlich, dass es die beiden ersten Jahrgänge waren, welche diese Abweichungen von den sechs- bis siebenjährigen Mitteln der anderen Monate zumeist hervorbrachten. Um jedermann ein Urtheil über die Berechtigung dieses einigermassen willkürlich scheinenden Vorganges zu gestatten, mögen die stündlichen Windgeschwindigkeiten im August nach den Mitteln der verschiedenen Perioden hier Platz finden. Die Windgeschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde entsprechen immer jenem Stundenintervalle, das der angeschriebenen Stunde vorausgeht.

¹ Man sehe darüber die citirte Abhandlung von Dr. Pernter nach auf S. 36 des Separatabdruckes (S. 236 des Bandes).

Mittlere Windgeschwindigkeit im August.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vormittag											
25·0	24·6	25·3	25·4	25·9	24·9	24·3	23·1	23·0*	23·8	23·2	23·6
32·5	33·6	33·8	34·1	35·7	34·3	33·0	33·0	34·3	32·8	32·0	30·9
Nachmittag											
23·7	23·6	24·7	24·2	23·3	23·8	24·8	24·7	25·2	25·8	25·8	25·4
30·6	28·5	28·7	27·4	27·2*	27·9	27·8	29·3	30·7	29·2	29·1	31·3

In der ersten Reihe, den vier Jahren 1890—1893 entsprechend, fällt das Minimum der Windgeschwindigkeit etwa auf 9^h Vormittags und stimmt darin mit den vorhergehenden und nachfolgenden Monaten überein; in der zweiten Reihe hingegen aus den zwei Jahrgängen 1888 und 1889 abgeleitet, tritt das Minimum erst um 5^h Abends ein, wo in allen Nachbarmonaten die Windgeschwindigkeit schon wieder erheblich über dem Mittel sich befindet. Es ist nun durchaus unwahrscheinlich, dass ein Monat derart ohne jeden Übergang sich von den Nachbarmonaten unterscheidet, und es schien mir daher berechtigt, die beiden Jahrgänge 1888 und 1889 als mit grösseren Störungen behaftet, vorläufig von den Mittelwerthen für den August auszuschneiden, um den jährlichen Gang der Stundenmittel deutlicher hervortreten zu lassen. Ich zweifle nicht, dass die vierjährigen Mittel den langjährigen näher kommen dürften, als die sechsjährigen, welche auch die Jahre 1888 und 1889 einschliessen.

Die Häufigkeit der acht Hauptwindrichtungen nach den unmittelbaren dreimaligen täglichen Beobachtungen um 7^h, 2^h und 9^h in den derart differirenden Jahrgängen war folgende:

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
1888—1889..	26	6	1	1	10	23	19	7	6
1890—1893..	13	5	2	4	10	25	14	17	3
1887—1893..	18	4	1	3	9	24	17	14	6

Die beiden Jahrgänge 1888—1889, mit der anormalen Verlegung des Minimums der Windstärke auf den Nachmittag zeichnen sich durch ein anormales Vorwiegen des Nordwindes

aus; nimmt man aber NW, N und NE zusammen, dann ist allerdings kaum ein Unterschied zu bemerken. Es bleibt demnach doch fraglich, ob das Vorwiegen gewisser Windrichtungen die Anomalie im täglichen Gange der Windstärke während der beiden ersten Jahrgänge erklären kann.

Die Tabelle III enthält die Constanten der periodischen Reihen mittelst deren der jährliche Gang der täglichen Variation berechnet worden ist, nachdem die rohen Mittel aus sechs Jahren noch zu grosse Unregelmässigkeit zeigten.

Es wurden zunächst die Constanten der Reihe

$$p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x$$

für die einzelnen Monate berechnet und dann die p und q , die eine ausgesprochene jährliche Periode zeigen, desgleichen wieder durch analoge Sinusreihen dargestellt. Da der August in dem Werthe von q_1 nach den Beobachtungen eine auffallende Störung zeigt, wurde in Tabelle III der berechnete Werth von q_1 (also -0.76 statt -0.22 , siehe S. 680) statt dessen eingestellt und die Rechnung wiederholt. So wurden die mit q'_1 bezeichneten Werthe erhalten, die sich natürlich nur in den Monaten Juli, August und September merklich von den früheren unterscheiden.

Es schien mir, dass es bei den Coëfficienten der einmaligen täglichen Welle zweckmässiger sei, sich auf die Berechnung mit zwei Gliedern zu beschränken; die jährliche Periode der unmittelbar nach den Beobachtungen erhaltenen Werthe von p_1 und q_1 ist von einfacher Natur. Hingegen ist es bei den Coëfficienten p_2 , q_2 jedenfalls erforderlich, noch ein drittes periodisches Glied zur Berechnung derselben zu verwenden, weil im jährlichen Gange derselben drei Maxima und drei Minima hervortreten.

Als Verwandlungszahl der nominellen Kilometer pro Stunde in Meter pro Secunde wurde angenommen

$$0.2777 \times 1.25 = 0.347.$$

Dies gilt für die rohen und für die berechneten reducirten Monatsmittel. Für die Mittel der Jahreszeiten wurden etwas

andere Reductionsfactoren verwendet, d. i. für den Winter 0·353, Frühling 0·344, Sommer 0·356, Herbst 0·367. Die Bearbeitung der rohen, den Anemogrammen entnommenen Windgeschwindigkeiten erfolgte in längeren Pausen mit Unterbrechungen, und so kam es, dass ich zuerst für die Tabelle der Monatsmittel einen einheitlichen Factor zur Reduction benützte, dann später etwas strenger verfahrend, zur Reduction der Jahreszeitenmittel verschiedene der ungleichen Zahl der zu reducirenden Monate genauer angepasste Factoren.¹ Daher stimmen die Jahreszeitenmittel nicht völlig genau mit den Monatsmitteln, wie es sein sollte. Der Unterschied ist aber für den vorliegenden Zweck und die erreichbare Genauigkeit der mittleren Windgeschwindigkeiten überhaupt völlig irrelevant.

Tabelle IV, täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Säntisgipfel, bedarf keiner Erläuterung.

Tabelle V bis XII enthalten die Jahreszeitenmittel der Windgeschwindigkeit in Meter pro Secunde und die Abweichungen der Stundenmittel von den entsprechenden 24 stündigen Mitteln ohne irgend eine Ausgleichung.

In einigen dieser Tabellen bemerkt man durch alle vier Jahreszeiten hindurchgehende Störungen des täglichen Ganges, von denen jene, welche in die Nachtzeit fallen, sicherlich nicht durch Wechseln der Autographenpapiere und ähnliche äussere Beeinflussungen entstanden sein können. Auf dem Säntis macht sich 2—3^h Morgens eine Abnahme der Windstärke zu allen Jahreszeiten geltend, von 7—8^h a. eine Zunahme derselben. Sonnblick 1—2^h a. Abnahme der Windstärke, desgleichen 4—5^h p. auffallende Abnahme derselben in allen Jahreszeiten. Die Papiere wurden angeblich stets um Mittag ausgewechselt.

Auf dem Ben Nevis, wo die Windstärken direct geschätzt werden, ist Morgens um 5^h eine erhebliche Abnahme der Windstärke in allen Jahreszeiten zu bemerken, dagegen um 3^h a. eine Zunahme. Um 3^h und 4^h Nachmittag macht sich eine ganz auffallende Abnahme der Windstärke in allen Jahreszeiten bemerkbar.

¹ Einen Theil der Monatsmittel hatte schon Herr Dr. Pernter in seiner Abhandlung reducirt.

Diesen Störungen mögen in der That irgend welche vorübergehende Einflüsse auf den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Grunde liegen, die in der Natur der Erscheinung begründet sind und mit anderen meteorologischen Vorgängen zusammenhängen. Vorläufig genügt es, darauf aufmerksam gemacht zu haben. Es werden vieljährige Registrirungen nöthig sein, um dieselben genauer untersuchen zu können.

Anhang. Tabelle I. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonblickipfel.
Mittel aus 6 Jahren. Meter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
12— 1 ^a a.	11·03	10·86	10·96	8·98	8·84	8·77	8·01	8·67	8·46	8·95	8·70	9·99	9·35
1— 2	11·17	10·65	10·51	8·64	8·70	8·29	7·66	8·53	8·08	8·84	8·74	9·68	9·12
2— 3	11·20	10·86	10·89	8·60	8·29	8·50	7·73	8·77	8·32	8·91	8·84	9·64	9·21
3— 4	11·06	10·37	10·82	8·46	7·91	8·32	7·80	8·71	8·05	8·91	8·84	9·36	9·08
4— 5	11·17	10·27	10·75	8·29	7·62	8·29	7·66	8·98	8·05	8·98	8·91	9·36	9·02
5— 6	11·52	10·13	10·44	8·29	7·62	7·94	7·62	8·64	7·94	9·16	8·88	9·33	8·95
6— 7	11·62	9·85	10·20	8·22	7·66	7·62	7·42	8·43	7·84	9·40	8·74	9·09	8·84
7— 8	11·09	9·61	10·16	8·18	7·84	7·32	7·28	8·01	7·97	9·19	8·60	9·16	8·70
8— 9	10·89	9·43	10·02	8·43	8·05	7·32	7·21	7·97	8·08	9·29	8·39	9·29	8·69
9—10	10·86	9·54	9·88	8·64	8·11	7·32	7·32	8·25	8·08	9·33	8·57	9·43	8·77
10—11	10·54	9·36	10·05	8·74	8·36	7·32	7·46	8·05	7·94	9·33	8·46	9·26	8·74
11—Mittag	10·82	9·33	10·44	8·81	8·50	7·49	7·59	8·18	8·08	9·47	8·39	9·43	8·87
12— 1	11·34	9·71	10·89	9·09	8·74	7·84	7·77	8·22	7·94	9·57	8·81	9·82	9·14
1— 2	10·82	9·88	10·75	9·26	8·57	8·05	8·11	8·18	8·08	9·64	9·01	9·71	9·17
2— 3	11·09	10·23	11·09	9·16	8·84	8·53	8·01	8·57	8·18	9·75	8·98	9·68	9·34
3— 4	11·24	10·16	10·99	9·12	8·77	8·64	8·36	8·39	8·15	9·61	8·98	9·68	9·34
4— 5	10·86	10·34	10·99	8·84	8·60	8·67	8·32	8·08	8·15	9·57	8·74	9·47	9·21
5— 6	11·03	10·44	11·34	8·95	8·74	8·91	8·64	8·25	8·29	10·02	8·95	9·61	9·43
6— 7	10·82	10·27	11·24	9·01	8·70	9·09	8·70	8·60	8·29	9·75	8·81	9·33	9·38
7— 8	10·93	10·51	11·52	9·33	9·33	9·12	8·84	8·57	8·81	9·92	8·77	9·57	9·60
8— 9	10·61	10·16	11·24	9·29	9·36	9·09	8·46	8·74	8·77	9·50	8·50	9·64	9·44
9—10	10·34	10·44	11·13	9·43	9·23	9·26	8·29	8·95	8·74	9·29	8·60	9·75	9·45
10—11	10·41	10·68	11·03	9·40	9·29	9·40	8·43	8·95	8·74	9·12	8·60	9·68	9·47
11—Mittern.	10·72	10·51	10·96	9·05	8·91	9·26	8·46	8·81	8·50	8·95	8·50	9·85	9·37
Mittel	10·96	10·15	10·76	8·84	8·52	8·35	7·96	8·48	8·23	9·35	8·72	9·53	9·15

Anhang. Tabelle II.
Sonnblick. Abweichungen der Stundenmittel vom Monatsmittel.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn.— 1 ^h a.	·07	·71	·20	·14	·32	·42	·05	·19	·23	— ·40	— ·02	·46	·20
1— 2	·21	·50	— ·25	— ·20	·18	·06	— ·30	·05	·15	— ·51	·02	·15	— ·03
2— 3	·24	·71	·13	— ·24	— ·23	·15	— ·23	·29	·09	— ·44	·12	·11	·06
3— 4	·10	·22	·00	— ·38	— ·61	·03	— ·16	·33	·18	— ·44	·12	— ·17	— ·09
4— 5	·21	·12	— ·01	— ·55	— ·90	·06	— ·30	·50	·18	— ·37	·19	— ·17	— ·13
5— 6	·56	— ·02	— ·32	— ·55	— ·90	·41	— ·34	·16	·29	— ·19	·16	— ·20	— ·20
6— 7	·66	— ·30	— ·56	— ·62	— ·86	·73	— ·54	·05	·39	·05	·02	— ·44	— ·31
7— 8	·13	— ·54	— ·60	— ·66	— ·68	— 1·03	— ·68	·47	·26	— ·16	— ·12	— ·37	— ·45
8— 9	— ·07	— ·72	— ·74	— ·41	— ·47	— 1·03	— ·75	·51	·15	— ·06	— ·33	— ·24	— ·46
9— 10	— ·10	— ·61	— ·88	— ·20	— ·41	— 1·03	— ·64	·23	·15	— ·02	·15	— ·10	— ·38
10— 11	— ·42	— ·79	— ·71	— ·10	— ·16	— 1·03	— ·50	·43	·29	— ·02	·26	— ·27	— ·41
11— Mittag	— ·14	— ·82	— ·32	— ·03	— ·02	— ·86	— ·37	·30	·15	·12	·33	— ·10	— ·28

12—1 ^a	.36	.44	.13	.25	.22	.51	.19	.26	.29	.22	.09	.29	.01
1—2	—	.14	.27	.42	.05	.30	.15	.30	.15	.29	.29	.18	.02
2—3	.13	.08	.33	.32	.32	.18	.05	.09	.05	.40	.26	.15	.19
3—4	.28	.01	.23	.28	.25	.29	.40	.09	.08	.26	.26	.15	.19
4—5	—	.10	.19	.00	.08	.32	.36	.40	.08	.22	.02	.06	.06
5—6	.07	.29	.58	.11	.22	.56	.68	.23	.06	.67	.23	.08	.28
6—7	—	.14	.12	.17	.18	.74	.74	.12	.06	.40	.09	.20	.23
7—8	—	.03	.36	.49	.81	.77	.88	.09	.58	.57	.05	.04	.45
8—9	—	.35	.01	.45	.84	.74	.50	.26	.54	.15	.22	.11	.29
9—10	—	.62	.29	.59	.71	.91	.33	.47	.51	.06	.12	.22	.30
10—11	—	.55	.53	.56	.77	1.05	.47	.47	.51	.23	.12	.15	.32
11—Mittern.	—	.24	.36	.21	.39	.91	.50	.33	.27	.40	.22	.32	.22
Mittel	.24	.38	.37	.33	.44	.59	.42	.28	.24	.28	.16	.20	.23

Anhang. Tabelle III.
 Sonnblickgipfel. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit.
 Willkürliche Einheiten. $x = 0$ für $11\frac{1}{2}^h$ Nachts.

	nach den Beobachtungen			berechnet mit			
	p_1	q_1	p_2	q_2	p_1	q_2	q_1'
					2 Gliedern		2 Gliedern
					3 Gliedern		
					2 Gliedern	3 Gliedern	2 Gliedern
Jänner	-0.27	0.53	-0.62	0.54	0.59	0.07	0.05
Februar	1.59	-0.38	-0.21	0.68	0.90	-0.22	-0.28
März	0.94	-1.31	-0.29	0.38	0.91	-0.92	-0.94
April	0.36	-1.30	0.64	-0.03	0.89	-1.61	-1.57
Mai	0.81	-1.71	0.89	-0.21	1.07	-1.87	-1.83
Juni	2.12	-1.68	-0.16	0.22	1.38	-1.61	-1.65
Juli	0.92	-1.61	-0.25	0.03	1.46	-1.11	-1.28
August	1.01	-0.22	0.09	0.11	1.05	-0.76	-0.98
September	0.79	-0.60	0.24	-0.37	0.33	-0.66	-0.82
October	-0.61	-1.02	-0.40	-0.25	-0.27	-0.63	-0.67
November	-0.01	-0.15	-0.39	0.51	-0.35	-0.44	-0.38
December	0.37	-0.42	0.49	0.35	0.06	-0.10	-0.06
Jahr	0.67	-0.82	0.00	0.16	0.67	-0.82	-0.87

Berechnete Werthe der Constanten.

	p_1	q_1	p_2	q_2	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	0.59	0.05	-0.13	0.54	0.59	0.55	85.1	346.5
Februar	0.90	-0.28	-0.59	0.50	0.94	0.77	107.3	310.3
März	0.91	-0.94	-0.17	0.34	1.31	0.38	135.3	333.4
April	0.89	-1.57	0.74	0.00	1.81	0.74	150.5	90.0
Mai	1.07	-1.83	0.73	-0.12	2.12	0.74	149.7	99.3
Juni	1.38	-1.65	-0.06	0.14	2.15	0.15	140.1	336.8
Juli	1.46	-1.28	-0.28	0.24	1.94	0.37	131.2	310.6
August	1.05	-0.98	0.14	-0.12	1.44	0.18	133.0	130.6
September	0.33	-0.82	0.13	-0.42	0.88	0.44	158.1	162.8
October	-0.27	-0.67	-0.33	-0.13	0.72	0.35	202.0	248.5
November	-0.35	-0.38	-0.27	0.39	0.52	0.47	222.6	325.3
December	0.06	-0.06	0.11	0.60	0.08	0.61	135.0	10.4
Jahr	0.67	-0.87	0.00	0.16	1.09	0.16	142.4	0.9

Anhang. Tabelle IV. Sântis. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit.
Mittel aus acht Jahren (1886—1893). Meter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn. — 1 ^{ha} .	8.49	8.60	7.39	6.66	6.92	7.52	9.12	8.49	7.81	7.86	7.94	8.81	7.97
1 — 2	8.49	8.66	7.36	6.51	6.59	7.31	9.21	8.43	7.90	7.80	7.90	8.66	7.90
2 — 3	8.52	8.36	7.30	6.21	6.39	7.35	9.10	8.24	7.62	7.79	7.78	8.51	7.76
3 — 4	8.66	8.72	7.26	6.29	6.56	7.50	9.24	8.36	7.84	7.84	7.78	8.48	7.88
4 — 5	8.59	8.46	7.24	6.28	6.40	7.25	8.99	8.09	7.42	7.80	7.44	8.31	7.69
5 — 6	8.75	8.28	7.20	6.25	6.56	6.96	8.61	8.01	7.42	7.71	7.73	8.36	7.65
6 — 7	8.81	8.21	7.14	6.12	6.45	6.88	7.98	7.90	7.29	7.94	7.69	8.26	7.56
7 — 8	9.15	8.39	7.74	6.05	6.66	6.60	7.71	7.74	7.05	8.00	8.09	8.62	7.65
8 — 9	9.00	8.47	7.65	5.76	6.30	6.45	7.45	7.24	6.63	7.84	7.90	8.54	7.44
9 — 10	9.01	8.36	7.70	5.65	6.11	6.25	7.31	7.08	6.51	7.92	7.86	8.59	7.36
10 — 11	9.04	8.40	7.71	5.57	6.06	6.09	6.97	6.86	6.46	7.54	7.75	8.80	7.27
11 — Mittag	9.09	8.15	7.76	5.56	6.22	6.17	6.91	6.84	6.40	7.48	7.92	9.01	7.28
12 — 1	8.72	8.25	7.81	5.64	6.25	6.45	7.16	7.14	6.31	7.46	7.75	9.18	7.34
1 — 2	8.68	8.45	7.68	5.69	6.25	6.62	7.36	7.08	6.31	7.49	7.55	8.86	7.33
2 — 3	8.80	8.36	7.62	5.74	6.04	6.54	7.55	7.06	6.14	7.66	7.51	8.72	7.31
3 — 4	9.00	8.61	7.89	5.84	6.45	6.70	8.01	7.21	6.43	7.73	7.74	9.31	7.58
4 — 5	9.03	8.70	7.90	5.84	6.38	6.74	8.45	7.34	6.52	8.15	7.92	9.70	7.72
5 — 6	8.76	8.74	8.04	6.28	6.56	6.89	8.60	7.64	6.49	8.42	7.92	9.20	7.79
6 — 7	8.85	8.74	7.89	6.50	6.89	7.16	8.92	7.89	6.86	8.36	7.98	9.29	7.94
7 — 8	8.70	8.65	7.77	6.36	7.09	7.29	9.08	7.81	7.15	8.45	7.86	9.01	7.93
8 — 9	8.75	8.59	7.76	6.30	7.25	7.26	9.06	7.90	7.45	8.12	7.86	8.85	7.93
9 — 10	8.80	8.51	7.91	6.46	7.38	7.38	9.14	8.34	7.70	8.16	8.06	8.69	8.04
10 — 11	8.69	8.60	7.68	6.60	7.16	7.25	9.15	8.38	7.73	8.10	7.95	8.72	8.00
11 — 12	8.64	8.35	7.62	6.58	6.94	7.38	8.92	8.24	7.66	7.84	7.90	8.93	7.92
Mittel	8.79	8.48	7.63	6.11	6.58	6.92	8.33	7.72	7.05	7.89	7.82	8.81	7.68

Anhang. Tabelle V. Paris, Bureau Central.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	2.07	1.83	1.60	1.52	.24	.54	.50	.27	.39
1 ^a a.	2.03	1.80	1.48	1.46	.28*	.57	.62	.33	.45
2	2.06	1.68	1.44	1.38	.25	.69	.66	.41	.50
3	2.09	1.73	1.38	1.34	.22	.64*	.72*	.45*	.51
4	2.04	1.69	1.40	1.36	.27	.68	.70	.43	.52
5	2.11	1.73	1.41	1.36	.20	.64	.69	.43	.49
6	2.03	1.77	1.52	1.39	.28*	.60	.58	.40	.46
7	2.03	1.98	1.84	1.47	.28	.39	.26	.32	.31
8	2.12	2.33	2.07	1.62	.19	.04	.03	.17	.11
9	2.21	2.60	2.32	1.83	.10	.23	.22	.04	.10
10	2.49	2.89	2.60	2.12	.18	.52	.50	.33	.38
11	2.62	3.00	2.80	2.37	.31	.63	.70	.58	.55
Mittag	2.75	3.11	2.80	2.52	.44	.74	.70	.73	.65
1	2.77	3.12	2.93	2.51	.46	.75	.83*	.72*	.69
2	2.83	3.18	2.90	2.47	.52*	.81*	.80	.68	.70*
3	2.65	3.10	2.79	2.30	.34	.73	.69	.51	.57
4	2.57	3.10	2.83	2.18	.26	.73	.73	.39	.53
5	2.41	2.99	2.76	1.96	.10	.62	.66	.17	.39
6	2.40	2.70	2.46	1.78	.09	.33	.36	.01	.19
7	2.31	2.39	2.06	1.74	.00	.02	.04	.05	.02
8	2.31	2.22	1.79	1.67	.00	.15	.31	.12	.14
9	2.26	2.16	1.75	1.65	.05	.21	.35	.14	.19
10	2.14	1.97	1.73	1.56	.17	.40	.37	.23	.29
11	2.10	1.86	1.64	1.51	.21	.51	.46	.28	.36
Mittel	2.31	2.37	2.10	1.79	.23	.51	.52	.34	.40

Anhang. Tabelle VI. Eiffelthurm.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht									
1	9·62	10·16	8·94	9·44	·43	1·28	1·25	1·05	1·00
2	9·59	9·92	8·78	9·24	·40	1·04	1·09	·85	·84
3	9·55	9·76	8·78	9·09	·36	·88	1·09	·70	·76
4	9·78	9·73	8·61	9·04	·39	·85	·92	·65	·75
5	9·76	9·59	8·35	8·96	·57	·71	·66	·57	·63
6	9·82	9·49	8·32	8·80	·63	·61	·63	·41	·57
7	9·74	9·23	7·86	8·84	·55	·35	·17	·45	·38
8	9·73	8·73	7·11	8·84	·54	·15	·58	·45	·06
9	9·67	7·92	6·21	8·38	·48	·96	—	—	·49
10	9·43	7·34	6·04	7·74	·24	—	—	—	·90
11	9·13	7·42	6·25	7·12	·06	—	—	—	—
Mittag									
1	8·46	7·53	6·60	6·97	—	1·46	1·44	1·27	1·06
2	8·04	7·63	6·79	6·93	·73	1·35	1·09	1·42	1·15
3	7·77	7·78	6·96	7·03	—	—	—	—	—
4	7·73	7·84	7·21	7·04	·15	1·25	·90	1·46	1·12
5	7·83	8·14	7·12	7·24	—	—	—	—	—
6	8·24	8·46	7·28	7·43	1·46	1·04	·48	1·35	1·08
7	8·69	8·34	7·44	7·92	—	·74	·57	1·15	·96
8	9·26	8·60	7·48	8·49	·95	·42	·41	·96	·69
9	9·57	9·26	7·58	8·97	—	·54	·25	—	·44
10	9·84	9·81	8·17	9·39	·07	·28	·21	·47	·08
11	9·90	10·08	8·64	9·42	·38	·38	—	·58	·30
Mittel	9·19	8·88	7·69	8·39	·65	·93	·48	1·00	·76
					·71	1·20	·95	1·03	·97
					·56	1·22	1·30	1·19	1·06
					·53	1·40	1·36	1·10	1·10
					·64	·90	·82	·84	·76

Anhang. Tabelle VII. Blue Hill.

	Meter pro Secunde			Abweichung vom Mittel					
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht—1	10·01	8·58	7·28	8·23	·14	—	·45	—	·11
1—2	9·74	8·45	7·12	8·09	·13	·28	·29	·15	·07
2—3	9·78	8·58	6·98	8·18	—	·15	·15	·06	—
3—4	9·83	8·54	6·84	8·09	·09	·19	·01	·15	·09
4—5	9·83	8·36	6·75	8·14	·04	·37	·08	·10	·15
5—6	9·78	8·32	6·62	8·14	·09	·41	·21	·10	·20
6—7	9·78	8·23	6·44	8·18	·09	·50	·39	·06	·26
7—8	9·69	8·18	6·21	7·96	·18	·55	·62	·28	·41
8—9	9·78	8·45	6·26	8·09	·09	·28	·57	·15	·27
9—10	10·01	8·67	6·35	8·36	·14	·06	·48	·12	·07
10—11	9·96	8·67	6·44	8·41	·09	—	·39	·17	·05
11—Mittag	10·01	8·72	6·57	8·54	·14	·01	·26	·30	·04
12—1	10·23	9·08	6·84	8·85	·36	·35	·01	·61	·33
1—2	10·14	9·17	6·94	8·76	·27	·44	·11	·52	·34
2—3	10·19	9·53	7·03	8·54	·32	·80	·20	·30	·40
3—4	10·01	9·71	7·12	8·45	·14	·98	·29	·21	·40
4—5	9·69	9·57	6·98	8·00	·18	·84	·15	·24	·14
5—6	9·61	9·13	6·80	8·00	—	·40	—	·24	—
6—7	9·69	8·67	6·71	8·09	·18	·06	·12	·15	·13
7—8	9·92	8·72	6·89	8·27	·05	·01	·06	·03	·03
8—9	9·96	8·67	7·12	8·09	·09	·06	·29	·15	·04
9—10	9·83	8·63	7·15	8·09	·04	·10	·32	·15	·01
10—11	9·80	8·45	7·15	8·05	·07	·28	·32	·19	·05
11—12	9·65	8·58	7·24	8·14	—	—	·41	·10	·02
Mittel	9·87	8·73	6·83	8·24	·14	·31	·26	·19	·15

Anhang. Tabelle VIII. Ben Nevis.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht									
1	11·12	8·21	5·69	8·04	·38	·48	·45	·56	·47
2	11·21	8·27	5·80	7·80	·47	·54	·56	·32	·47
3	11·31	8·39	5·96	7·98	·57	·66	·72	·50	·59
4	11·35	8·54	6·07	8·16	·61	·81	·83	·68	·70
5	10·56	8·30	5·58	8·10	—	·57	·34	·62	·66
6	10·75	7·69	5·66	7·38	·01	·07	·42	·10	·00
7	10·72	7·84	5·52	7·35	·02	·11	·28	·13	·10
8	10·65	7·81	5·25	7·41	—	·08	·01	—	·07
9	10·79	7·72	5·08	7·32	·09	—	·16	·16	·06
10	10·69	7·60	5·06	7·11	·05	·08	—	·07	·03
11	10·89	7·36	4·92	7·02	·05	·13	·18	·37	·18
Mittag									
1	10·49	7·11	4·75	7·11	·25	·37	·49	·37	·37
2	10·56	7·30	4·62	6·96	·18	·43	·62	·52	·44
3	10·36	7·18	4·62	7·26	·38	·55	—	·22	·44
4	10·69	7·33	4·73	7·26	·05	·40	·51	·22	·29
5	10·59	7·27	4·75	7·44	—	·46	—	·04	·28
6	10·13	7·21	4·62	7·08	·81	·52	·62	·40	·54
7	10·23	7·18	4·73	7·14	·51	·55	·51	·34	·48
8	10·16	7·15	4·86	7·20	—	·58	·38	·28	·45
9	10·82	7·57	5·17	7·53	·08	·16	—	·05	·02
10	10·79	8·02	5·39	7·65	·05	·29	·15	·17	·16
11	10·92	7·96	5·39	7·77	·18	·23	·15	·20	·21
	10·98	8·12	5·52	7·95	·24	·39	·28	·47	·34
Mittel	10·74	7·73	5·24	7·48	·26	·36	·41	·31	·32

Anhang. Tabelle IX. Obir.

	Meter pro Sekunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitn.—1 ^h a.	7·97	6·91	6·79	7·00	·05	·32	1·01	·42	·42
1—2	7·97	6·83	6·67	7·02	·05	·24	·89	·44	·38
2—3	7·89	6·91	6·51	6·87	·13	·32	·73	·29	·30
3—4	7·77	6·83	6·51	6·87	·25	·24	·73	·29	·25
4—5	7·77	6·87	6·47	6·90	·25	·28	·69	·32	·26
5—6	7·81	6·83	6·31	6·83	·21	·24	·53	·25	·20
6—7	7·89	6·79	6·04	6·69	·13	·20	·26	·11	·11
7—8	8·09	6·59	5·64	6·63	·07	·03	·14	·05	·01
8—9	8·05	6·43	5·37	6·59	·03	·16	·41	·01	·13
9—10	8·01	6·35	5·01	6·47	·01	·24	·77	·11	·28
10—11	7·97	6·24	4·84	6·24	·05	·35	·94	·34	·42
11—Mittag	7·85	6·12	4·66	6·16	·17	·47	·12	·42	·54
12—1	7·69	5·96	4·66	5·94	·33	·63	·12	·64	·68
1—2	7·65	6·00	4·58	5·82	·37	·59	·20	·76	·73
2—3	7·77	6·00	4·66	5·94	·25	·59	·12	·66	·65
3—4	7·85	6·08	4·78	5·92	·17	·51	·00	·64	·58
4—5	8·21	6·00	4·90	6·12	·19	·59	·88	·46	·43
5—6	8·32	6·31	5·33	6·49	·30	·28	·45	·09	·13
6—7	8·44	6·75	5·68	6·74	·42	·16	·10	·16	·16
7—8	8·56	6·94	6·27	6·95	·54	·35	·49	·37	·44
8—9	8·40	7·10	6·75	6·98	·38	·51	·97	·40	·56
9—10	8·28	7·26	6·71	6·94	·26	·67	·93	·36	·55
10—11	8·17	6·98	6·83	6·90	·15	·39	1·05	·32	·48
11—12	8·05	7·06	6·79	7·04	·03	·47	1·01	·46	·49
Mittel	8·02	6·59	5·78	6·58	·20	·37	·77	·35	·38

Anhang. Tabelle X. Sântis.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitn. — 1 ^h a.	8.63	6.99	8.38	7.87	.06	.22	.72	.28	.290
1—2	8.60	6.82	8.32	7.87	.09	.05	.66	.28	.225
2—3	8.46	6.63	8.23	7.73	.23	.14	.57	.14	.085
3—4	8.62	6.70	8.37	7.82	.07	.07	.71	.23	.200
4—5	8.45	6.64	8.11	7.56	.24	.13	.45	.03	.012
5—6	8.46	6.67	7.86	7.62	.23	.10	.20	.03	.025
6—7	8.43	6.57	7.59	7.64	.26	.20	.07	.120	.120
7—8	8.72	6.82	7.35	7.71	.03	.05	.31	.12	.027
8—9	8.67	6.57	7.05	7.46	.02	.20	.61	.13	.240
9—10	8.65	6.49	6.88	7.43	.04	.28	.78	.16	.315
10—11	8.75	6.45	6.64	7.25	.06	.32	1.02	.34	.405
11—Mittag	8.72	6.51	6.64	7.27	.03	.26	1.02	.32	.392
12—1	8.72	6.57	6.92	7.17	.03	.20	.74	.42	.332
1—2	8.66	6.54	7.02	7.12	.03	.23	.64	.47	.342
2—3	8.63	6.47	7.05	7.10	.06	.30	.61	.49	.365
3—4	8.97	6.73	7.31	7.30	.28	.04	.35	.29	.100
4—5	9.14	6.71	7.51	7.53	.45	.06	.15	.06	.045
5—6	8.90	6.96	7.71	7.61	.21	.19	.05	.02	.117
6—7	8.96	7.09	7.99	7.73	.27	.32	.33	.14	.265
7—8	8.79	7.07	8.06	7.82	.10	.30	.40	.23	.257
8—9	8.73	7.10	8.07	7.81	.04	.33	.41	.22	.250
9—10	8.67	7.25	8.29	7.97	.02	.48	.63	.38	.367
10—11	8.67	7.15	8.26	7.93	.02	.38	.60	.34	.325
11—12	8.64	7.05	8.18	7.80	.05	.28	.52	.21	.240
Mittel	8.60	6.77	7.60	7.59	.12	.21	.52	.22	.222

Anhang. Tabelle XI. Sonnblick.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mittn.— 1 ^a a.	10·81	9·52	8·71	9·21	·41	·22	·23	·07	·20
1— 2	10·69	9·22	8·37	9·06	·29	·08	·11	·22	·02
2— 3	10·76	9·18	8·55	9·20	·36	·12	·07	·08	·06
3— 4	10·45	8·99	8·53	9·10	·05	·31	·05	·18	·10
4— 5	10·45	8·82	8·53	9·15	·05	·48	·25	·13	·13
5— 6	10·51	8·71	8·28	9·17	·11	·59	·20	·11	·20
6— 7	10·37	8·62	8·03	9·17	·03	·68	·45	·11	·32
7— 8	10·13	8·66	7·73	9·09	·27	·64	·75	·19	·46
8— 9	10·05	8·76	7·70	9·09	·35	·54	·78	·19	·47
9—10	10·12	8·81	7·83	9·17	·28	·49	·65	·11	·38
10—11	9·90	8·98	7·81	9·08	·50	·32	·67	·20	·42
11—Mittag	10·04	9·17	7·96	9·15	·36	·13	·52	·13	·28
12— 1	10·47	9·49	8·15	9·29	·07	·19	·33	·01	·01
1— 2	10·32	9·45	8·33	9·43	·08	·15	·15	·15	·02
2— 3	10·52	9·62	8·59	9·50	·12	·32	·11	·22	·19
3— 4	10·54	9·55	8·68	9·43	·14	·25	·20	·15	·18
4— 5	10·40	9·40	8·58	9·33	·00	·10	·10	·05	·06
5— 6	10·54	9·59	8·82	9·62	·14	·29	·34	·34	·28
6— 7	10·32	9·57	9·02	9·47	·08	·27	·54	·19	·23
7— 8	10·52	9·97	9·07	9·70	—	·67	·59	·42	·45
8— 9	10·32	9·88	8·99	9·44	·08	·58	·51	·16	·29
9—10	10·36	9·85	9·06	9·40	·04	·55	·58	·12	·30
10—11	10·44	9·83	9·15	9·33	·04	·53	·67	·05	·32
11—12	10·54	9·56	9·07	9·15	·14	·26	·59	·13	·21
Mittel	10·40	9·30	8·48	9·28	·17	·36	·38	·15	·23

Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes

von

Max Jüllig,

dipl. Ingenieur, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, Oberingenieur der k. k. österr. Staatsbahnen.

(Mit 4 Tafeln und 9 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1894.)

Ferraris hat gezeigt,¹ dass man durch zwei Wechselströme von constanter Phasendifferenz, welche die Stromleiter *mn* und *op* durchfliessen (Fig. 1), eine hohle Kupfermasse *K*, die an einem dünnen Faden hängt, in rotirende Bewegung versetzen kann. Die Intensitäten der beiden Wechselströme sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$J_1 = J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad J_2 = J'_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right),$$

wobei

$$0 < \varphi < \pi$$

Ein ähnliches Phänomen hat Tesla durch vier Magnetpole *a, b, c, d* (Fig. 2) von variabler Intensität hervorgerufen und zur Construction eines für technische Zwecke dienlichen Motors verwendet.² Zur Erregung der Magnetpole *a, b, c, d* dienten die Wechselströme *J₁* und *J₂* (Fig. 2), deren Intensitäten sehr nahe den Werthen

¹ Rotazioni elettrodinamiche prodotto per mezzo di correnti alternate. Nota del prof. Galileo Ferraris. Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, 1887—1888, p. 360.

² Berliner elektrotechn. Zeitschr., Bd. 9, S. 343. D. R. Patent Nr. 47885, von 1. Mai 1888 ab gültig.

$$J_1 = J_0 \cos \frac{2\pi t}{T},$$

$$J_2 = J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

entsprachen.

Die Kupfermasse ¹ *K* (Fig. 2) rotirt um eine zur Zeichnungsfläche senkrechte Axe.

Sowohl beim Apparate von Ferraris, als bei jenem von Tesla entstehen magnetische Felder, deren Kraftlinien ihre Gestalt periodisch ändern und in unmittelbarer Nähe der Drehungsaxe der Kupfermasse *K* ein nahezu homogenes magnetisches Feld bilden, das um die Axe *qr* (Fig. 1), beziehungsweise um eine durch den Punkt *K* (Fig. 2) senkrecht zur Zeichnungsfläche gelegten Axe rotirt.

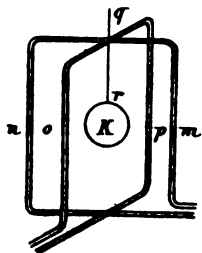


Fig. 1.

Die Einwirkung der rotirenden Kraftlinien auf die bewegliche Kupfermasse ist gleichartig mit jener eines um die Axe *yy'* (Fig. 3) rotirenden Magnetes² und die Erklärung der auftretenden Rotationserscheinungen ist identisch mit jener, welche für die Phänomene des Arago'schen Rotationsmagnetismus gegeben wurde.

In der Literatur über magnetische Drehfelder existiren keine präzisen Darstellungen der beim Ferraris'schen oder Tesla'schen Phänomen in Betracht kommenden Kraftlinien. Es würde auch kaum möglich sein, unter Berücksichtigung aller Einflüsse durch Rechnung die Gestalt der Kraftlinien zu ermitteln.

Macht man jedoch gewisse vereinfachende Annahmen, so ergeben sich übersichtliche Resultate, welche eine Beurtheilung der Beschaffenheit des Drehfeldes in allen seinen Theilen gestatten. Nehmen wir zunächst an, dass die beiden Strom-

¹ Beziehungsweise ein mit Kupferdraht umgebener Eisenkern.

² In Fig. 3 bedeutet *abcd* eine gläserne Schutzhülle, um Luftströme abzuhalten.

schleifen mn und op (Fig. 1) aus unendlich dünnen Drähten bestehen, die in zwei aufeinander senkrechten Ebenen liegen. Die Gestalt der beiden Leiter wird durch Fig. 4 versinnlicht.

Die geradlinigen Leiter 1 I, 2 II, 3 III, 4 IV sind zur Axe AB parallel und unendlich lang; die kürzesten Abstände

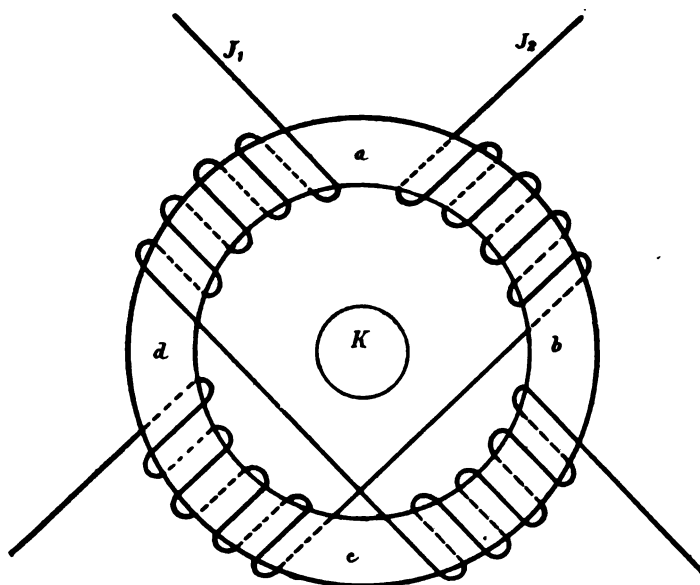


Fig. 2.

des Punktes O von den genannten vier unendlich langen Leitern $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ seien einander gleich.

In den Schleifen 1 I II 2 und 3 III IV 4 circuliren die Ströme

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= J_0 \cos \frac{2\pi t}{T} \\ J_2 &= J_0 \sin \frac{2\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Zunächst soll das magnetische Potential V_z des in Fig. 4 dargestellten Leiters 3 III IV 4 für einen beliebigen Punkt G bestimmt werden. Es ist bekanntlich $V_z = J_z w$, wobei w einen körperlichen Winkel bezeichnet, der von allen geradlinigen Leit-

strahlen, die man vom Leiter III.3.4.IV zum Punkte G ziehen kann, umschlossen wird.¹

Dieser körperliche Winkel wird durch den Inhalt einer Fläche f gemessen, welche ein vom Punkte G ausgehender Fahrstrahl, während er über die Schleife III.3.4.IV gleitet, aus einer Kugeloberfläche heraus-schneidet, deren Mittelpunkt mit dem Punkte G zusammenfällt und deren Radius gleich 1 gewählt wird. Die Fläche f wird positiv gerechnet, wenn der Strom, von G aus gesehen, entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung verläuft.

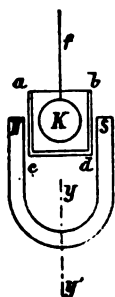


Fig. 3.

Im vorliegenden Falle ist die Fläche f ein sphärisches Zweieck (Fig. 4), da die Leitstrahlen $G3$, $G4$ und $GIII$, GIV mit dem Kugeldurchmesser $dc // AB$ zusammenfallen, wenn wir die Schleife III.3.4.IV unendlich lang machen.

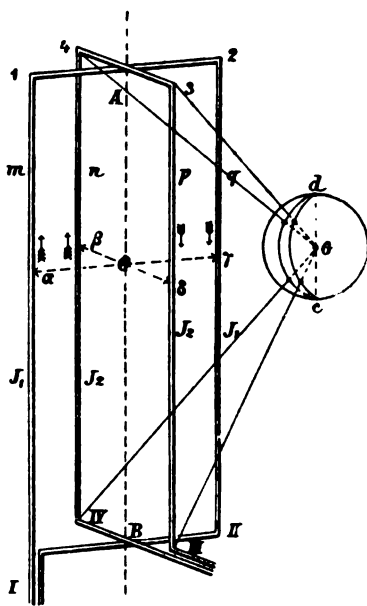


Fig. 4.

Bezeichnen wir mit φ den Neigungswinkel der Ebenen 3III G und 4IV G , so ist $f = 2\varphi$ und somit

$$V_2 = 2J_2\varphi.$$

Bezeichnen wir ferner mit ψ den Neigungswinkel der Ebenen 2II G und 1I G , so ist das durch die Stromschleife I12II im Punkte G hervorgerufene elektromagnetische Potential

$$V_1 = 2J_1\psi.$$

Fig. 5 zeigt eine orthogonale Projection des in Fig. 4 dargestellten Stromsystems, wobei die Zeichnungsfläche mit der Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ identisch ist und OA zur

¹ Vergl. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, Vieweg, 1891, 2. Aufl., S. 376, §. 186.

Zeichnungsfläche senkrecht steht. Das Zeichen $+$ in Fig. 5 bedeutet, dass der Strom von der Zeichnungsfläche zum Be-

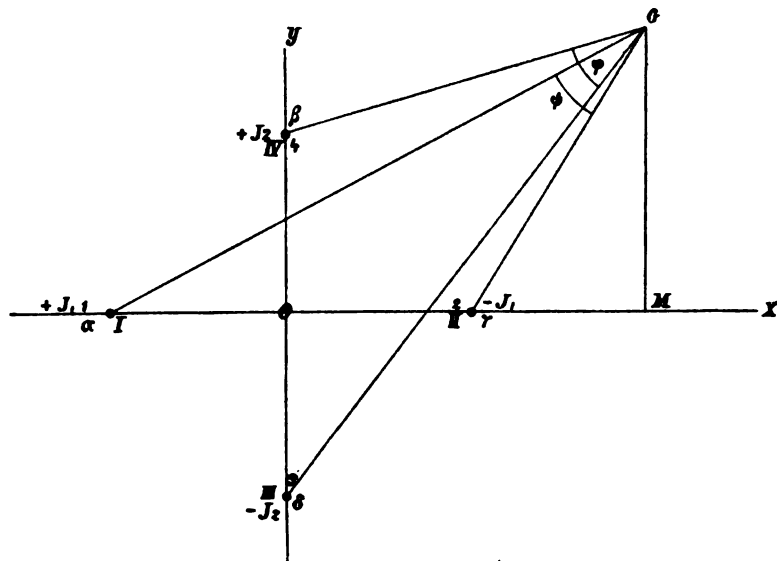


Fig. 5.

schaauer fliesse, das Zeichen $-$ die entgegengesetzte Stromrichtung.

Wir betrachten die Geraden $O\gamma$, $O\beta$, OA (Fig. 4 und 5) als x -, y - und z -Aren eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

Die Gleichung der Niveaulächen lautet:

$$V_1 + V_2 = C,$$

wobei C eine willkürliche reelle Grösse ist. Um die Gleichung der Niveaulächen in rechtwinkligen Coordinaten darzustellen, setzen wir $OM = x$, $MG = y$, $O\alpha = O\beta = O\gamma = O\delta = g$ und es ergibt sich

$$\varphi = \arctg \frac{2gx}{x^2 + y^2 - g^2}; \quad \psi = \arctg \frac{2gy}{x^2 + y^2 - g^2}.$$

Bezeichnen wir das Potential im Punkte G mit V , so ist

$$V = V_1 + V_2 = 2(\varphi J_2 + \psi J_1)$$

und mit Berücksichtigung der Werthe von φ und ψ

$$\frac{V}{2} = J_2 \operatorname{arctg} \frac{2gx}{x^2+y^2-g^2} + J_1 \operatorname{arctg} \frac{2gy}{x^2+y^2-g^2}. \quad 1a)$$

Es ist dies die Gleichung der Niveauflächen. Da in derselben die Variable z nicht erscheint, sind die Niveauflächen, wie vorausszusehen war, Cylinderflächen. Schneidet man dieselben durch eine zur Z -Axe senkrechte Ebene, so erhält man als Schnittlinien eine Schaar von Niveaulinien, deren Gleichung mit Gleichung 1a) identisch ist.

Die Kraftlinien bilden eine Schaar von Curven, welche die Niveauflächen normal schneiden. Da die ersteren Cylinderflächen bilden, deren Erzeugende sämmtlich zu einander parallel sind, so sind die Kraftlinien ebene Curven, welche in jeder beliebigen, zur xy -Ebene parallelen Ebene dargestellt werden können.

Bestimmt man aus Gleichung 1a) den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = Q,$$

so ist die Differentialgleichung der Kraftlinien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{Q}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1a) erhält man

$$Q = \frac{(s^4 + 4g^2y^2)J_2(y^2 - x^2 - g^2) - (s^4 + 4g^2x^2)J_1 2xy}{(s^4 + 4g^2y^2)J_2 2xy - (s^4 + 4g^2x^2)J_1(x^2 - y^2 - g^2)},$$

wobei zur Abkürzung

$$x^2 + y^2 - g^2 = s^2$$

gesetzt wurde. Die Differentialgleichung der Kraftlinien lautet somit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(s^4 + 4g^2y^2)J_2 \cdot 2xy - (s^4 + 4g^2x^2)J_1(x^2 - y^2 - g^2)}{(s^4 + 4g^2y^2)J_2(y^2 - x^2 - g^2) - (s^4 + 4g^2x^2)J_1 \cdot 2xy}. \quad 2)$$

Dieser Differentialgleichung genügt die endliche Gleichung

$$J_1 \log \text{nat} \frac{(x+g)^2 + y^2}{(x-g)^2 + y^2} - J_2 \log \text{nat} \frac{(y+g)^2 + x^2}{(y-g)^2 + x^2} = C, \quad 3)$$

wobei unter C eine willkürliche Constante zu verstehen ist.

Sind J_1 , J_2 und C gegeben, so lässt sich für jede Abscisse x die zugehörige Ordinate y berechnen.

Die Gleichung 3) wurde jedoch nicht durch Integration der Differentialgleichung 2), sondern auf einem Umwege gefunden, der nun beschrieben werden soll und auch zu einer einfachen Construction der durch Gleichung 3) dargestellten Curven geführt hat.

Setzt man in Gleichung 2)

$$J_2 = 0,$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + g^2 - x^2}{2xy}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht integrieren und führt zur endlichen Gleichung

$$\frac{(x+g)^2 + y^2}{(x-g)^2 + y^2} = C, \quad 4)$$

wobei C eine willkürliche Constante ist.

Durch eine einfache Transformation erhält man aus Gleichung 4) die Gleichung

$$y^2 + (\gamma - x)^2 = r^2, \quad 5)$$

wobei

$$\gamma = g \frac{C+1}{C-1}; \quad r = \frac{2g\sqrt{C}}{C-1} \quad 6)$$

Gleichung 5) ist die Gleichung eines Kreises vom Radius r , dessen Mittelpunkt auf der Abscissenaxe liegt und um die Länge γ vom Ursprung des Coordinatensystems entfernt ist.

Zu dem gleichen Resultate kann man auf synthetischem Wege gelangen.

Lassen wir in Fig. 5 J_2 verschwinden, so erhalten wir nachstehende Figur 6.

Das magnetische Potential im Punkte M ist $2\phi J_1 = V_1$. Für jede Niveauläche (beziehungsweise Niveaulinie) ist V_1 constant, somit auch ϕ constant. Hieraus folgt mit Rücksicht auf einen bekannten Lehrsatz der ebenen Geometrie, dass der Kreisbogen $IMII$ eine Niveaulinie ist.

Die Niveaulinien der Stromschleife J_1 bilden eine Schaar von Kreisbögen, die sich in den Punkten I und II schneiden, und die Niveaulächen sind Kreiscylinderflächen, deren Erzeugende

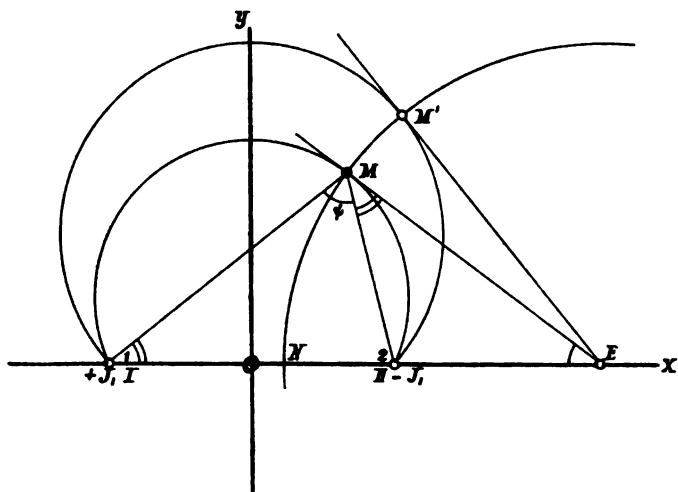


Fig. 6.

zu den Geraden I1 und II2 parallel sind und deren Mantelflächen sich in den Geraden I1 und II2 schneiden.

Behufs Ermittlung der Gestalt der Kraftlinien ziehen wir durch M (Fig. 6) eine Tangente ME und bezeichnen die Entfernung OE mit Γ .

Es soll zunächst die Länge ME berechnet werden. Bekanntlich ist

$$\angle EIM = \angle EMII.$$

Da ferner die Dreiecke $MEII$ und MEI den Winkel bei E gemein haben, sind dieselben ähnlich und es besteht die Proportion

$$\overline{IE} : \overline{ME} = \overline{ME} : \overline{IE}$$

oder

$$\overline{ME}^2 = \overline{IE} \cdot \overline{IE}.$$

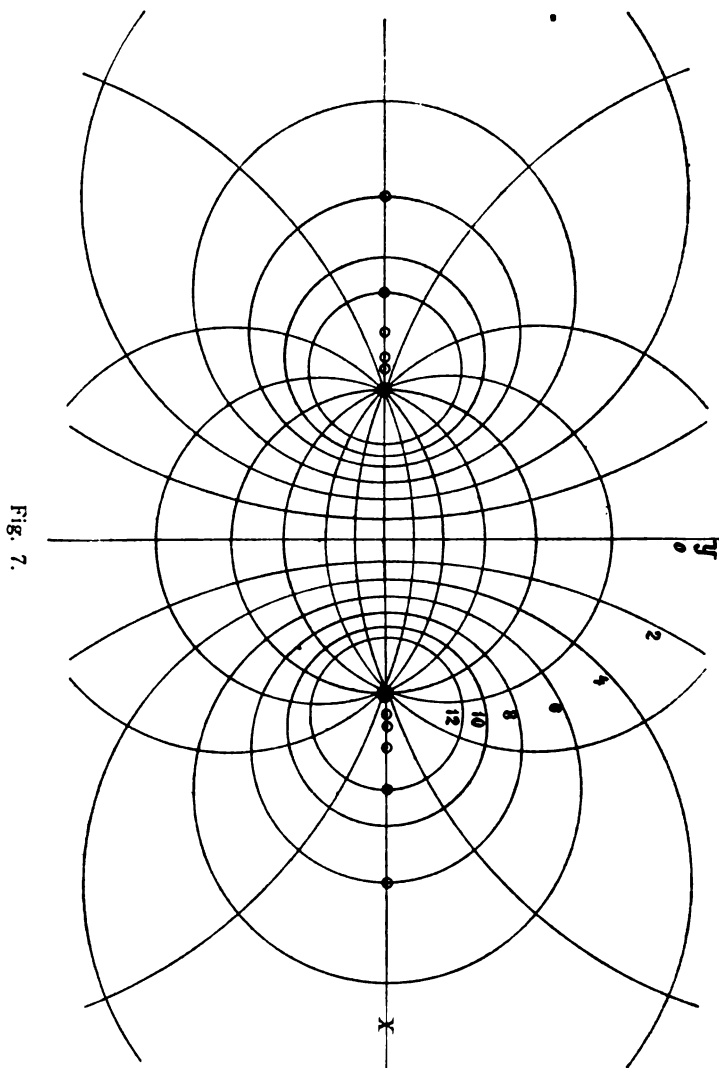
Setzen wir $ME = R$ und berücksichtigen, dass $\overline{OE} = \Gamma$, $\overline{OI} = \overline{OII} = g$, so ergibt sich

$$R^2 = (\Gamma + g)(\Gamma - g) = \Gamma^2 - g^2.$$

Ziehen wir vom Punkte E aus an eine beliebige andere Niveaulinie $IM'II$ eine Tangente EM' , so erhalten wir für die Länge $M'E$ immer denselben Werth $\sqrt{\Gamma^2 - g^2} = R$, und liegen die Punkte $MM'...$ in der Peripherie eines Kreises, der sämtliche Niveaulinien normal schneidet und somit als eine Kraftlinie angesehen werden muss. In Fig. 7 ist ein System von Kraft- und Niveaulinien dargestellt. Die Niveaulinien entsprechen gleichen Potentialdifferenzen und die Kraftlinien sind derart angeordnet, dass die Intensität des magnetischen Feldes durch die Anzahl der Kraftlinien bestimmt wird, welche eine auf beliebiger Niveaufläche befindliche Flächeneinheit durchdringen. Sämtliche Kraftlinien liegen in parallelen Ebenen, deren Entfernung gleich 1 *cm* gewählt wurde. Legt man durch je zwei benachbarte Kraftlinien zwei zur Zeichnungsfläche senkrechte Kreiscylinder, so wird durch diese aus einer 1 *cm* hohen, zur Zeichnungsfläche parallelen Schicht eine Kraft-röhre (Sphondyloid) herausgeschnitten. Jede Einheits-Kraft-röhre¹ ist derart beschaffen, dass sie in einem bewegten linearen Stromleiter, welcher dieselbe in einer Secunde durchschneidet, elektromotorische Kräfte wachruft, deren Mittelwerth der absoluten elektromagnetischen Einheit der elektromotorischen Kraft gleich ist, wobei jedoch die Rückwirkung eines im besagten Leiter eventuell entstehenden Stromes auf die Gestalt der Kraftlinien unberücksichtigt bleibt. Für jedes magnetische Feld lassen sich unzählig viele verschiedene Anordnungen der Sphondyloiden finden, welche obiger Bedingung entsprechen. Es muss deshalb die Gestalt des Querschnittes der Sphondyloiden noch durch willkürliche Nebenbedingungen näher bestimmt werden. Im vorliegenden Falle wird angenommen, dass die Schnitte der Einheits-Kraft-röhren mit der Ebene $II\ II2$ Rechtecke bilden, deren Höhe = 1 *cm* und deren sonstige Anordnung aus Fig. 8 zu entnehmen ist.

¹ Vergl. Maxwell, Lehrb. der Elektrizität und des Magnetismus, II. Bd.

Diese Figur zeigt in etwas vergrößertem Massstabe einen Schnitt des in Fig. 7 dargestellten magnetischen Feldes durch



eine Ebene, welche die x - und z -Axe in sich enthält und somit zur Zeichnungsfläche der Figur 7 senkrecht steht.

Bestimmen wir zunächst die magnetische Intensität, welche durch die Stromschleife 11 II 2 in verschiedenen Punkten der Ebene 11 II 2 erzeugt wird.

Es sei n (Fig. 8) eine nordmagnetische Masse $= 1$, $On = x$, so wirkt der Strom 2II auf n mit der Kraft $P_2 = 2J_1 : (g-x)$, der Strom 1I mit der Kraft $P_1 = 2J_1 : (g+x)$. Somit ist die magnetische Intensität für jeden Punkt, der in der Ebene 1II2 liegt und von OZ um x absteht

$$H = 2J_1 \left(\frac{1}{g-x} + \frac{1}{g+x} \right) \quad (7)$$

Bewegt sich ein Stromleiter OO' von 1 cm Länge von OO' parallel zu sich selbst in der Ebene 1II2 nach a_1a' , $a_2a'_2 \dots$ u. s. w., so wird in jedem Zeitelement dt , in welchem der Strom-

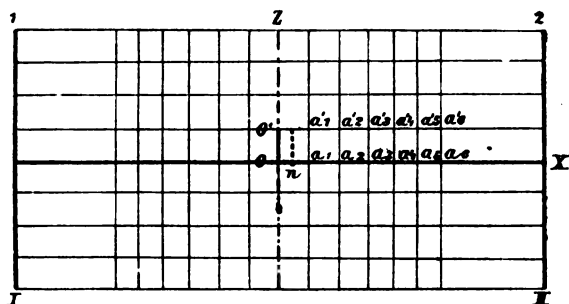


Fig. 8.

leiter das Wegelement dx zurücklegt, die im beweglichen Leiter OO' inducirte elektromotorische Kraft

$$e = H \cdot \frac{dx}{dt},$$

somit

$$edt = Hdx.$$

Der Mittelwerth von e im Verlaufe der Zeit t ist

$$e_m = \frac{1}{t} \int_0^t edt = \frac{1}{t} \int_0^x Hdx \quad (8)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass O' nach t Secunden den Weg x zurückgelegt hat.

Es sollen nun die Strecken

$$oa_1 = x_1, oa_2 = x_2, oa_3 = x_3 \dots oa_n = x_n$$

so gewählt werden, dass für $t = 1$ Secunde, die Mittelwerthe

$$e'_m = \int_0^{x_1} H dx = 1, \quad e''_m = \int_0^{x_2} H dx = 2, \quad e'''_m = \int_0^{x_3} H dx = 3,$$

und allgemein

$$e_m^{(n)} = \int_0^{x_n} H dx = n \quad (9)$$

sind.

Setzt man in Gleichung 8) für H den Werth aus Gleichung 7) und $e_m^{(n)}$ statt e_m , x_n anstatt x , $t = 1$, so ergibt sich

$$e_m^{(n)} = 2J_1 \int_0^{x_n} \left(\frac{dx}{g-x} + \frac{dx}{g+x} \right) = n \quad (10)$$

und nach Durchführung der Integration

$$e_m^{(n)} = n = 2J_1 \log \text{nat} \frac{g+x_n}{g-x_n},$$

somit

$$x_n = g \frac{e^{\frac{n}{2J_1}} - 1}{e^{\frac{n}{2J_1}} + 1}$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$e^{\frac{n}{2J_1}} = x_n$$

setzen,

$$x_n = g \frac{x_n - 1}{x_n + 1}. \quad (11)$$

Für jedes Rechteck $oo'a'_1a_1$, $a_1a'_1a'_2a_2$, $a_2a'_2a'_3a_3$ u. s. w. ist das Doppelintegral

$$\int_{x=x_n}^{x=x_{n+1}} \int_{z=0}^{z=1} H dx dz = 1.$$

Die Gleichung einer Kraftlinie, welche die Abscissenaxe in der Entfernung $ON = x_n$ (Fig. 6) schneidet, hat die Form

$$y^2 + (\gamma_n - x)^2 = r_n^2.$$

Setzen wir $y = 0$, so erhalten wir allgemein

$$x = \gamma_n \pm r_n.$$

Von den beiden Werthen $x = \gamma_n + r_n$ und $x = \gamma_n - r_n$ entspricht der kleinere dem Werthe x_n der Gleichung 11) und ist somit

$$x_n = \gamma_n - r_n = g \frac{x_n - 1}{x_n + 1}. \quad (12)$$

Da ferner (wie aus der Erläuterung zu Fig. 6 zu entnehmen ist)

$$\gamma_n^2 - g^2 = r_n^2, \quad (13)$$

erhalten wir aus den Gleichungen 12) und 13)

$$\left. \begin{aligned} \gamma_n &= g \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1} \\ r_n &= g \frac{2x_n}{x_n^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung 6) die physikalische Bedeutung der Constante C der Gleichung 4)

$$C = x_n^2 = e^{\frac{n}{J}},$$

wobei $n = 1, 2, 3, \dots$

Setzen wir $J = 4$ in absolutem elektromagnetischem Maasse gemessenen Stromeinheiten $= 40$ Ampère, so wird

$$x_n = e^{\frac{n}{8}} = 1.133148^n.$$

In der Tabelle A sind die Werthe für

$$\frac{x_n}{g} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma_n}{g} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1}$$

für $n = 1$ bis $n = 12$ zusammengestellt.

Tabelle A.

n	$\frac{x_n}{g} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$	$\frac{\gamma_n}{g} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1}$
1	0.062	8.045
2	0.124	4.083
3	0.185	2.790
4	0.245	2.164
5	0.303	1.803
6	0.358	1.574
7	0.412	1.421
8	0.462	1.313
9	0.510	1.236
10	0.555	1.179
11	0.596	1.137
12	0.635	1.105

Mit Hilfe dieser Tabelle wurden die in Fig. 7 dargestellten Kraftlinien construiert, und zwar für $n = 2, 4, 6, 8, 10$ und 12 .

Als Controle für die Richtigkeit der Zeichnung dient die Thatsache, dass die Kraftlinie 12 den Mittelpunkt der Kraftlinie 6 , die Kraftlinie 8 den Mittelpunkt der Kraftlinie 4 und allgemein die Kraftlinie n den Mittelpunkt der Kraftlinie $\frac{n}{2}$ in ihrer Peripherie enthält. Dies lässt sich aus den Gleichungen 14) leicht ersehen.

Jede Kraftlinie mit dem Index $2n$ schneidet die positive x -Axe in zwei Punkten, deren Abscissen gleich $\gamma_{2n} - r_{2n}$ und $\gamma_{2n} + r_{2n}$ sind.

Nun ist aus den Gleichungen 14) zu entnehmen, dass

$$\gamma_{2n} + r_{2n} = g \frac{x_{2n} + 1}{x_{2n} - 1}$$

und da

$$x_n = e^{\frac{n}{2J_1}}, \quad x_{2n} = e^{\frac{2n}{2J_1}} = x_n^2,$$

so ergibt sich

$$\gamma_{zn} + r_{zn} = g \frac{\kappa_n^2 + 1}{\kappa_n^2 - 1} = \gamma_n.$$

Aus dieser Gleichung ist die oben angeführte geometrische Beziehung unmittelbar ersichtlich.

In Fig. 9, Taf. I sind alle der Tabelle A entsprechenden Kraftlinien gezeichnet. Fig. 10 zeigt die Kraftlinien eines magnetischen Feldes, das von den coëxistirenden Strömen

$$J_1 = 4 \cos 15^\circ, \quad J_2 = 4 \sin 15^\circ$$

erzeugt wird. Die Figuren 9 bis 15 auf Tafel I bis IV entsprechen den Strömen

Fig. 9. . . .	$J_1 = 4 \cos 0^\circ$	$J_2 = 4 \sin 0^\circ$
Fig. 10. . . .	$J_1 = 4 \cos 15$	$J_2 = 4 \sin 15$
Fig. 11. . . .	$J_1 = 4 \cos 30$	$J_2 = 4 \sin 30$
Fig. 12. . . .	$J_1 = 4 \cos 45$	$J_2 = 4 \sin 45$
Fig. 13. . . .	$J_1 = 4 \cos 60$	$J_2 = 4 \sin 60$
Fig. 14. . . .	$J_1 = 4 \cos 75$	$J_2 = 4 \sin 75$
Fig. 15. . . .	$J_1 = 4 \cos 90$	$J_2 = 4 \sin 90.$

Fig. 15 ist mit Fig. 9 congruent und aus dieser durch Drehung um 90° entstanden. Die übrigen Figuren zeigen die Zwischenstadien. Zur Construction der Figur 10 dienten zwei Tabellen, welche gerade so wie Tabelle A berechnet wurden. Für die eine Tabelle ist

$$\kappa_n = e^{\frac{n}{8 \sin 15^\circ}}, \quad \text{für die zweite} \quad \kappa_n = e^{\frac{n}{8 \cos 15^\circ}}.$$

Die Mittelpunkte der kreisförmigen Kraftlinien für

$$\kappa_n = e^{\frac{n}{8 \cos 15^\circ}}$$

liegen in der Geraden ab (Fig. 10), jene für

$$\kappa_n = e^{\frac{n}{8 \sin 15^\circ}}$$

in der zu ab senkrechten Geraden cd . Die resultirenden Kraftlinien erhält man durch entsprechende Verbindung der Schnittpunkte der beiden Kraftliniensysteme.¹

In ähnlicher Weise wurden die übrigen Figuren gezeichnet und sind die Figuren 13 und 14 die um 90° gedrehten Spiegelbilder der Figuren 11 und 10.

Die Figuren auf Taf. I bis IV zeigen die successiven Veränderungen der Kraftlinien eines elektromagnetischen Drehfeldes.

Aus der angegebenen Construction lässt sich auch die Gleichung der Kraftlinien ableiten.

Wir haben eine Schaar von Kreisen, deren Gleichung durch die Formel

$$y^2 + (\gamma_n - x)^2 = r_n^2 \quad (15)$$

gegeben ist, mit einer zweiten Schaar von Kreisen zum Schnitt zu bringen, deren Gleichung lautet:

$$x^2 + (\gamma_m - y)^2 = r_m^2, \quad (16)$$

wobei für ein und dieselbe Kraftlinie

$$n - m = \text{Const.} = C. \quad (17)$$

Es ist ferner

$$\gamma_n = g \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1}, \quad (18)$$

$$r_n^2 = \gamma_n^2 - g^2, \quad (19)$$

$$x_n = e^{\frac{n}{2J_1}}, \quad (20)$$

$$\gamma_m = g \frac{x_m^2 + 1}{x_m^2 - 1}, \quad (21)$$

$$r_m^2 = \gamma_m^2 - g^2, \quad (22)$$

$$x_m = e^{\frac{m}{2J_2}}. \quad (23)$$

¹ Vergl. auch Maxwell, Lehrb. der Elektrizität und des Magnetismus, I. Bd., S. 179.

Eliminirt man aus den neun Gleichungen 15) bis 23) die Grössen

$$\begin{aligned} \gamma_n, \quad r_n, \quad x_n, \quad n, \\ \gamma_m, \quad r_m, \quad x_m, \quad m, \end{aligned}$$

so ergibt sich die allgemeine Gleichung der Kraftlinien.

Zunächst erhält man aus den Gleichungen 15), 19) und 16), 22):

$$\begin{aligned} y^2 + (\gamma_n - x)^2 &= \gamma_n^2 - g^2 \\ x^2 + (\gamma_m - y)^2 &= \gamma_m^2 - g^2 \end{aligned}$$

Durch Auflösung nach γ_n und γ_m erhält man

$$\gamma_n = \frac{x^2 + y^2 + g^2}{2x} \quad (24)$$

$$\gamma_m = \frac{x^2 + y^2 + g^2}{2y} \quad (25)$$

Aus Gleichung 20) und 23) folgt

$$\begin{aligned} n &= 2J_1 \log \text{nat } x_n = J_1 \log \text{nat } x_n^2, \\ m &= 2J_2 \log \text{nat } x_m = J_2 \log \text{nat } x_m^2, \end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung 17):

$$n - m = C = J_1 \log \text{nat } x_n^2 - J_2 \log \text{nat } x_m^2 \quad (26)$$

Bestimmt man x_n^2 und x_m^2 aus den Gleichungen 18) und 21), so erhält man

$$x_n^2 = \frac{\gamma_n + g}{\gamma_n - g}, \quad x_m^2 = \frac{\gamma_m + g}{\gamma_m - g}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen 24) und 25)

$$x_n^2 = \frac{(g+x)^2 + y^2}{(g-x)^2 + y^2}, \quad x_m^2 = \frac{(g+y)^2 + x^2}{(g-y)^2 + x^2}. \quad (27)$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung 26) ein, so ergibt sich als Schlussresultat

$$J_1 \log \text{nat } \frac{(g+x)^2 + y^2}{(g-x)^2 + y^2} - J_2 \log \text{nat } \frac{(g+y)^2 + x^2}{(g-y)^2 + x^2} = C.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung, welche mit Gleichung 3) identisch ist, erhält man die Differentialgleichung 2) und gelangt somit auf zwei verschiedenen Wegen zum gleichen Resultate.

Jedes der in Fig. 9 bis 15 dargestellten Kraftliniensysteme wird durch eine Kraftlinie, welche durch den Mittelpunkt der betreffenden Figur geht,¹ in zwei congruente Hälften geteilt, von denen die eine mit der anderen durch eine Drehung um 180° zur Deckung gebracht werden kann. Alle Kraftlinien mit Ausnahme der Mittelpunktskraftlinien sind geschlossene Curven. Dieselben sind in nächster Nähe der Leiter 1 I, 2 II, 3 III, 4 IV nahezu kreisförmig, nehmen dann eine unregelmässig eiförmige Gestalt an, aus der sie in die Lemniscatenform übergehen. Die weiteren Übergangsformen sind aus den Figuren zu entnehmen. Die Mittelpunktskraftlinien sind in Fig. 9, 12 und 15 gerade Linien, in Fig. 10, 11, 13, 14 und 16 transcendente Curven, deren Gleichung lautet:

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{(x+g)^2+y^2}{(x-g)^2+y^2} = J_2 \log \operatorname{nat} \frac{(y+g)^2+x^2}{(y-g)^2+x^2}. \quad (28)$$

Sucht man aus dieser Gleichung $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich Gleichung 2) und folgt aus der letzteren für $x = y = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{J_1}{J_2} = \frac{J_0 \cos \frac{2\pi t}{T}}{J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi t}{T}, \quad (29)$$

das heisst: die durch die Gerade AB (Fig. 4) gehenden Kraftlinienelemente rotiren mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{T}$.²

Um auch über die Lage der unendlich fernen Punkte der Mittelpunktskraftlinien Aufschluss zu erhalten, führen wir

¹ Wir wollen dieselbe der Kürze halber mit dem Namen »Mittelpunktskraftlinie« bezeichnen.

² Vergl. Gleichung 1).

Polarcoordinaten ein und setzen

$$x = \rho \sin \varepsilon, \quad y = \rho \cos \varepsilon.$$

Gleichung 28) nimmt dann folgende Form an:

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{g^2 + 2g\rho \sin \varepsilon + \rho^2}{g^2 - 2g\rho \sin \varepsilon + \rho^2} = J_2 \log \operatorname{nat} \frac{g^2 + 2g\rho \cos \varepsilon + \rho^2}{g^2 - 2g\rho \cos \varepsilon + \rho^2}. \quad 30)$$

Dividirt man in beiden Brüchen Zähler und Nenner durch ρ^2 und sagt

$$\frac{g}{\rho} = \delta,$$

so ergibt sich

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{\delta^2 + 2\delta \sin \varepsilon + 1}{\delta^2 - 2\delta \sin \varepsilon + 1} = J_2 \log \operatorname{nat} \frac{\delta^2 + 2\delta \cos \varepsilon + 1}{\delta^2 - 2\delta \cos \varepsilon + 1}. \quad 31)$$

Für sehr grosse Werthe von ρ sind die Binome $\delta^2 + 2\delta \sin \varepsilon$, $\delta^2 - 2\delta \sin \varepsilon$, $\delta^2 + 2\delta \cos \varepsilon$, $\delta^2 - 2\delta \cos \varepsilon$ sehr klein und jedenfalls kleiner als 1.

Man kann somit die Logarithmen in Reihen entwickeln und erhält, wenn noch Glieder der dritten Ordnung berücksichtigt werden

$$\left. \begin{aligned} J_1 \sin \varepsilon \left[1 + \delta^2 \left(\frac{4}{3} \sin^2 \varepsilon - 1 \right) \right] &= \\ &= J_2 \cos \varepsilon \left[1 + \delta^2 \left(\frac{4}{3} \cos^2 \varepsilon - 1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad 32)$$

Für $\rho = \infty$ wird $\delta = 0$ und

$$\operatorname{tg} \varepsilon_\infty = \frac{J_2}{J_1} = \operatorname{tg} \frac{2\pi t}{T}.^1$$

Es geht somit eine Tangente, welche die Mittelpunktskraftlinie im Ursprung des Coordinatensystems berührt, durch die beiden unendlich fernen Punkte dieser Curve.

Eine solche Tangente ist zugleich eine Asymptote. Dies lässt sich leicht mit Hilfe der Gleichung 2) nachweisen. Dividirt

¹ Vergl. Gleichung 29.

man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung durch x^6 und setzt der Kürze halber

$$1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{g^2}{x_2} = \sigma^2,$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\sigma^4 + 4g^2 \frac{y^2}{x^4}\right) J_2 \cdot 2 \frac{y}{x} - \left(\sigma^4 + 4g^2 \frac{1}{x^2}\right) J_1 \left(1 - \frac{y^2}{x^2} - \frac{g^2}{x^2}\right)}{\left(\sigma^4 + 4g^2 \frac{y^2}{x^4}\right) J_2 \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 - \frac{g^2}{x^2}\right) - \left(\sigma^4 + 4g^2 \frac{1}{x^2}\right) J_1 \cdot 2 \frac{y}{x}} \quad 33)$$

Bezeichnen wir mit X, Y die unendlich grossen Coordinaten eines Punktes der Curve, für welchen $\rho = \infty$, so ist das Verhältniss

$$Y : X = \operatorname{ctg} \varepsilon_{\infty} = \frac{J_1}{J_2} \quad 34)$$

und wir erhalten zunächst, indem wir in Gleichung 33) für x und y X und Y setzen und die Beziehung 34) berücksichtigen, unter Hinweglassung der unendlich kleinen Brüche

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\infty} = - \frac{2\sigma_{\infty}^4 J_2 \frac{J_1}{J_2} - \sigma_{\infty}^4 J_1 \left(1 - \frac{J_1^2}{J_2^2}\right)}{\sigma_{\infty}^4 J_2 \left(\frac{J_1^2}{J_2^2} - 1\right) - \sigma_{\infty}^4 J_1 \cdot 2 \frac{J_1}{J_2}},$$

$$\sigma_{\infty}^2 = 1 + \frac{J_1^2}{J_2^2}.$$

Durch entsprechende Reduction ergibt sich

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\infty} = \frac{J_1}{J_2}. \quad 35)$$

Da

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\infty} = \operatorname{ctg} \varepsilon_{\infty},$$

so ist¹ jeder zu einem unendlich fernen Punkt einer Mittelpunktskraftlinie gezogene Radiusvector eine Asymptote, welche die Mittelpunktskraftlinie überdies im Coordinatenursprung

¹ Vergl. Gleichung 29.

berührt. Unter den Kraftlinien der Fig. 12 findet sich auch eine ∞ -förmige Curve und lässt sich eine solche auch in den durch Fig. 10, 11, 13, 14 und 16 dargestellten Systemen einschalten.

Für den Doppelpunkt dieser Curven nimmt der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ die Form $\frac{0}{0}$ an.

Somit ist nach Gleichung 2)

$$2J_2(s^3 + 4g^2y^2)xy = J_1(s^3 + 4g^2x^2)(x^2 - y^2 - g^2) \quad (36)$$

$$J_2(s^3 + 4g^2y^2)(y^2 - x^2 - g^2) = 2J_1(s^3 + 4g^2x^2)xy, \quad (37)$$

wobei

$$s^2 = x^2 + y^2 - g^2.$$

Die Coordinaten x_a, y_a des Doppelpunktes müssen überdies der Gleichung der Curve

$$J_1 \log \text{nat} \frac{(x+g)^2 + y^2}{(x-g)^2 + y^2} - J_2 \log \text{nat} \frac{(y+g)^2 + x^2}{(y-g)^2 + x^2} = C \quad (38)$$

Genüge leisten.

Dividirt man Gleichung 36) durch Gleichung 37) und setzt x_a, y_a an Stelle von x und y , so ergibt sich

$$\frac{2x_a y_a}{y_a^2 - x_a^2 - g^2} = \frac{x_a^2 - y_a^2 - g^2}{2x_a y_a}$$

und nach weiterer Reduction

$$x_a^2 + y_a^2 = g^2, \quad (39)$$

das heisst: alle Doppelpunkte der schleifenförmigen Curven liegen in der Peripherie eines Kreises vom Radius g .

Bestimmt man x_a und y_a aus den Gleichungen 36) und 37) und substituirt deren Werthe in Gleichung 38), so erhält man für beliebige Werthe von J_1 und J_2 jenen Werth von C , für welchen die Gleichung 38) einer ∞ -förmigen Curve angehört.

Da mit Rücksicht auf Gleichung 39) die Grösse

$$s^2 = x_a^2 + y_a^2 - g^2 = 0$$

ist, nehmen die Gleichungen 36) und 37) die einfache Form an:

$$2J_2 y_a^3 = J_1 x_a (x_a^2 - y_a^2 - g^2) = -2J_1 x_a y_a^2,$$

$$2J_1 x_a^3 = J_2 y_a (y_a^2 - x_a^2 - g^2) = -2J_2 y_a x_a^2$$

und ergibt sich mit Rücksicht auf Gleichung 1)

$$\frac{x_a}{y_a} = -\frac{J_2}{J_1} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi t}{T}. \quad (40)$$

Hieraus folgt, dass die Bewegung des Doppelpunktes in einem Kreise vom Radius g mit constanter Geschwindigkeit erfolgt, jedoch entgegengesetzt dem Sinne der Drehung der Asymptote der Mittelpunktskraftlinie.

Zum Schlusse möge noch eines Experimentes erwähnt werden, das als eine Ergänzung der Ferraris'schen Versuche angesehen werden kann.

Lässt man durch die Windungen ab und cd (Fig. 17) Wechselströme hindurchgehen, deren Intensitäten näherungsweise durch die Ausdrücke

$$J_m = J \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$J_n = J \cos \frac{2\pi t}{T}$$

gegeben sind, so geräth ein an dünnen Seidenfäden f_1, f_2, f_3 aufgehängter kupferner Hohlcyliner sofort in Rotation.

Bei Anstellung des Experimentes wurden nicht einfache Drahtwindungen

wie diese in der Figur dargestellt sind, sondern mit dünnem Kupferdraht bewickelte Rahmen mit je 480 Windungen benützt.

Die Erklärung des Phänomens ist durch die in den Figuren 9 bis 16 versinnlichte Bewegung der Kraftlinien unmittelbar gegeben.

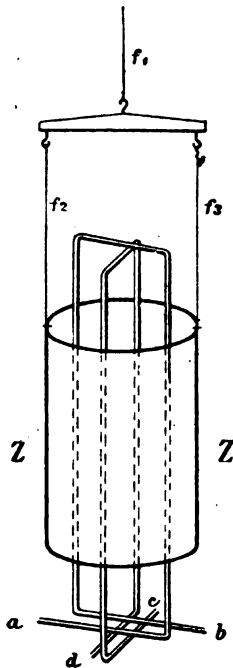
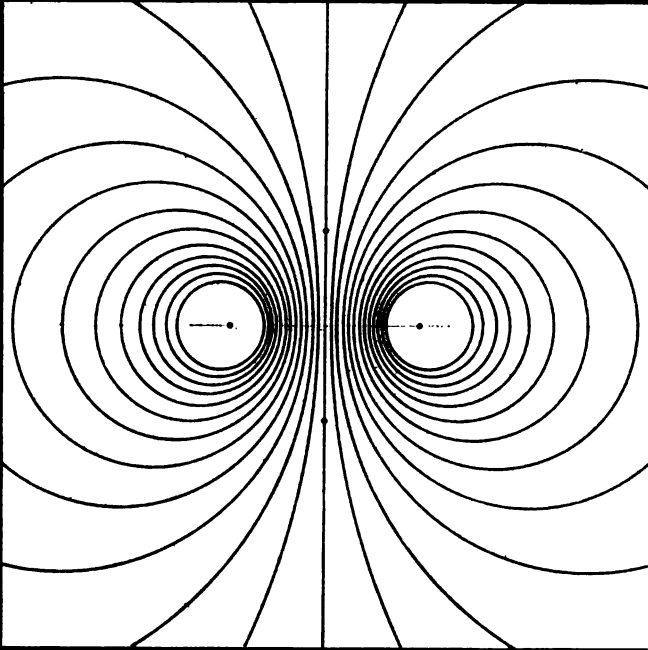


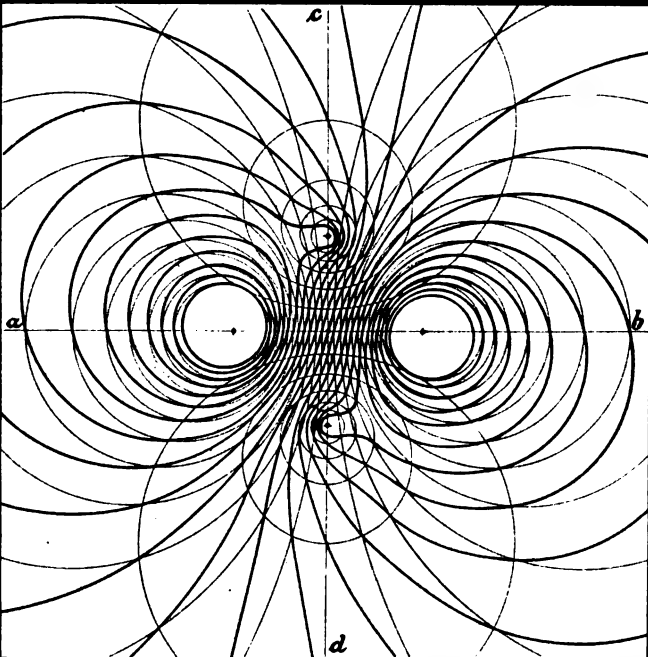
Fig. 17.

Fig.



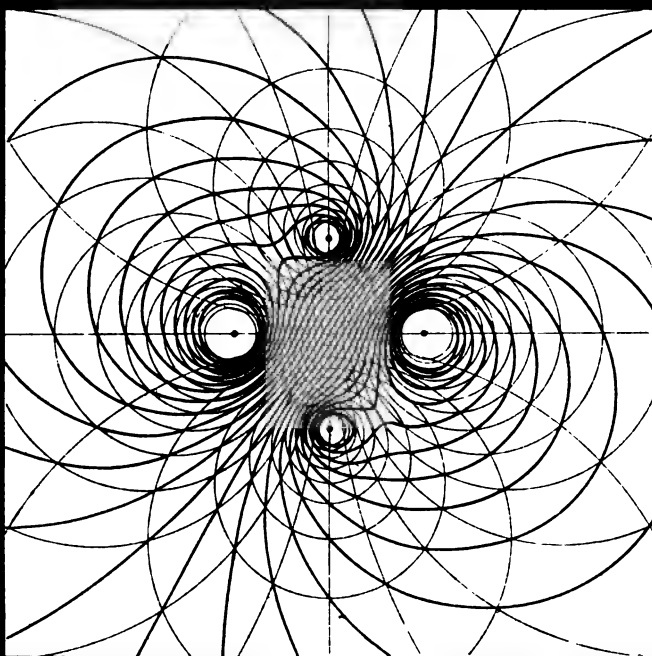
9.

Fig.



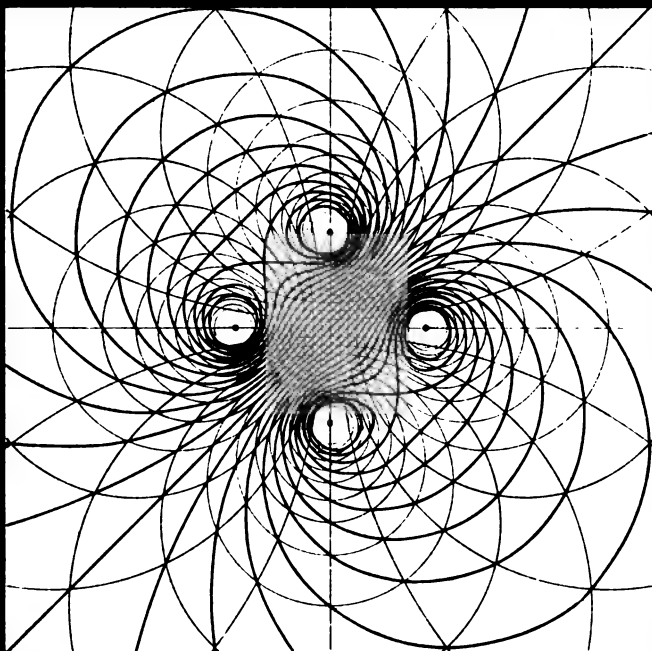
10.

Fig.



11.

Fig.



12.

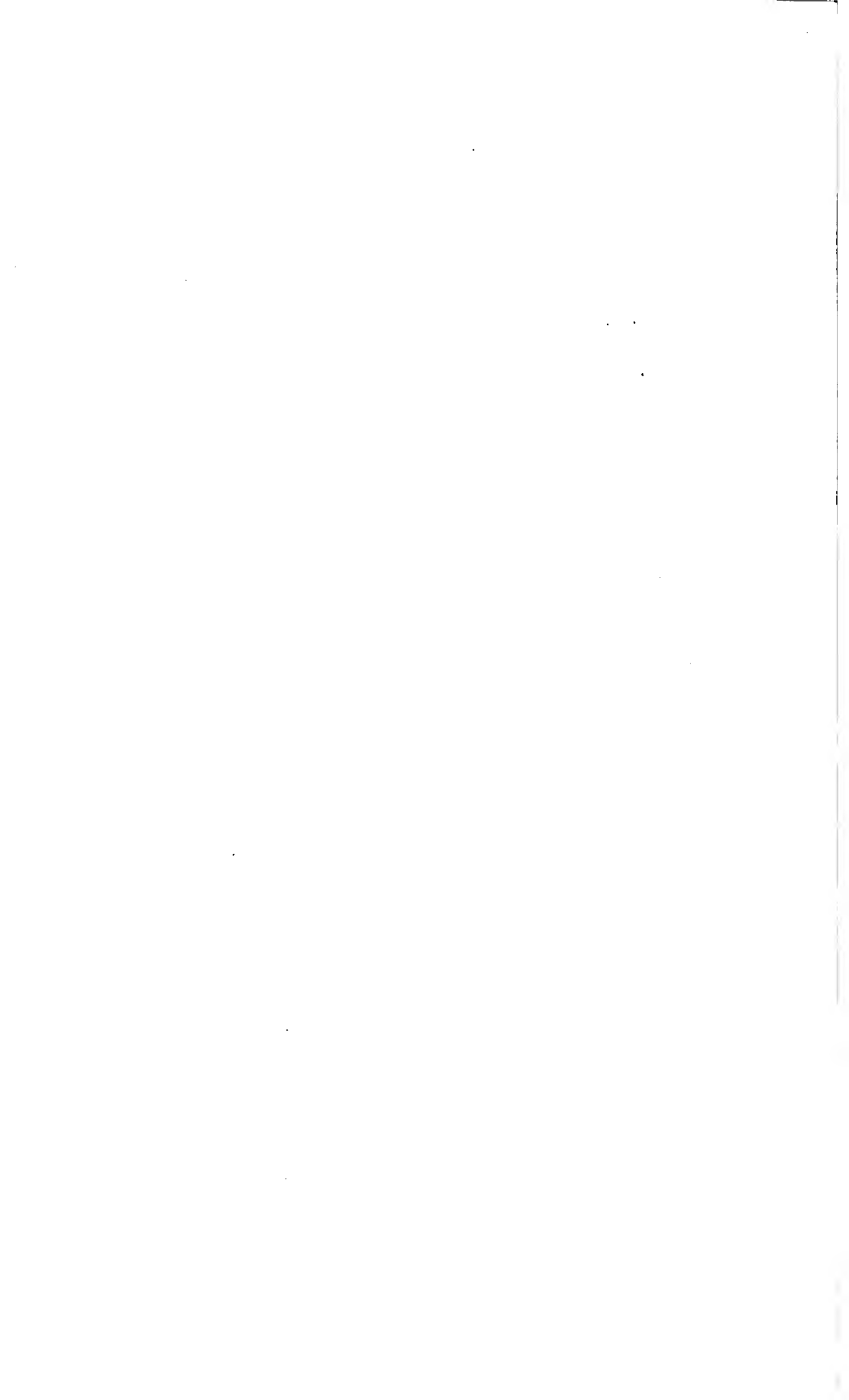
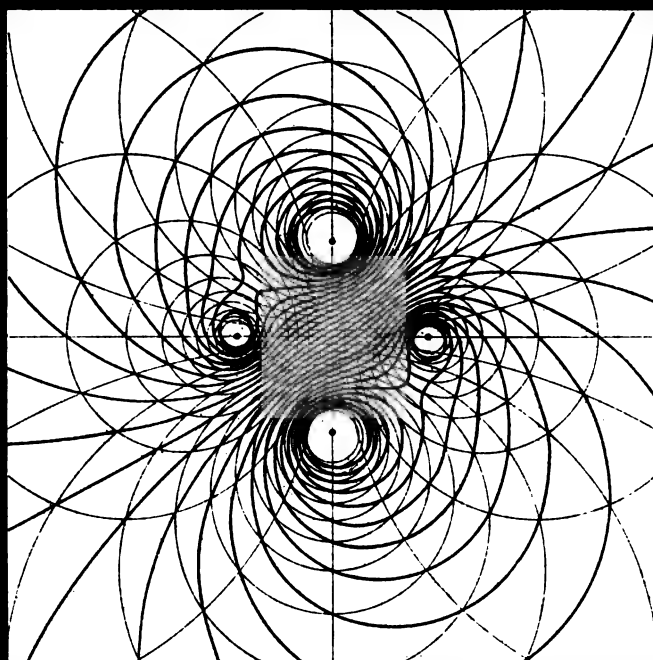
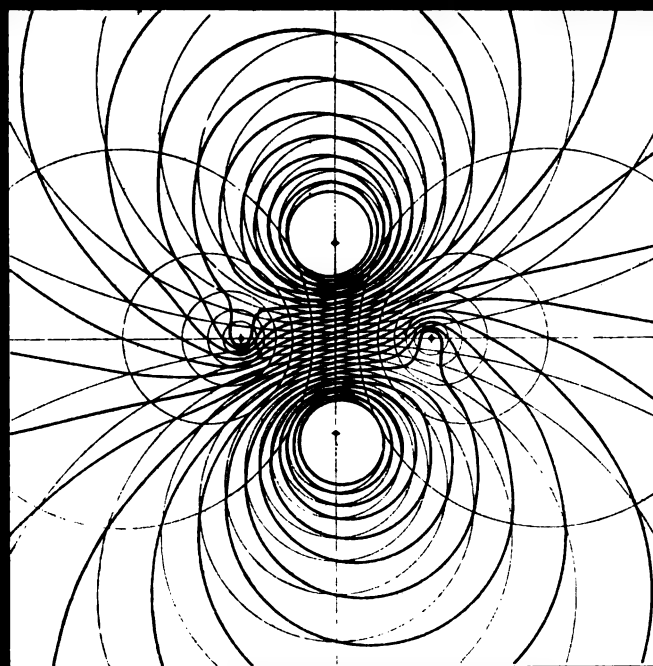


Fig.



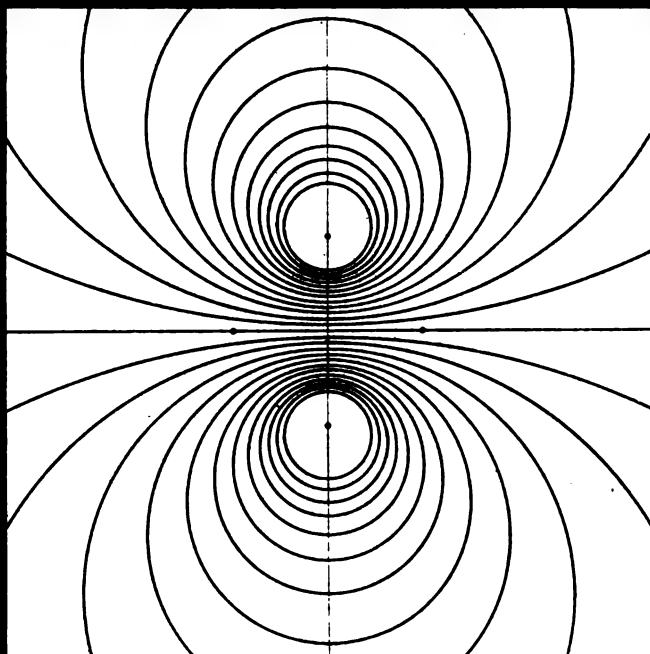
13.

Fig.



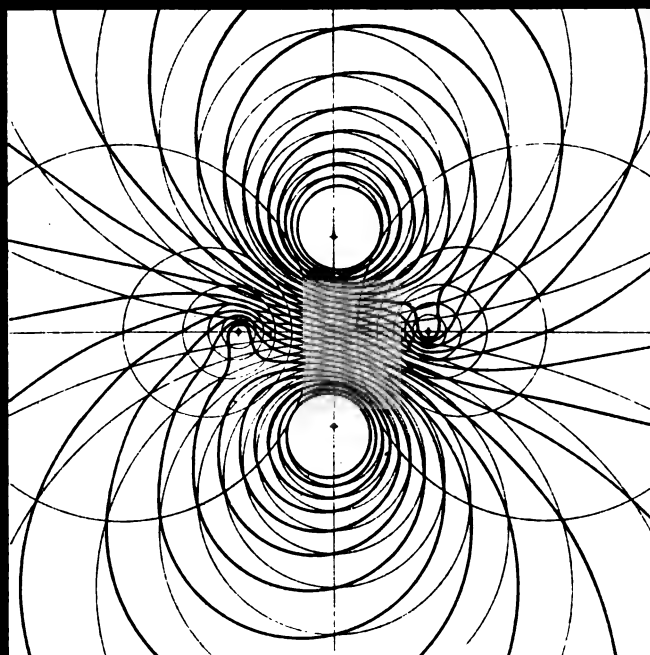
14.

Fig.



15.

Fig.



16.

Zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten Mercur

von

Dr. Eduard Frh. v. Haerdtl,

Professor an der k. k. Universität in Innsbruck.

Durch die grossartige Thätigkeit Le Verrier's besitzen wir heute von allen grossen Planeten Tafeln, welche die Bewegung derselben mit einer Genauigkeit darstellen, die kaum etwas zu wünschen übrig lässt.

Während für alle grossen Planeten diese Tafeln ausschliesslich auf das allgemeine Attractionsgesetz basirt erscheinen, sah sich Le Verrier bei Herstellung der Mercurstafeln, um die erforderliche Genauigkeit in der Darstellung der Beobachtungen dieses Planeten zu erreichen, gezwungen, ein empirisches Glied zu Hilfe zu nehmen. Diese empirische Correction bezieht sich ausschliesslich auf die Bewegung des Perihels der Mercurbahn, und zwar erscheint die säculare Bewegung dieses Elements um $38''$ grösser angenommen, als jener Werth, welchen die Theorie mit den von Le Verrier adoptirten Werthen der Massen der Planeten für diese Grösse finden lässt.

Die Astronomen haben mühevollen Arbeiten nicht gescheut, diese Unvollkommenheit in der Mercurstheorie zu beseitigen. Die Rechnungen Le Verrier's sind revidirt und auf die neuesten Beobachtungen ausgedehnt worden, aber nur mit dem Erfolge, die Resultate des berühmten Astronomen zu bestätigen.

Le Verrier selbst hat schon den Versuch unternommen, mit Zuhilfenahme einer Hypothese den Widerspruch zwischen

Theorie und Beobachtungen zu lösen, und zwar suchte er die anormale Bewegung des Perihels durch die Einwirkung eines oder einer Gruppe von kleinen Planeten zwischen Mercur und der Sonne zu erklären. Die Frage, ob solche Planeten wirklich existiren, beschäftigte lange Zeit hindurch die Astronomen in intensivster Weise, doch hat das eifrigste Nachforschen nach solchen Körpern bis heute noch zu keinem Resultate geführt.

Diese zuerst von Le Verrier ausgesprochene Hypothese eines intramercuriellen störenden Körpers hat mehrfache Modificationen erfahren, indem man an die Stelle eines Planeten mehrere kleinere Planetoiden treten liess oder beziehungsweise einen Ring sehr kleiner Körper. Diese Hypothesen bilden den Gegenstand einer sehr hübschen Arbeit Bauschinger's. Ich glaube mich hier mit einem Hinweis darauf begnügen zu können (Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Mercur, München 1884).

Wenngleich zugegeben werden muss, dass die Hypothesen eines oder mehrerer intramercurieller Planeten oder eines Planetoidenringes gewiss zu keiner offenbaren Unwahrscheinlichkeit oder Unmöglichkeit führen, so scheinen mir doch zu viele gewichtige Gründe gegen diese Hypothesen zu sprechen. Ich will hier aber auf diese Gründe nicht näher eingehen, denn in der erwähnten Arbeit Bauschinger's findet sich das Für und Wider, welches sich gegen jede dieser einzelnen Hypothesen vom theoretischen Standpunkte sagen lässt, in einer so vollständigen Weise zusammengestellt, dass ich diesen Bemerkungen nichts Neues beizufügen hätte. Was sich aber vom Standpunkte der Beobachtung noch ausserdem gegen diese Hypothesen anführen lässt, hat wieder von Newcomb in seiner »Populären Astronomie« eingehende Behandlung gefunden.

Es ist mir nicht recht erklärlich, aber es ist Thatsache, dass in allen Arbeiten, welche sich auf die Bewegung des Mercurperihels beziehen, einer Hypothese nicht einmal Erwähnung geschieht, die auf den ersten Blick die anormale Bewegung des Mercurperihels in ungezwungenster Weise zu erklären scheint. Wenngleich wir in der Folge sehen werden, dass sich gegen diese Hypothese auch ein gewichtiger Ein-

wand erheben lässt, so scheint es mir doch nicht gerechtfertigt, dass man dieselbe bisher ganz unberücksichtigt liess. Ich vermute, dass man an die folgende Hypothese überhaupt nicht gedacht habe, und dass es sich einzig daraus erklärt, dass man nicht zusah, wie sich denn die Verhältnisse bei näherem Eingehen auf diese Hypothese gestalten.

Die Hypothese, auf deren nähere Untersuchung wir im Folgenden eingehen wollen, lässt sich in vier Worte zusammenfassen: Mercur habe einen Satelliten.

Bezeichnet man mit M, m, m' die Massen beziehungsweise der Sonne, des Mercur und des hypothetischen Satelliten, mit μ die Summe dieser drei Massen

$$\mu = M + m + m',$$

so gelten die folgenden drei Differentialgleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes des Mercursystems

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dz}.$$

Nehmen wir an, dass die Entfernungen des Satelliten und des Mercur zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt klein seien im Verhältniss zur Entfernung des Mercur von der Sonne, so lässt sich Ω nach Potenzen der Verhältnisse $\frac{\rho}{R}$ und $\frac{\rho'}{R}$ entwickeln. Die Entwicklung wollen wir einstweilen nur so schreiben:

$$\Omega = \frac{1}{R} + \Omega'.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes stellt uns jenes Glied vor, von welchem die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes unter der Annahme abhängt, dass die Massen des Planeten, wie des Satelliten in demselben vereint seien. Ω' hingegen liefert uns die Variationen der Mercurselemente, welche aus der Anwesenheit eines Satelliten resultiren würden.

Bezeichnet man mit a, a' die grossen Halbaxen der Mercurbahn und der Satellitenbahn, mit e, e' die Excentricitäten, mit l, l' die mittleren Längen, mit $\bar{\omega}, \bar{\omega}'$ die Perihellängen, endlich mit γ

die Neigung der Satellitenbahn, so liefert die Entwicklung von Ω' bekanntlich den folgenden Ausdruck:¹

$$\begin{aligned}\Omega' = & + \frac{mm'}{(m+m')^2} \frac{a'^2}{a^3} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \dots \right. \\ & + \frac{3}{4} \cos(2l' - 2l) \\ & \left. + \dots \dots \dots \right\}.\end{aligned}$$

In der ganzen Entwicklung von Ω' , wenn wir dieselbe hingeschrieben denken, kommt kein Glied vor, welches $\bar{\omega}'$ allein enthält. Wir schliessen demnach sofort, dass aus der Anwesenheit eines Satelliten keine säculare Variation der Excentricität der Mercursbahn resultiren kann. Dieses Resultat scheint mir desshalb erwähnenswerth, da der Versuch Le Verrier's, eine etwaige säculare Verbesserung dieser Excentricität empirisch aus dem Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie zu ermitteln, welche Bestimmung auch scheinbar befriedigend ausfiel, doch zu solchen Consequenzen führte, dass Le Verrier schliesslich es für besser hielt, von den hiefür erhaltenen Werth lieber keinen Gebrauch zu machen.

Aber die Variation des Perihels des Mercur enthält ein säculares Glied, welches durch den Ausdruck dargestellt erscheint:

$$\begin{aligned}e \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{f_{\mu}^{\mu}}{na^2} \sqrt{1-e^2} \frac{d\Omega'}{de} = \\ &= + \frac{3}{4} \frac{mm'}{(m+m')^2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 e \sqrt{1-e^2} . n\end{aligned}$$

und die Integration dieses Ausdruckes liefert sofort

$$\delta\bar{\omega} = \frac{3}{4} \frac{mm'}{(m+m')^2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sqrt{1-e^2} . nt.$$

¹ Le Verrier: Annales de l'Observatoire de Paris, t. IV, p. 45.

Setzen wir

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\varphi}{2},$$

so geht das säculare Glied in Ω' , welches $\sin^2 \frac{\gamma}{2}$ enthält, über in

$$-\frac{3}{8} \frac{mm'}{(m+m')^2} \frac{a'^2}{a^3} \varphi^2$$

und hiemit findet sich für die säculare Variation des Knotens der Mercursbahn der Ausdruck

$$\delta\theta = -\frac{3}{4} \frac{mm'}{(m+m')^2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 nt.$$

Aus dem Vergleiche dieses Ausdruckes mit dem von $\delta\bar{\omega}$ ergibt sich sofort, dass aus der Anwesenheit eines Satelliten eine säculare Bewegung des Knotens resultiren müsse, welche der Grösse nach gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt der säcularen Bewegung des Perihels wäre. Wir werden auf diesen Punkt erst weiter unten näher eingehen.

Nach den früheren Bemerkungen beträgt die jährliche Variation des Perihels, welche durch die Wirkung des Satelliten zu erklären wäre, $+0.38$. Nimmt man aber auf jene Werthe der Massen Rücksicht, welche nach dem Stande der heutigen Forschung als die wahrscheinlichsten bezeichnet werden müssen, so erhebt sich der Werth der Perihelsbewegung auf $+0.43$. Wir wollen diesen letzten Werth den nachfolgenden Ausführungen zu Grunde legen, da bei Annahme dieses Werthes sich die Verhältnisse durchwegs ungünstiger gestalten, als bei Zugrundelegung des kleineren Werthes.

Substituiren wir nun für die Mercurselemente sofort die bekannten numerischen Werthe und vernachlässigen gleich im obigen Ausdrucke für $\delta\bar{\omega}$ die Masse des Satelliten gegen die Masse des Mercur, da dieselbe ja jedenfalls nur Bruchtheile der ersteren betragen kann, so geht der obige Ausdruck in die folgende Gleichung über:

$$+0.43 = +394500 \cdot \left(\frac{m'}{m}\right) \left(\frac{a'}{a}\right)^2$$

oder

$$+0.0000001089 = \left(\frac{m'}{m}\right)\left(\frac{a'}{a}\right)^2.$$

Wie man sieht, stehen rechts zwei Unbekannte, erstlich nämlich das Verhältniss der Satellitenmasse zur Masse des Mercur, zweitens das Verhältniss der grossen Halbaxe der Satellitenbahn zur grossen Halbaxe der Mercursbahn.

Macht man also über eine der Grössen eine beliebige Annahme, so gestattet uns diese Gleichung, sofort die andere Unbekannte zu bestimmen.

Nehmen wir an — ein Fall, der sich ja in der Wirklichkeit thatsächlich vorfindet, und zwar zwischen Mond und Erde — dass das Verhältniss der Satellitenmasse zur Masse des Planeten Mercur $\frac{1}{80}$ betrage, so folgt sofort aus obiger Gleichung:

$$\frac{a'}{a} = +0.00295.$$

Das analoge Verhältniss $\left(\frac{a'}{a}\right)$ zwischen Mond und Erde beträgt bekanntlich $+0.00256$. Man sieht, der obigen Gleichung kann man durch Annahmen genügen, die vollkommen plausibel sind und für die Analoga in unserem Planetensystem schon vorhanden sind.

Nach Le Verrier beträgt die jährliche analoge Variation des Erdperihels, also die durch den Mond auf die Erde ausgeübte säculare Störung des Erdperihels

$$\delta\bar{\omega} = +0.0698 \text{ } t.$$

Dieselbe ist viel kleiner als die Variation des Mercurperihels, was sich einerseits daraus erklärt, dass der Werth von $\left(\frac{a'}{a}\right)^2$ sich ja in beiden Fällen nicht völlig deckt, anderseits aber auch daraus, dass auf der rechten Seite der Factor n , also die mittlere Bewegung des Planeten selbst, vorkommt. Dieselbe ist ja für Mercur $n = 14732''$, für die Erde nur $n = 3548''$.

Wir schliessen sofort daraus, dass für Mars und Jupiter, caeteris paribus, der Einfluss der Satelliten auf die Perihelsbewegung dieser Planeten noch kleiner sein müsse.

Ich habe das obige numerische Beispiel nur herausgegriffen, um zu zeigen, dass unsere Hypothese gewiss nicht so viel Unwahrscheinliches an sich habe, dass es gerechtfertigt erscheint, dieselbe rundweg abzulehnen. Übrigens leisten mehrere Annahmen nahezu dasselbe, wie die obige. Um einen Überblick hierüber zu ermöglichen, habe ich das folgende Täfelchen gerechnet.

Unter nachfolgenden Annahmen über das Verhältniss der Masse des Satelliten zur Masse des Mercur, welche sich in der ersten Verticalreihe angegeben finden, resultiren jene Werthe von a' , also die zugehörigen Werthe der grossen Halbaxe der Satellitenbahn, die sich in der zweiten Verticalreihe wiedergegeben finden.

In der letzten Verticalreihe theile ich endlich noch die entsprechenden Umlaufszeiten mit.

$\frac{m'}{m}$	$\log a'$ (astr. Einheiten)	a' (in Einheiten des aeq. Durchmessers des Mercur)	T (in Tagen)
1 : 50	6·956	28	23
1 : 80	7·058	35	33
1 : 100	7·106	40	39
1 : 150	7·194	49	53
1 : 200	7·257	56	66

Hätten wir für die jährliche Bewegung den kleineren Werth Le Verrier's statt des Werthes $+0\cdot43$ zu Grunde gelegt, so könnte man noch die Masse des Satelliten kleiner annehmen, als es hier zulässig erscheint.

Greift man nun auf die früher gegebene Entwicklung von Ω' zurück, so lässt eine kurze Rechnung uns sofort finden, dass bei Zugrundelegung auch des grösstmöglichen Werthes für die Masse des Satelliten, alle Ungleichheiten, welche aus den periodischen Gliedern der Function Ω' resultiren würden, nur verschwindende Coëfficienten erreichen können.

Wie wir schon bemerkten, bedingt die Anwesenheit eines Satelliten eine säculare Bewegung der Knotenlänge, welche jener der Perihelslänge an Grösse nicht nachsteht.

Derselben scheinbaren Schwierigkeit begegnet man aber auch dann, wenn man, von der Hypothese Le Verrier's oder einer dieser ähnlichen Hypothese ausgehend, die anormale Perihelsbewegung des Mercur zu erklären versucht, denn sofern man nicht die Lage der Bahn des einzelnen Planeten oder der Planetengruppe oder des Planetoidenringes mit der Lage der Mercursbahn nahe zusammenfallend annimmt, resultirt auch hier ein sehr merkbarer Betrag für die Änderung dieses Elements. Es genügt wohl, hier diesen Umstand erwähnt zu haben.

Man könnte sofort, das Nichtvorhandensein einer Anomalie in der Bewegung des Knotens der Mercursbahn als feststehende Thatsache ansehend, zur Erklärung dieses Umstandes, welcher mit unserer Hypothese in Widerspruch zu stehen scheint, eine weitere Hypothese heranziehen, nämlich die Annahme, dass die Neigung der Bahn des Satelliten verschwindend sei. Unter dieser Annahme wird $\sin \frac{\gamma}{2} = 0$, es verschwindet also das säculare Glied mit der Neigung als Factor in Ω' , mithin wird auch $\varpi\theta = 0$.

Obwohl es sich nicht verkennen lässt, dass eine solche Annahme hier absolut nicht so viel Bedenkliches an sich trägt wie die analoge Annahme im Falle der intramercuriellen Planeten, will ich diese Annahme hier aber gar nicht ernstlich in Erwägung ziehen, denn es scheint mir, dass kein zwingender Grund besteht, der ersten Hypothese gleich mit einer zweiten zu Hilfe zu kommen.

Die diesbezügliche Frage, welche ich hier noch in Kürze behandeln will, möchte ich so formuliren: Ist es zulässig, eine Knotenbewegung der Mercursbahn ungefähr von derselben Grösse wie die Perihelsbewegung anzunehmen? Oder auch: Begegnet man bei Zugrundelegung des Beobachtungsmaterials, welches Le Verrier der Ermittlung der Constanten der Mercursbahn zu Grunde gelegt hat, schon derartigen Schwierigkeiten, dass man mit voller Berechtigung behaupten könne, die Beob-

achtungen liessen die Annahme einer derartigen Bewegung überhaupt nicht zu?

An mehreren Orten habe ich die Behauptung aufgestellt gefunden, dass die Untersuchungen Le Verrier's evident bewiesen, dass keine Abweichung zwischen dem theoretischen und beobachteten Werthe der Knotenbewegung der Mercursbahn vorhanden sei. So genau ich die schönen Arbeiten Le Verrier's auch durchgesehen habe, so habe ich trotzdem nirgends von Le Verrier selbst eine derartige Behauptung ausgesprochen gefunden. Und wie wir gleich sehen werden, sprechen viele Umstände dagegen, dass Le Verrier auch diese Ansicht überhaupt habe aussprechen können. Im Gegentheil, Le Verrier macht selbst ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die Bestimmung der Knotenlänge sehr unsicher sei. Während z. B. sämmtliche Meridianbeobachtungen für die Knotenlänge die Correction $\delta\theta = +12''.4$ ergeben, zeigt es sich, dass den Bedingungsgleichungen, welche Le Verrier aus den Mercursdurchgängen abgeleitet hatte, besser genügt werde, wenn man für $\delta\theta$ einen negativen Werth annimmt. Le Verrier bemerkt hiez zu noch (p. 92): »N'ayant aucune raison de choisir entre ces deux quantités, nous accepterons la valeur moyenne $\delta\theta = +5''.5$.

Die Behauptung also, dass eine grössere Bewegung des Knotens ausgeschlossen erscheine, ist demnach nicht auf Le Verrier zurückzuführen und dieser Umstand allein vermindert schon wesentlich das Gewicht derselben.

Nehmen wir für die jährliche Änderung des Knotens denselben Werth an, wie für die jährliche Änderung des Perihels, also $\delta\theta = -0''.43$ *t*, so resultiren für die folgenden Jahre, 1697, 1723... bis 1848, also jene Jahre, in welchen die Mercursdurchgänge beobachtet wurden und welche allein zur Verbesserung der Elemente dieses Planeten von Le Verrier herangezogen erscheinen, die folgenden Variationen der Position des Knotens, welche wir mit $\delta\theta$ bezeichnen und in der zweiten Verticalreihe ansetzen wollen.

Datum	$\delta\theta$		E
1697	+65·9	+0·032 80	+2·1
1723	+54·6	+0·012 80	+0·7
1736	+49·0	$\left\{ \begin{array}{l} +0·045 \text{ 80 } \\ -0·052 \text{ 80 } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} +2·2 \\ -2·5 \end{array} \right.$
1743	+46·0	$\left\{ \begin{array}{l} -0·039 \text{ 80 } \\ +0·024 \text{ 80 } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -1·8 \\ +1·1 \end{array} \right.$
1753	+41·7	-0·033 80	-1·4
1769	+34·8	+0·018 80	+0·6
1782	+29·2	$\left\{ \begin{array}{l} +0·055 \text{ 80 } \\ -0·056 \text{ 80 } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} +1·6 \\ -1·6 \end{array} \right.$
1786	+27·5	$\left\{ \begin{array}{l} -0·085 \text{ 80 } \\ +0·057 \text{ 80 } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -2·3 \\ +1·6 \end{array} \right.$
1789	+26·2	$\left\{ \begin{array}{l} -0·033 \text{ 80 } \\ +0·018 \text{ 80 } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0·9 \\ +0·5 \end{array} \right.$
1799	+21·9	$\left\{ \begin{array}{l} +0·020 \text{ 80 } \\ -0·052 \text{ 80 } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} +0·4 \\ -1·1 \end{array} \right.$
1802	+20·6	-0·012 80	-0·2
1832	+ 7·7	$\left\{ \begin{array}{l} -0·065 \text{ 80 } \\ +0·034 \text{ 80 } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0·5 \\ +0·3 \end{array} \right.$
1845	+ 2·2	+0·041 80	+0·1
1848	+ 0·9	+0·001 80	0·0

Die Zahlen der dritten Verticalreihe habe ich den Untersuchungen Le Verrier's entnommen, und zwar der Zusammenstellung der Bedingungsgleichungen, welche Le Verrier aus der Discussion der Beobachtungen der Mercursdurchgänge abgeleitet hat (S. 80, Bd. V).

Multipliziert man die Zahlen dieser dritten Zeile mit den nebenanstehenden Zahlen linker Hand, so resultiren die Zahlen E , die wir in der vierten Verticalreihe angesetzt haben. Ein Blick auf diese Werthe genügt, um uns davon zu belehren, welch' ausserordentlich geringen Einfluss sogar sehr starke Variationen der Knotenlänge hier nur ausüben.

Die E -Werthe übersteigen nur in wenigen Fällen jene Fehler, welche in den Bedingungsgleichungen übrig bleiben

wenn man in demselben die von Le Verrier schliesslich adoptirten Verbesserungen der Constanten der Mercursbahn zurückschleibt. Wie mir eine vorläufige Rechnung gezeigt hat, lassen sich diese Fehler aber durch ganz geringfügige Variation der 14 Unbekannten, welche in den aus den Mercursdurchgängen abgeleiteten Bedingungsgleichungen vorkommen, noch sehr wesentlich herabdrücken.

Ich will hier auf diese Rechnung nicht näher eingehen, denn ich glaube, die wenigen Zahlen, die ich hier mitgetheilt habe, beweisen zur Genüge, dass das Beobachtungsmaterial, welches Le Verrier, so weit es die Mercursdurchgänge anlangt, herangezogen hat und heranziehen konnte, keineswegs die Behauptung stützt, dass eine der Perihelsbewegung adäquate Änderung des Knotens, als ausgeschlossen zu betrachten sei.

Zu ganz demselben Resultate haben mich meine provisoischen, die Meridianbeobachtungen betreffenden Rechnungen geführt, aus welchen Le Verrier 195 Bedingungsgleichungen aufgestellt hat, die die Form haben:

$$c_1 \delta\varphi + c_2 \delta\theta \pm C = 0.$$

Für die Meridianbeobachtungen, welche die Jahre 1801 bis 1842 umfassen, ist das Maximum von $\delta\theta$ rund $20''$. Wirft man aber einen Blick auf die Bedingungsgleichungen (S. 89, Bd. V), so sieht man, dass im Mittel die Coëfficienten c_2 rund ± 0.05 betragen. Wir schliessen sofort, dass hier der Einfluss einer Correction der Knotenlänge demnach auch nicht über $1''$ steigen könne.

In vielen der untersuchten Fälle zeigte mir die Rechnung, dass bei Annahme eines der Zeit proportionalen Gliedes in dem Ausdrucke der Knotenlänge sich sogar die Darstellung der Beobachtungen besserte. In keinem einzigen Falle, obwohl ich gerade die Bedingungsgleichungen, in welchen c_2 möglichst gross war, heranzog, stieg der Fehler auf einen solchen Betrag, dass die Annahme eines der Zeit proportionalen Gliedes in θ als unzulässig bezeichnet werden könnte.

Die wenigen Bemerkungen, die ich zu dieser Frage hier mittheilte, beweisen zur Genüge, dass man bei Zugrundelegung des Beobachtungsmateriales, welches Le Verrier der Ermitt-

lung der Constanten der Merkursbahn zu Grunde legte, mit der Annahme einer der Perihelsbewegung adäquaten Bewegung des Knotens keineswegs auf derartige Schwierigkeiten stösst, dass man behaupten darf, die Beobachtungen schliessen eine derartige Annahme überhaupt aus. Ob bei Heranziehung des seither angewachsenen Beobachtungsmateriales sich nicht die Verhältnisse ungünstiger gestalten, lässt sich natürlich ohne eingehende Untersuchung nicht beurtheilen. Eine derartige Untersuchung liegt in meiner Absicht.

Vom theoretischen Standpunkte scheint sich mir, wie aus den vorstehenden Bemerkungen erhellt, wohl kein Argument deduciren zu lassen, das die Hypothese eines Mercursatelliten als unhaltbar erscheinen liesse. Wohl erübrigt es noch zu untersuchen, ob die aus der Anwesenheit eines Satelliten resultirenden periodischen Störungen kurzer Dauer nicht mit den Beobachtungen in Widerspruch gerathen. Diese Störung ist jedoch so geringfügig, dass es sehr eingehender Untersuchungen bedürfte, um hierüber ein Urtheil gewinnen zu können.

Vom Standpunkte der Beobachtung lässt sich aber gegen diese Hypothese ein sehr gewichtiger Einwand vorbringen, dem ich hier noch Platz geben will.

Die Existenz eines Satelliten ist bekanntlich nur dann möglich, wenn die Massen und Entfernungen des Satelliten wie des Planeten der Gleichung genügen:

$$\frac{m+m'}{r'^2} > \left(\frac{1}{r+r'}\right)^2 - \frac{1}{r^2}.$$

Mit Berücksichtigung einiger Vernachlässigungen, die wohl keiner näheren Rechtfertigung bedürfen, lässt sich diese Ungleichheit auf die folgende zurückführen:

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 < \frac{m}{2}.$$

Nehmen wir nun die Masse des Mercur zu 1 : 5,500.000 an, so wird erst

$$\frac{r}{r'} > 220,$$

und die Substitution dieses Werthes in die Bedingungs-
gleichung für die Perihelsbewegung ergibt für das Verhältniss
der Massen die Bedingung

$$\frac{m'}{m} > 0.005.$$

Unter der Annahme, dass die Dichte des Satelliten gleich
der Dichte des Merkurs sei, müssen die Oberflächen derselben
Bedingung genügen und man ist sofort in der Lage, auch die
Grössenklasse des Satelliten zu bestimmen. Legt man aber auch
andere Annahmen über das Dichtenverhältniss zu Grunde, man
gelangt durchwegs zu analogen Resultaten, dass nämlich der
Satellit so hell wäre, dass es als nicht wahrscheinlich bezeichnet
werden muss, dass der hypothetische Satellit bis heute sich der
Beobachtung habe entziehen können. Um die Grössenklasse des
Satelliten wesentlich unter die fünfte herabzudrücken, müsste
man schon zu Annahmen greifen, die nicht mehr den Charakter
der Ungezwungenheit an sich tragen.

Wohl könnte man durch die Annahme mehrerer Satelliten,
durch entsprechend veränderte Annahme über die Masse des
Merkurs, welche Constante ja heute noch keineswegs als voll-
kommen verbürgt angesehen werden kann, endlich durch eine
Zugrundelegung eines etwas kleineren Werthes für die Diffe-
renz der Perihelsbewegung als jenen, von dem wir Gebrauch
gemacht haben, es erreichen, dass die Sichtbarkeitsbedingungen
merklich ungünstigere würden, doch glaube ich nicht, dass die
Hypothese eines Satelliten durch solche Stützen auf schwanken-
dem Boden an Haltbarkeit gewinne.

Ein Beitrag zur Kenntniss der 26tägigen Periode des Erdmagnetismus

von

J. Liznar.

(Mit 1 Tafel)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

Die Existenz einer fast 26tägigen Periode der erdmagnetischen Kraft dürfte nach den vielfachen darüber angestellten Untersuchungen als vollkommen erwiesen betrachtet werden. Alle Forscher, welche sich mit dieser Frage beschäftigt haben, suchten zunächst die Dauer der Periode zu ermitteln, ohne auf deren weitere Eigenschaften näher einzugehen. Eine periodische Änderung ist aber durch ihre Dauer allein nicht hinreichend charakterisirt, es müssen vielmehr noch die Eintrittszeiten der Extreme, sowie die Grösse der Schwankung in Betracht gezogen werden. Hiezu wäre erforderlich, dass die 26tägige Periode für verschiedene Orte aus gleichzeitigen Beobachtungen abgeleitet werde. Dies ist nur für Wien und Kremsmünster und für die zwei Polarstationen Jan Mayen und Fort Rae geschehen.¹ Man kann aus der graphischen Darstellung der Periode ersehen, dass der Verlauf derselben an den beiden Stationen ein ganz gleichartiger ist. Obwohl sich dieses Resultat zunächst bloß auf jene Änderungen bezieht, welche die tägliche Schwankung im Laufe der 26tägigen Periode zeigt, so ist es kaum zweifelhaft, dass auch die Richtungsänderungen an den beiden Polarstationen in ganz gleicher Weise erfolgen.

¹ Liznar, Über die 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente in hohen magnetischen Breiten. Diese Sitzungsberichte, XCV.

In einer im October-Heft 1893 der meteorologischen Zeitschrift veröffentlichten kleinen Abhandlung habe ich gezeigt, dass die tägliche Periode des Erdmagnetismus eine eigenthümliche Abhängigkeit von der geographischen Breite zeigt, wenn man nämlich die Bewegungen der Magnetnadel, welche sie unter dem Einflusse der die Variationen bedingenden Kraft im Raume ausführt, ins Auge fasst. Es hat sich unter Anderem ein vollkommener Gegensatz zwischen der Bewegung in mittleren und hohen Breiten ergeben, indem in mittleren Breiten die Magnetnadel im Laufe des Tages eine Kegelfläche im Sinne des Uhrzeigers, in hohen Breiten aber gegen denselben, beschreibt. Dieser Unterschied in der Bewegung gab mir Veranlassung, zu untersuchen, ob ein solcher Gegensatz auch bei der 26tägigen Periode anzutreffen sei, und wie sie sich überhaupt in mittleren und hohen Breiten zu gleicher Zeit abspielt.

Obwohl es sehr wünschenswerth gewesen wäre, Beobachtungen von mehreren Orten zu verwenden, wozu ich mich aber aus Mangel an Zeit nicht entschliessen konnte, so glaube ich doch, dass die im Nachfolgenden nur für zwei Orte dargestellte 26tägige Periode genug Interesse bietet, um eine Besprechung derselben zu rechtfertigen. Zur Berechnung der Periode habe ich die gleichzeitigen Beobachtungen von Pawlowsk und der österreichischen Polarstation Jan Mayen verwendet. Die einjährige Beobachtungsreihe der letzteren Station umfasst bloß 12 Sonnenrotationen, ich hätte also eigentlich auch für Pawlowsk die Beobachtungsdaten derselben Zeit in Rechnung ziehen sollen. Um aber die Zahlen der 26tägigen Periode für Pawlowsk genauer zu erhalten, habe ich noch die zwölf nächsten Rotationen hinzugenommen, habe hiebei jedoch die Zählung der Tage an beiden Orten mit dem 8. September 1882 begonnen.

Zur graphischen Darstellung der Periode nach der von mir beschriebenen Methode¹ musste diese Periode sowohl für die Declination, als auch für die Inclination berechnet werden. Nachdem für Pawlowsk die Tagesmittel der Inclination nicht veröffentlicht werden, und ich dieselben für den vorliegenden

¹ Liznar, Eine Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen des Erdmagnetismus. Diese Sitzungsberichte, C.

Zweck nicht eigens berechnen wollte, so habe ich zunächst die 26tägige Periode der Horizontal- und Verticalintensität ermittelt und aus derselben die der Inclination zukommende Periode abgeleitet.

In der nachfolgenden Tabelle findet man unter ΔD , ΔH und ΔV die 26tägige Periode der Declination, Horizontal- und Verticalintensität durch Differenzen gegen das Mittel dargestellt.¹ Unter C_s stehen die Correctionen, welche an die Zahlen wegen der säcularen Änderung angebracht werden müssen und welche aus den Jahresmitteln für 1882 und 1884 berechnet wurden. Nach diesen Mittelwerthen beträgt die säculare Änderung bei der

Declination	Horizontalintensität	Verticalintensität
4'75	0.00080	0.00205

Pawlowsk.

	ΔD	C_s	d	ΔH	C_s	h	ΔV	C_s	v	i
0	0.05	-0.17	-0.12	-3.7	+0.3	-3.4	4.4	+0.7	5.1	0.34
1	-0.20	-0.16	-0.36	-4.6	+0.3	-4.3	1.1	+0.6	1.7	0.32
2	0.22	-0.15	0.07	-1.2	+0.2	-1.0	1.1	+0.6	1.7	0.10
3	0.28	-0.13	0.15	1.7	+0.2	1.9	-0.6	+0.5	-0.1	-0.12
4	0.30	-0.12	0.18	1.9	+0.2	2.1	-1.4	+0.5	-0.9	-0.14
5	0.28	-0.10	0.18	1.1	+0.2	1.3	-0.9	+0.4	-0.5	-0.10
6	0.33	-0.09	0.22	1.6	+0.1	1.7	-1.5	+0.4	-1.1	-0.11
7	0.28	-0.08	0.20	2.3	+0.1	2.4	-1.9	+0.3	-1.6	-0.19
8	0.32	-0.06	0.26	3.4	+0.1	3.5	-0.6	+0.3	-0.3	-0.24
9	0.18	-0.05	0.13	2.8	+0.1	2.9	-1.7	+0.2	-1.5	-0.22
10	0.22	-0.03	0.19	2.6	+0.1	2.7	-1.3	+0.1	-1.2	-0.22
11	0.27	-0.02	0.23	2.4	0.0	2.4	0.6	+0.1	0.7	-0.16
12	-0.15	-0.01	-0.16	-0.7	0.0	-0.7	-2.3	0.0	-2.3	-0.01
13	-0.12	+0.01	-0.11	1.1	0.0	1.1	-2.0	0.0	-2.0	-0.08
14	0.28	+0.02	0.30	0.3	0.0	0.3	-2.1	-0.1	-2.2	-0.07
15	0.41	+0.03	0.44	0.6	-0.1	0.5	-0.7	-0.1	-0.8	-0.05
16	-0.25	+0.05	-0.20	-0.6	-0.1	-0.7	-0.9	-0.2	-1.1	0.02
17	-0.43	+0.06	-0.37	-1.6	-0.1	-1.7	0.6	-0.3	0.3	0.12
18	-0.08	+0.08	0.00	0.8	-0.1	0.7	2.6	-0.3	2.3	0.01
19	-0.33	+0.09	-0.24	-3.9	-0.1	-4.0	-1.0	-0.4	-1.4	0.23
20	-0.02	+0.10	0.08	0.3	-0.2	0.1	2.0	-0.4	1.6	0.03
21	-0.19	+0.12	-0.07	-1.0	-0.2	-1.2	1.8	-0.5	1.3	0.11
22	-0.63	+0.13	-0.50	-4.0	-0.2	-4.2	-1.0	-0.5	-1.5	0.24
23	-0.29	+0.15	-0.14	0.1	-0.2	-0.1	0.4	-0.6	-0.2	0.00
24	-0.21	+0.16	-0.05	1.7	-0.3	1.3	3.1	-0.6	2.5	-0.03
25	-0.48	+0.17	-0.31	-2.3	-0.3	-2.6	2.0	-0.7	1.3	0.20

¹ Bei der Horizontal- und Vertical-Intensität bedeuten die Zahlen Einheiten der 5. Decimale (Mm., Mg., Sec.).

Die Zahlen unter d , h und v stellen demnach die von der säcularen Änderung befreite 26 tägige Periode dar, und unter i ist die aus h und v abgeleitete Periode der Inclination ersichtlich.

Für Jan Mayen sind die Tagesmittel der Inclination publicirt worden, und ich konnte also die 26 tägige Periode dieses Elementes direct ermitteln. Indem ich auch an die Daten dieser Station die früher erwähnte Correction wegen der säcularen Änderung (0'029 bei der Declination und 0'012 bei der Inclination pro Tag) anbrachte, erhielt ich die auf S. 731 unter »Beobachtung« stehenden Zahlen.

Wollte man diese Zahlen graphisch darstellen, so ergäben sich vielfach gebrochene Linien, aus welchen man eine Gesetzmässigkeit der Bewegung kaum entnehmen könnte; die Zahlen mussten daher einer Ausgleichung unterzogen werden. Um bei dieser Operation jede Willkür zu vermeiden, berechnete ich die zwei ersten Glieder der Bessel'schen Formel und erhielt:

$$\begin{array}{l} \text{Pawlowsk} \left\{ \begin{array}{l} y_d = -0.2098 \sin (148.296 + 13.846 x) - \\ \quad -0.0587 \sin (124.837 + 27.692 x) \\ y_i = 0.1779 \sin (139.743 + 13.846 x) \\ \quad + 0.0723 \sin (51.414 + 27.692 x) \end{array} \right. \\ \\ \text{Jan Mayen} \left\{ \begin{array}{l} y_d = -1.0453 \sin (157.378 + 13.846 x) + \\ \quad + 0.3547 \sin (57.373 + 27.692 x) \\ y_i = 0.7602 \sin (145.906 + 13.846 x) \\ \quad - 0.0761 \sin (49.235 + 27.692 x) \end{array} \right. \end{array}$$

wobei y den dem Tage x (vom 8. September gezählt) entsprechenden Werth der Differenz der Declination oder Inclination vorstellt, je nachdem es den Index d oder i trägt. Nach den vorstehenden Formeln habe ich die in den folgenden Tabellen unter d' und i' stehenden Werthe berechnet. Der vollkommen übereinstimmende Gang der für beide Stationen durch Rechnung erhaltenen Zahlen würde allein genügen, um das Vorhandensein einer 26 tägigen Periode ersichtlich zu machen. Auch die Eintrittszeit der Extreme zeigt eine hinreichende Übereinstimmung, wenn man die verhältnissmässig kurze Beobachtungszeit berücksichtigt. Wir sehen aber einen

sehr bedeutenden Unterschied in den Amplituden. Dieselbe beträgt:

	Declination	Inclination
Pawlowsk	0°469	0°413
Jan Mayen	2°212	1°521

Die Amplitude ist demnach nicht nur grösser in Jan Mayen, sondern übereinstimmend auch grösser für die Declination an beiden Orten.

Pawlowsk.

Tag	Beobachtung		Rechnung		$d' \cos J$	$1' = 40 \text{ cm}$	
	d	i	d'	i'		x	y
0	—0°12	0°34	—0°158	0°171	—0°052	—2°1	6°8
1	—0°36	0°32	—0°091	0°150	—0°030	—1°2	6°0
2	0°07	0°10	—0°014	0°108	—0°005	—0°2	4°3
3	0°15	—0°12	0°063	0°048	0°021	0°8	1°9
4	0°18	—0°14	0°133	—0°024	0°044	1°8	—1°0
5	0°18	—0°10	0°186	—0°099	0°061	2°4	—4°0
6	0°22	—0°11	0°219	—0°165	0°072	2°9	—6°6
7	0°20	—0°19	0°229	—0°214	0°076	3°0	—8°6
8	0°26	—0°24	0°220	—0°240	0°073	2°9	—9°6
9	0°13	—0°22	0°195	—0°239	0°064	2°6	—9°6
10	0°19	—0°22	0°162	—0°214	0°053	2°1	—8°6
11	0°25	—0°16	0°126	—0°170	0°042	1°7	—6°8
12	—0°16	—0°01	0°091	—0°115	0°030	1°2	—4°6
13	—0°11	—0°08	0°062	—0°058	0°020	0°8	—2°3
14	0°30	—0°07	0°037	—0°008	0°012	0°5	—0°3
15	0°44	—0°05	0°015	0°030	0°005	0°2	1°2
16	—0°20	0°02	—0°008	0°056	—0°003	—0°1	2°2
17	—0°37	0°12	—0°036	0°068	—0°012	—0°5	2°7
18	0°00	0°01	—0°069	0°074	—0°023	—0°9	3°0
19	—0°24	0°23	—0°109	0°077	—0°036	—1°4	3°1
20	0°08	0°03	—0°152	0°083	—0°050	—2°0	3°3
21	—0°07	0°11	—0°192	0°095	—0°073	—2°5	3°8
22	—0°50	0°24	—0°224	0°115	—0°074	—3°0	4°6
23	—0°14	0°00	—0°240	0°138	—0°079	—3°2	5°5
24	—0°05	—0°03	—0°236	0°160	—0°078	—3°1	6°4
25	—0°31	0°20	—0°208	0°178	—0°069	—2°8	6°9

Jan Mayen.

Tag	Beobachtung		Rechnung		$d' \cos J$	$1' = 10 \text{ cm}$	
	d	i	d'	i'		x	y
0	-0.26	1.01	-0.103	0.368	-0.020	-0.2	3.7
1	1.74	0.14	0.194	0.189	0.037	0.4	1.9
2	-1.71	0.68	0.420	0.011	0.080	0.8	0.1
3	0.90	-0.22	0.565	-0.155	0.107	1.1	-1.5
4	-0.80	-0.48	0.639	-0.302	0.121	1.2	-3.0
5	1.79	-0.59	0.657	-0.427	0.125	1.2	-4.3
6	0.77	-0.39	0.665	-0.529	0.126	1.3	-5.3
7	0.50	-0.98	0.671	-0.608	0.127	1.3	-6.1
8	0.64	-0.48	0.694	-0.664	0.132	1.3	-6.6
9	0.94	-0.86	0.738	-0.693	0.140	1.4	-6.9
10	1.62	-0.92	0.787	-0.694	0.150	1.5	-6.9
11	0.56	-0.55	0.817	-0.662	0.155	1.6	-6.6
12	0.63	-0.42	0.787	-0.592	0.150	1.5	-5.9
13	-0.58	-0.44	0.701	-0.484	0.133	1.3	-4.8
14	-0.88	1.41	0.513	-0.337	0.097	1.0	-3.4
15	0.84	-0.99	0.235	-0.158	0.045	0.4	-1.6
16	1.50	-1.29	-0.113	0.042	-0.021	-0.2	0.4
17	0.74	-0.69	-0.493	0.250	-0.094	-0.9	2.5
18	-1.21	1.33	-0.856	0.448	-0.163	-1.6	4.5
19	-2.86	0.95	-1.154	0.618	-0.215	-2.1	6.2
20	0.08	0.54	-1.342	0.744	-0.255	-2.5	7.4
21	-4.42	2.63	-1.895	0.816	-0.265	-2.6	8.2
22	0.08	1.17	-1.307	0.827	-0.248	-2.5	8.3
23	-1.52	-1.08	-1.095	0.779	-0.208	-2.1	7.8
24	0.18	-0.25	-0.792	0.678	-0.150	-1.5	6.8
25	-0.39	0.80	-0.436	0.536	-0.083	-0.8	5.4

Eine noch bessere Übersicht über den Verlauf der Periode erhalten wir durch die graphische Darstellung derselben. Um die Abscissen zu erhalten, müssen die Werthe d' mit dem Cosinus der Inclination multiplicirt werden. Für Pawlowsk beträgt $J = 70^\circ 44'$ ($\cos J = 0.33$), für Jan Mayen ist $J = 79^\circ 2' 1$ ($\cos J = 0.19$). Um die Curven in entsprechendem Massstab zu erhalten, wurden die unter $d' \cos J$ und i' befindlichen Werthe bei Pawlowsk mit 40, bei Jan Mayen mit 10 multiplicirt, d. h. es wurde der Massstab für die Zeichnung so

gewählt, dass im ersten Falle $l' = 40 \text{ cm}$, im zweiten aber $l' = 10 \text{ cm}$. Diese so berechneten Coordinaten findet man unter der Überschrift x, y auf S. 733 und 734. Der Massstab entspricht bei Pawlowsk einer Entfernung der Zeichnungsfläche vom Schwerpunkte der Magnetnadel $= 1375 \text{ m}$, während er bei Jan Mayen auf ein Viertel reducirt ist und der Distanz $= 344 \text{ m}$ zukommt. Die Verschiedenheit des Massstabes beider Curven hat den Nachtheil, dass man das wirkliche Flächenverhältniss derselben nicht direct ersieht. Da ich die kleine Bewegung in Pawlowsk besser zur Anschauung bringen wollte, musste ein grösserer Massstab gewählt werden, nach welchem aber die Curve für Jan Mayen den Umfang des Formats überschritten hätte, und aus diesem Grunde eine Reduction des Massstabes erheischte. Aus dem unter $\delta' \cos J$ und i' stehenden Zahlen ist übrigens Jedermann in der Lage, die Curven in einem beliebigen Massstabe zu construiren, wenn ihn das wirkliche Flächenverhältniss interessiren sollte; ich habe durch die entworfenen Curven vornehmlich die Form derselben veranschaulichen wollen.

Die beigegebene Tafel enthält die diesen Coordinaten entsprechenden Curven. Wenn man die tägliche Bewegung der Magnetnadel an den beiden Orten graphisch darstellt, so ergeben sich Curven, welche ein gänzlich verschiedenes Aussehen haben. Während die für Pawlowsk erhaltene Curve einer Ellipse nicht unähnlich sieht, deren grössere Axe horizontal liegt, ist umgekehrt bei Jan Mayen die Curve mehr nach der Inclinationsrichtung gestreckt. Bei der 26tägigen Periode ist in der Form der beiden Curven kein wesentlicher Unterschied vorhanden, und die Formen würden vielleicht noch übereinstimmender sein, wenn ein reichhaltigeres Beobachtungsmaterial ihrer Construction zu Grunde gelegt werden könnte. Überraschend ist die vollkommen gleiche Lage der Curven gegen den mittleren magnetischen Meridian. Sieht man von dem kleinen oberen Theile der für Jan Mayen gezeichneten Curve ab, so ergibt sich auch die Richtung der Bewegung für beide Orte gleich, nämlich im Sinne des Uhrzeigers.

Die vorstehenden Darlegungen machen es höchst wahrscheinlich, dass die Bewegung der Magnetnadel wäh-

rend der 26tägigen Periode in mittleren und hohen Breiten eine vollkommen gleichartige ist.

Der ganz gleichartige Verlauf der Periode, sowie die Kleinheit ihrer Amplitude könnten die Vermuthung aufkommen lassen, dass diese periodische Änderung einem directen magnetischen Einflusse zuzuschreiben sei. In diesem Sinne äussert auch H. Wild seine diesbezügliche Ansicht in einer jüngst erschienenen Abhandlung¹ mit folgenden Worten: »Mit einem directen magnetischen Einfluss der Sonne auf die Erde lässt sich weiterhin wieder die von Braun und Hornstein ermittelte, der Dauer der Sonnenrotation entsprechende, circa 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente vereinen, die später mannigfache Bestätigungen erfahren hat. Dass deren Amplitude, die z. B. in Pawlowsk für die Declination nach Müller 0'52 beträgt, nach Liznar mit höherer Breite des Beobachtungsortes zunimmt, stimmt auch generell mit unserer Berechnung, doch weist auch da die relativ viel stärkere Zunahme auf weitere modificirende Umstände hin.«

Würden die im Verlauf der 26tägigen Periode auftretenden Abweichungen von der Mittellage von einer directen magnetischen Einwirkung der Sonne herrühren, so liesse sich die Grösse und Richtung der ablenkenden Kraft in sehr einfacher Weise berechnen. Die Richtung der ablenkenden Kraft, die ihren Sitz in der Sonne haben sollte, müsste dann stets nach der Sonne weisen.

Ich habe diese Berechnung für Pawlowsk durchgeführt und hiezu die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Daten verwendet. Unter D , H , V stehen die durch directe Berechnung der 26tägigen Periode erhaltenen Zahlen, aus denen die auf S. 728 mitgetheilten Differenzen abgeleitet worden sind.

Unter D_1 , H_1 , V_1 habe ich jene Zahlen eingetragen, welche durch eine Ausgleichung nach der Formel $\frac{w_{m-1} + w_m + w_{m+1}}{3}$ erhalten worden sind, wobei w_m den Werth eines der erdmagnetischen Elemente bedeutet, der dem m^{ten} Tage der Periode

¹ Magnetische Wirkung der Gestirne auf der Erde. *Mélanges phys. et chim.*, tome XIII, p. 338.

Pawlowsk.

	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>V</i>	<i>D</i> ₁	<i>H</i> ₁	<i>V</i> ₁
0	0°41'01	1·63752	4·68639	0°40'97	1·63752	4·68615
1	40·77	743	605	40·99	757	606
2	41·20	776	605	41·08	775	599
3	41·28	805	587	41·26	796	590
4	41·31	807	579	41·30	803	583
5	41·31	799	583	41·33	803	580
6	41·37	803	577	41·34	803	577
7	41·33	810	572	41·36	811	578
8	41·39	821	585	41·33	815	577
9	41·26	815	573	41·32	816	578
10	41·32	813	576	41·32	813	581
11	41·38	810	595	41·22	801	579
12	40·97	779	565	41·12	795	576
13	41·02	797	568	41·14	788	566
14	41·43	789	566	41·31	792	571
15	41·57	791	580	41·31	786	574
16	40·93	778	577	41·09	779	583
17	40·76	769	591	40·94	780	593
18	41·13	793	611	40·93	769	592
19	40·89	746	574	41·08	775	596
20	41·21	787	604	41·05	769	593
21	41·06	774	601	40·97	778	593
22	40·63	744	573	40·89	768	587
23	40·99	785	586	40·90	776	591
24	41·08	799	613	40·96	781	600
25	40·82	760	601	40·97	770	617
	0°41'13	1·63786	4·68588	0°41'13	1·63786	4·68588

zukommt. Bezeichnet man die am Fusse der Tabelle stehenden Mittelwerthe mit D_0 , H_0 , V_0 , jene aber, die einem beliebigen Tage der Periode entsprechen, mit D_m , H_m , V_m , so sind die drei Componenten der ablenkenden Kraft gegeben durch die Ausdrücke:

$$x = H_m \cos D_m - H_0 \cos D_0$$

$$y = H_m \sin D_m - H_0 \sin D_0$$

$$z = V_m - V_0$$

Die Componenten x und y wirken in der Ebene des Horizonts, und zwar erstere in der Meridianebene und positiv nach N, letztere senkrecht dazu und positiv nach W. Die Kraft z steht senkrecht gegen den Horizont und ist positiv, wenn sie nach abwärts wirkt. Aus den drei Componenten folgt die ablenkende Kraft $A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Für das Azimut α und die Neigung u derselben gegen den Horizont hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}^1, \quad \operatorname{tg} u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Die folgende Tabelle enthält die Werthe von x , y , z , A , α und u . Die Kraft ist in Einheiten der fünften Decimale des Mm. Mmg. Sec.-Systems ausgedrückt. Die Zählung des Azimuts erfolgt von N über W von 0° — 360° ; die Neigung u hat das positive Vorzeichen, wenn die Kraft unter den Horizont gerichtet ist.

Nachdem sämtliche Zahlen für die 26tägige Periode aus den Tagesmitteln abgeleitet worden sind, also für den Mittag der einzelnen Tage gelten und ausserdem als Mittelwerthe von 24 Sonnenrotationen fast derselben Höhe der Sonne entsprechen, so müsste sich vor Allem der Werth von u stets gleich ergeben, oder er dürfte nur geringe Variationen zeigen. Das Azimut müsste den Werth 180° und 0° aufweisen. Wir sehen, dass die Daten der Tabelle diesen Forderungen nicht entsprechen und müssen daraus schliessen, dass die zur Berechnung der ablenkenden Kraft benützten Formeln auf unrichtigen Voraussetzungen basiren. Wir gelangen somit zu dem Endergebniss, dass auch die verhältnissmässig kleinen Variationen, welche die 26tägige Periode des Erdmagnetismus bilden, nicht von einer directen magnetischen Wirkung der Sonne herrühren können, sondern dass auch sie ihren Grund in einer indirecten Wirkung der Sonne haben müssen.

¹ In der in der meteorologischen Zeitschrift (October-Heft 1893) erschienenen Abhandlung steht infolge eines Druckfehlers $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{z}$.

Tag	x	y	z	A	α	n
0	—34	— 8	27	44	193°2	37°7
1	—29	— 7	18	35	193°6	31°1
2	—11	— 7	11	17	212°5	40°1
3	7	6	2	9	40°6	12°2
4	17	8	— 5	19	25°2	—14°9
5	17	10	— 8	21	30°5	—22°1
6	17	10	—11	23	30°5	—29°1
7	26	11	—10	30	22°9	—19°5
8	29	10	—11	33	19°0	—19°7
9	30	9	—10	33	16°7	—17°7
10	27	9	— 7	29	18°4	—13°8
11	16	4	— 9	19	14°0	—28°6
12	9	0	—12	15	0°0	—53°1
13	2	0	—22	22	0°0	—84°8
14	6	9	—17	20	56°3	—57°5
15	0	9	—14	17	90°0	—57°3
16	— 7	— 2	— 5	9	195°9	—34°5
17	— 6	— 9	5	12	236°3	24°8
18	—17	—10	4	20	210°5	11°5
19	—11	— 3	8	14	195°3	35°0
20	—17	— 4	5	15	193°2	16°0
21	—18	— 8	5	20	204°0	14°2
22	—18	—12	— 1	22	213°7	— 2°6
23	—10	—11	3	15	227°7	11°4
24	— 4	— 8	12	15	243°4	53°5
25	—16	— 8	29	34	206°6	62°9

Wenn man einmal das Wesen dieser indirecten Einwirkung erkannt haben wird, dürfte die Erklärung der bisher so räthselhaften Änderungen kaum grössere Schwierigkeiten darbieten. Da nach den bisherigen Untersuchungen die so ausgesprochen von der Sonne abhängigen Variationen eine directe magnetische Wirkung derselben nicht erkennen lassen, so dürfte es schon aus diesem Grunde schwer fallen, jene kleinen Variationen, welche Leyst für die verschiedene Stellung der Planeten zur Erde aus den Pawlowsker Beobachtungen abgeleitet hat,¹

¹ Über den Magnetismus der Planeten. Repert. f. Met., XVII. Mir ist diese Arbeit noch nicht zugänglich gewesen, ich habe von ihr Kenntniss erhalten durch die oben angeführte Abhandlung von H. Wild.

auf eine magnetische Wirkung dieser Planeten zurückzuführen. Zu dieser Folgerung gelangt auch Wild in seiner früher citirten Abhandlung, und zwar auf einem ganz anderen Wege, als es der ist, den ich hier eingeschlagen habe. Die in früherer Zeit so häufig gehegte Vermuthung, dass die Sonne und möglicherweise auch die Planeten directe magnetische Wirkungen ausüben könnten, hat demnach keine Berechtigung.

Die Erkenntniss, dass alle beobachteten Variationen des Erdmagnetismus auf eine indirecte Wirkung zurückgeführt werden müssen, lässt es umso wünschenswerther erscheinen, dass auch über etwaige Verschiedenheiten der Variationen mit der Entfernung von der Erdoberfläche sorgfältige Beobachtungen angestellt werden. In dieser Beziehung ist noch fast gar nichts geschehen; denn, soviel mir bekannt, existiren aus grösseren Höhen nur die Variationsbeobachtungen der Declination vom Säntis, welche von Dr. F. Maurer und theilweise von Beyer im Herbst und Winter 1884 ausgeführt worden sind.¹ Aber selbst dieses spärliche Beobachtungsmaterial scheint auf eine nicht unbedeutende Verschiedenheit der Variationen in der Höhe gegen jene der Tiefe hinzudeuten. Ein Vergleich der gleichzeitigen Daten vom Säntis und von Wien ergibt für die Höhenstation eine um 0'5 grössere Amplitude, und zwar sowohl im November, als auch im December. Dieser Unterschied würde sich aber höchst wahrscheinlich für die Sommermonate noch grösser ergeben haben.

Um ein richtiges Bild der Variationen in der Höhe zu bekommen, genügt es aber durchaus nicht, nur etwa die Declinationsvariationen zu beobachten, es müssten vielmehr die drei Elemente: Declination, Horizontal- und Verticalintensität wenigstens durch ein volles Jahr regelmässig aufgezeichnet werden. Am einfachsten liesse sich das erforderliche Beobachtungsmaterial durch einen Magnetographen beschaffen, dessen Bedienung mit keinen besonderen Schwierigkeiten verbunden ist und der auch ohne Controle durch absolute Messungen ein zur Ableitung der täglichen Periode geeignetes Material liefern

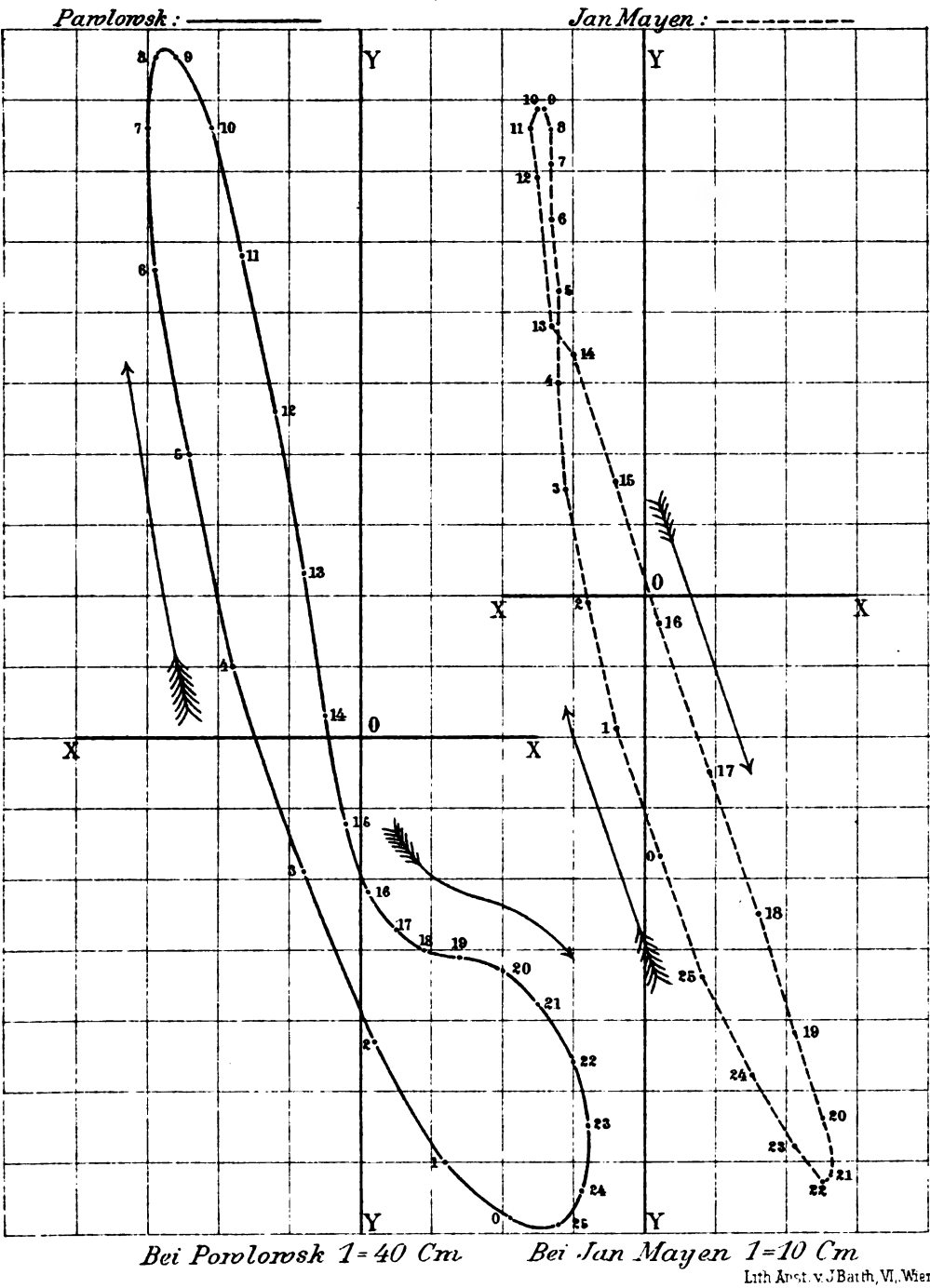
¹ Maurer, Einfluss der Höhe auf die täglichen Variationen der magnetischen Declination. Met. Zeitschr., XX, S. 180.

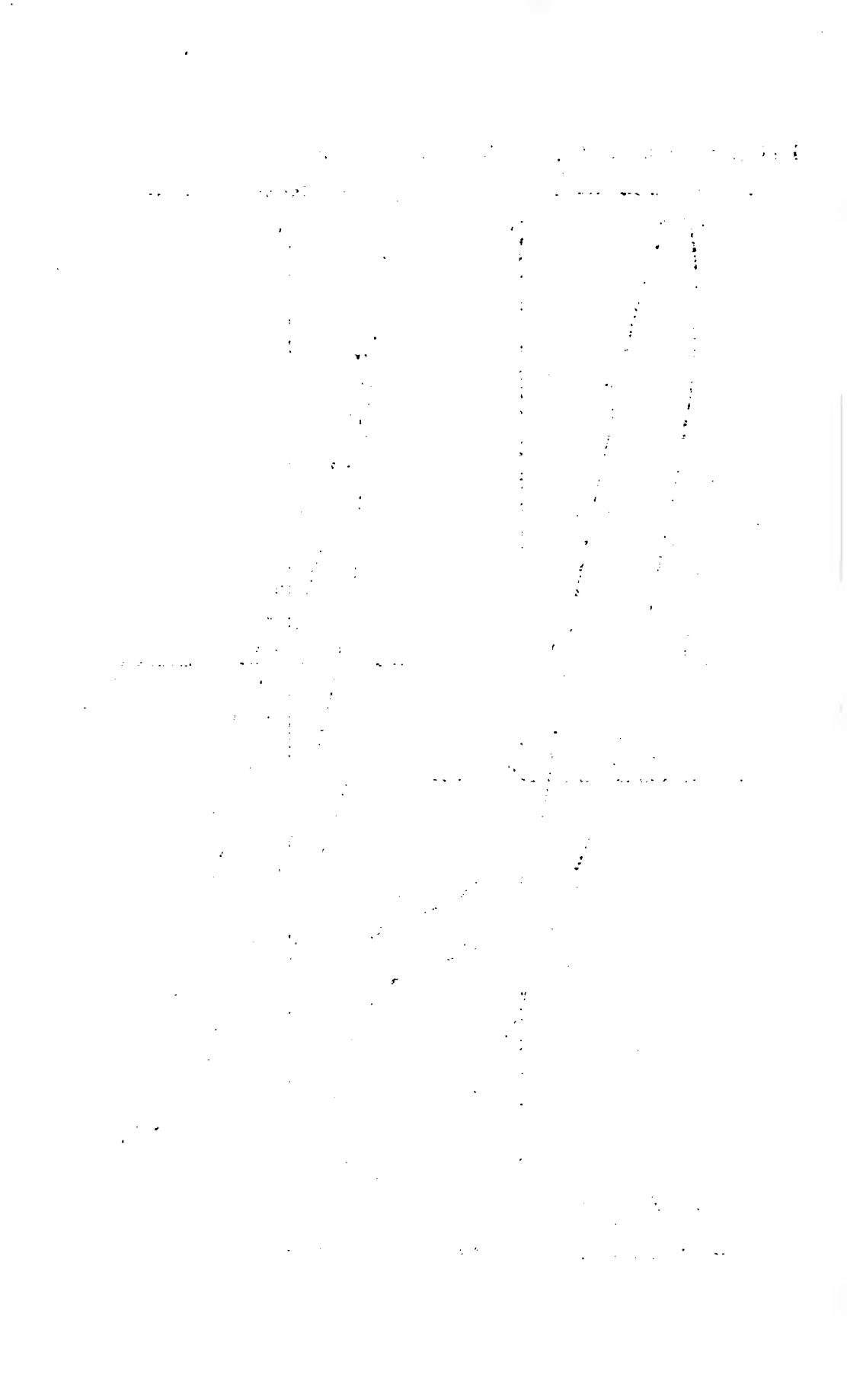
würde. Da meteorologische Observatorien auf Berggipfeln ohnehin bestehen, so kann es sich bei der hier angeregten Frage nur um jene Geldsummen handeln, welche zur Herstellung eines geeigneten Locales zur Unterbringung des Magnetographen und zur Anschaffung des letzteren nöthig sind.

Zur Aufstellung eines Magnetographen scheint mir unser höchstes Bergobservatorium am Sonnblick, dem die meteorologische Wissenschaft so manche Bereicherung verdankt, sehr geeignet zu sein, und es würde sich sehr empfehlen, an diesem Observatorium den ersten derartigen Versuch zu unternehmen. Es ist kaum zweifelhaft, dass, wenn sich hier eine Verschiedenheit der Bewegung der Magnetnadel ergeben sollte, dann auch andere Bergobservatorien dem Beispiele mit Eifer nachfolgen werden, und dass wir dann in nicht sehr langer Zeit ein hinreichendes Material besitzen werden, um uns über die Verschiedenheiten der Variationen ein richtiges Bild verschaffen zu können, während wir heute auf blosse Vermuthungen angewiesen sind, die selbstverständlich nie einer Erklärung der Variationen zur Grundlage dienen können.

Der Umstand, dass sich zur Erhaltung des Observatoriums am Sonnblick ein eigener Verein gebildet hat, der »Sonnblick-Verein«, lässt mich hoffen, dass die von mir gegebene Anregung auch bei diesem Vereine eine entsprechende Würdigung finden werde.

J. Liznar: 26 tägige Periode des Erdmagnetismus





Akustische Untersuchungen über die Elasticität weicher Körper

von

M. v. Smoluchowski.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

I.

Weiche Körper, z. B. Wachs, Paraffin, Kautschuk etc. sind für die Elasticitätstheorie hauptsächlich in zweifacher Hinsicht von Interesse. Erstens nimmt der Elasticitätsmodul derselben mit steigender Temperatur in unverhältnissmässig stärkerem Masse ab, als dies bei anderen Körpern, z. B. Metallen, der Fall ist; zweitens finden sich bei ihnen die grössten Werthe der Elasticitätszahl μ (Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation).

Bezüglich des ersten Punktes liegt bisher nur eine Beobachtung von Stefan¹ vor, welcher, anlässlich einer Untersuchung über die Schallgeschwindigkeit in Stäben von Wachs und Unschlitt, die er nach der im Folgenden beschriebenen Methode ausführte, die grosse Veränderlichkeit derselben — also auch des Elasticitätsmoduls — bemerkte.

Für Wachs ergeben seine Versuche:

Temperatur $\theta = 17^\circ$,	Schallgeschwindigkeit $c' = 880$ m,
» 25	» 630
» 28	» 451

¹ Diese Sitzungsberichte, LVII, 1888.

Für Unschlitt machte er keine näheren Angaben.

Demnach würde sich bei Erhöhung der Temperatur von 17° auf 28° die Schallgeschwindigkeit $\left[= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right]$ fast auf die Hälfte, also der Elasticitätsmodul fast auf ein Viertel verringern, während bei den meisten Metallen die Abnahme des letzteren zwischen 0° und 100° nur circa $2-4\%$ beträgt. Somit scheint hier wegen der Grösse der in Betracht kommenden Änderungen Aussicht vorhanden, jene Erscheinung genauer studiren zu können, als bei den Metallen und eher eine Beziehung zu den übrigen Eigenschaften der Körper finden zu können.

In dieser Hinsicht ist namentlich der Zusammenhang mit der Wärmeausdehnung bemerkenswerth; stellt man den Elasticitätsmodul als eine lineare Function der Temperatur dar

$$E = E_0[1 - \gamma t], \quad (1)$$

so erweist sich nämlich — nach den Beobachtungen von Katzenelsohn¹ und Miller² — die Reihenfolge der Metalle nach γ als identisch mit derjenigen nach den Werthen des Wärmeausdehnungs-Coëfficienten und verkehrt jener der Schmelzpunkte. Auch die eben besprochene Beobachtung bezüglich des Wachses stimmt damit überein, da ja auch der Ausdehnungscoëfficient desselben bei mittlerer Temperatur circa 50—100mal grösser ist als jener Metalle. Dieser Punkt musste also bei einer Untersuchung der Elasticität solcher Stoffe besonders berücksichtigt werden.

Der zweite Punkt, die Grösse der Elasticitätszahl μ , ist namentlich im Hinblick auf die Theorien der Elasticität von Interesse. Bekanntlich fordert die Poisson'sche Moleculartheorie, dass $\mu = 0.25$ sei; dies ist durch zahlreiche Versuche wohl genügend widerlegt worden, so z. B. schon durch die Untersuchungen von Wertheim. Dieser zog aber aus denselben den Schluss, dass $\mu = \frac{1}{3}$ sei; in der That sind seine Zahlen für Messing, Eisen, Glas u. A. nicht weit von diesem Werthe

¹ Berl. In.-Diss., 1887, Winkelmann, Handb. I. S. 242.

² Münch. Ber., 1886, S. 707.

entfernt. Durch neuere genaue Beobachtungen scheint auch diese Hypothese, welche übrigens auch durch keine theoretischen Erwägungen gestützt wird, widerlegt zu sein; so fand z. B. Voigt für Glas $0\cdot208$ — $0\cdot213$, Kirchhoff für Stahl $0\cdot293$ bis $0\cdot295$; nach Katzenelsohn wären einige Zahlen noch kleiner, z. B. Aluminium $0\cdot13$, Platin $0\cdot16$, Gold $0\cdot17$.

Die grössten Abweichungen¹ aber, im entgegengesetzten Sinne, scheinen eben bei solchen weichen Körpern vorzukommen, allerdings sind die Angaben hierüber ziemlich schwankend, z. B. Kautschuk: Röntgen $0\cdot37$ — $0\cdot64$, Pulfrich $0\cdot458$; Amagat $0\cdot500$, Gallerte aus Leim $0\cdot500$ (Maurer), Ebonit $0\cdot389$ (Mallock), Paraffin $0\cdot50$ (Mallock). Auch hierüber waren also weitere Versuche wünschenswerth, umsomehr als, wie weiter unten erwähnt werden wird, diese letzteren Bestimmungen nicht ganz einwandfrei sind. Um nun zur Aufklärung dieser beiden Punkte beizutragen, unternahm ich die Versuche, welche im Folgenden beschrieben sind.

II.

Die Methoden zur Bestimmung der Elasticitätsmoduln sind entweder statische oder dynamische. Für weiche Körper ist die Anwendung der statischen nicht empfehlenswerth, denn gerade bei ihnen ist die elastische Nachwirkung sehr gross, so dass sich je nach der Dauer der Einwirkung sehr verschiedene Moduln ergeben würden; zudem ist der Bereich der elastischen Vollkommenheit so klein, dass es kaum möglich sein dürfte, denselben bei statischen Messungen nicht zu überschreiten. Namentlich bei höherer Temperatur beginnen diese Körper schon unter Einwirkung der Schwerkraft langsam continuirlich zu fliessen, was dann eine directe Bestimmung des E ganz fehlerhaft machen würde, für das μ aber den Werth $0\cdot5$ wie bei Flüssigkeiten ergeben müsste.

Dies ist auch der Einwand, welchen die Anhänger der Poisson'schen Theorie gegen die früher erwähnten Mes-

¹ Nur bei manchen Legirungen kommen auch so grosse Werthe vor, z. B. Messing $0\cdot42$ (Katzenelsohn). (Siehe auch den auf S. 15 angeführten Versuch). Vielleicht theilweise auf Äolotropie zurückzuführen.

sungen, welche auf statischen Methoden beruhen, erheben können.

Demgemäss sind hier die akustischen Methoden am Platze, welche die Schallgeschwindigkeit und hieraus den von der Nachwirkung unabhängigen Modul ergeben; allerdings ist dies nicht der isotherme, sondern der adiabatische Modul, doch ist nach den bisherigen Versuchen der Unterschied beider bei festen Körpern nur gering, und werden sich die Zahlen sehr angenähert auch auf jenen anwenden lassen.

Zur Messung der Schallgeschwindigkeiten stehen uns nur zwei Methoden zu Gebote: die Stefan'sche (l. c.) und jene von Warburg.¹ Erstere bildet eine Erweiterung des von Chladni eingeführten Verfahrens, nach welchem aus der Tonhöhe eines longitudinal schwingenden Stabes die Schallgeschwindigkeit berechnet wird; da nämlich Stäbe aus den besprochenen Materialien durch Reiben nicht zum Tönen gebracht werden können, befestigte Stefan ein Stück eines solchen an einen Holz- oder Glasstab; dies System gab einen Longitudinalton, der von den Schallgeschwindigkeiten beider Stücke abhängt und daher die Berechnung einer derselben ermöglicht, wenn die andere gegeben ist.

Warburg hingegen beobachtete die durch aufgestreuten Sand sichtbar gemachten Knoten bei einem auf einen Glasstreifen in der Mitte aufgesetzten, zusammen mit diesem transversal schwingenden Wachsstreifen; dann gilt die Gleichung

$$\frac{c}{c'} = \frac{l^2}{l'^2} \frac{h'}{h},$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit, l die Abstände der Knoten, h die Dicke des einen Streifens und die gestrichenen Buchstaben die analogen Grössen für den anderen bedeuten.

Obwohl letztere Methode insoweit bequemer ist, als sie bloss Längenmessungen erfordert, zog ich hier die Stefan'sche vor, da diese sich, wie weiter unten erläutert wird, sofort auch auf Torsionsschwingungen anwenden lässt; dies gestattet dann die Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen, somit

¹ Pogg. Ann., CXXXVI.

auch des Torsionsmoduls T , woraus sich dann auch die zweite gewünschte Grösse μ ergibt:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{T} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_L}{c_T} \right)^2 - 1. \quad (2)$$

Offenbar hat diese Art der Bestimmung des μ auch den Vortheil, dass die Versuche zur Messung des E und des T an demselben Stück und unter denselben Bedingungen stattfinden was namentlich in Bezug auf die Constanterhaltung der Temperatur von Wichtigkeit ist. Diese Vortheile theilt sie mit der analogen Methode der Bestimmung des μ aus Longitudinal- und Torsionston bei homogenen Glas- und Metallstäben, welche namentlich von Wertheim und Schneebeil angewendet wurde; ihr Nachtheil ist allen E und T benützenden Methoden gemeinsam: die Berechnung des μ als Differenz zweier Zahlen — wodurch die Genauigkeit verringert wird; dazu kommt noch, dass schon c_L und c_T aus der Abweichung des Tones des Systems von jenem des einen Stabes für sich, also aus einer ziemlich kleinen Grösse, bestimmt wird. Ob nun die Messung von c_L und c_T sich mit solcher Genauigkeit erzielen lässt, dass eine Berechnung des μ möglich ist, konnten nur genaue Versuche entscheiden.

III.

Zur Erläuterung der Theorie der Longitudinalschwingungen von Stäben, die aus zwei Stücken bestehen, möge kurz Folgendes erwähnt werden.

Die Fortpflanzung fortschreitender longitudinaler Wellen in einem aus zwei verschiedenartigen Stücken bestehenden, unendlich langen Stab lässt sich leicht analytisch darstellen, da man sofort die D'Alembert'sche Form der Lösung der Differentialgleichungen für die beiden Stücke anwenden kann. Bedeutet u die Verschiebung, c die Geschwindigkeit in dem von $-\infty$ bis 0 reichendem Stücke, die gestrichenen Buchstaben die analogen Grössen im anderen Stücke, so lauten die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c'^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \quad (3)$$

wobei

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c'^2 = \frac{E'}{\rho'}.$$

Diese werden durch die Lösungen

$$\begin{aligned} u &= f(x+ct) + \varphi(x-ct) & \text{für } -\infty < x < 0 \\ u' &= g(x+c't) + \chi(x-c't) & \text{für } 0 < x < +\infty \end{aligned} \quad (4)$$

befriedigt, wobei die willkürlichen Functionen f und φ für negative Argumente, g und χ für positive, durch Einführung der Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x < 0 \quad u &= U(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= V(x) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x > 0 \quad u' &= U'(x) \\ \frac{\partial u'}{\partial t} &= V'(x) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

in folgender Weise bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{U(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int V(x) dx \\ \varphi(x) &= \frac{U(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int V(x) dx \end{aligned} \right\} \quad \text{für } x < 0, \\ \left. \begin{aligned} g(x) &= \frac{U'(x)}{2} + \frac{1}{2c'} \int V'(x) dx \\ \chi(x) &= \frac{U'(x)}{2} - \frac{1}{2c'} \int V'(x) dx \end{aligned} \right\} \quad \text{für } x > 0. \quad (6)$$

Die Werthe der Functionen für andere Werthe des Arguments ergeben sich aus den Bedingungen, welche aus dem Principe der Continuität der Verschiebungen und Spannungen folgen:

für die Trennungsstelle $x = 0$: $u = u'$

$$[q = \text{Querschnitt}] \quad Eq \frac{\partial u}{\partial x} = E' q' \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (7)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (4) in diese Gleichungen und Integration erhält man

$$\begin{aligned}
 f(ct) &= \frac{2E'q'c}{Eqc' + E'q'c} g(c't) + \frac{Eqc' - E'q'c}{Eqc' + E'q'c} \varphi(-ct) \\
 \chi(-c't) &= \frac{E'q'c - Eqc'}{Eqc' + E'q'c} g(c't) + \frac{2Eqc'}{Eqc' + E'q'c} \varphi(-ct)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Die Bedeutung dieser Formeln sieht man leicht in dem Falle, dass zur Zeit $t = 0$ der ganze Stab in Ruhe und in der Ruhelage sei, mit Ausnahme des Punktes $-b$, welcher eine Elongation U habe.

Die Durchführung der Rechnung zeigt dann, dass diese Verrückung zwei Wellen mit der Elongation $\frac{U}{2}$ erzeugt, von denen die eine in der Richtung $-\infty$ sich bewegt, während die andere gleich grosse bis zur Trennungsstelle geht und sich hier in eine gebrochene Welle von der Grösse

$$\frac{Eqc'}{Eqc' + E'q'c}, \tag{9}$$

welche in der Richtung der $+\infty$ mit der Geschwindigkeit c weiterbewegt und in eine reflectirte spaltet, welche mit der Amplitude

$$\frac{1}{2} \frac{Eqc' - E'q'c}{Eqc' + E'q'c} \tag{10}$$

nach $-\infty$ zurückkehrt.

Complicirter wird die Erscheinung, wenn der zusammengesetzte Körper eine endliche Ausdehnung von 0 bis λ und von hier bis $\lambda + \lambda'$ hat; man kann diesen Umstand durch die Annahme ersetzen, dass er an beiden Enden wieder an Stäbe mit unendlich kleinen q (oder E oder ρ) anstösst; dann werden an diesen nach (10) totale (positive) Reflexionen stattfinden, an der Trennungsstelle spalten sich wieder die Wellen u. s. w., es entsteht im Allgemeinen eine immer wachsende Zahl von Einzelwellen.

Zur Kenntniss der Schwingungszahl des Grundtons der so erzeugten stehenden Schwingungen gelangen wir jedoch auf diese Weise nicht. Diese ergibt sich am einfachsten aus der Betrachtung der particulären Lösungen (deren unendliche An-

zahl die allgemeine Lösung gibt), wie sie von Stefan¹ durchgeführt wurde.

Den Differentialgleichungen (3) und den Bedingungen für die freien Enden genügen die Lösungen

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cos \alpha t \cos \beta x \\ u' &= A' \cos \alpha' t \cos \beta' [\lambda + \lambda' - x], \end{aligned} \right\} (11)$$

wobei

$$\alpha^2 = c^2 \beta^2 = \frac{E}{\rho} \beta^2$$

$$\alpha'^2 = c'^2 \beta'^2 = \frac{E'}{\rho'} \beta'^2.$$

Aus dem Principe der Continuität der Verschiebungen und Spannungen² folgen für die Trennungsstelle $x = \lambda$ die Gleichungen (7). Diese erfordern

¹ Diese Sitzungsber., LV, 1867, LVII, 1868.

² Es ist bemerkenswerth, dass sich die zweite der Gleichungen (7), welche ausspricht, dass an der Trennungsstelle die Druckkräfte beiderseits gleich sein müssen, auch durch die Forderung, die bei unserem Stabe selbstverständlich erfüllt sein muss, dass nämlich der Schwerpunkt an derselben Stelle bleibe, ersetzen lässt. Es muss dann die Summe der Massen \times Geschwindigkeiten $= 0$ sein, also

$$\int_0^\lambda q \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_\lambda^{\lambda+\lambda'} q' \rho' \frac{\partial u'}{\partial t} dx = 0;$$

werden darin die Werthe aus (11) eingesetzt, so ist

$$\rho q A \alpha \sin \alpha t \int_0^\lambda \cos \beta x dx + \rho' q' A' \alpha' \sin \alpha' t \int_\lambda^{\lambda+\lambda'} \cos \beta' (\lambda + \lambda' - x) dx = 0;$$

da diese Gleichung von der Zeit unabhängig ist, muss $\alpha = \alpha'$ sein; durch Ausführung der Integrationen folgt dann

$$\rho q A \frac{\sin \beta \lambda}{\beta} + \rho' q' A' \frac{\sin \beta' \lambda'}{\beta'} = 0.$$

Mit Hilfe der aus der ersten Bedingung (7) folgenden zweiten der Gleichungen (12) erhält man dann direct die Formel (14).

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ A \cos \beta \lambda &= A' \cos \beta' \lambda' \\ E q \beta A \sin \beta \lambda &= -E' q' \beta' A' \sin \beta' \lambda' \end{aligned} \right\} (12)$$

und daraus folgt durch Elimination von A die Gleichung

$$E q \beta \sin \beta \lambda \cos \beta' \lambda' + E' q' \beta' \cos \beta \lambda \sin \beta' \lambda' = 0,$$

welche im Allgemeinen auch durch

$$q E \beta \operatorname{tg} \beta \lambda + q' E' \beta' \operatorname{tg} \beta' \lambda' = 0 \quad (13)$$

ersetzt werden kann.

Durch einige Transformationen erhält man, wenn statt $q \lambda \rho$ und $q' \lambda' \rho'$ die Gewichte p, p' gesetzt werden:

$$p \frac{\operatorname{tg} \beta \lambda}{\beta \lambda} + p' \frac{\operatorname{tg} \beta' \lambda'}{\beta' \lambda'} = 0. \quad (14)$$

Behufs Berechnung der Geschwindigkeit kann man diese Formel noch umgestalten, indem man die dem Tone des Systems entsprechende Monochord-Saitenlänge l und die dem Tone des Stabes λ allein (wenn es ohne das zweite Stück schwingt) entsprechende l_0 einführt.

Stimmt die Saitenlänge L mit einer Stimmgabel, die N Schwingungen in der Secunde macht, überein, so hat man schliesslich die Formel für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen

$$c'_L = 2 \pi N L \frac{\lambda'}{l z}, \quad (15)$$

wobei die Hilfsgrösse $z (= \beta' \lambda')$ aus der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = - \frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \quad (16)$$

bestimmt werden muss.

Zur numerischen Ausrechnung des z ist es am bequemsten, sich für $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ eine Tafel von halben zu halben Graden zu entwerfen und dann dazwischen zu interpoliren.

Die Lage der Knotenpunkte der Schwingung erhält man nach Formel (11) durch Nullsetzen von $\cos \beta x$ und $\cos \beta'(\lambda + \lambda - x)$; im ersten Stücke sind ihre Abstände vom Nullpunkt

$$x_k = \frac{\pi}{2\beta}, \frac{3\pi}{2\beta} \dots = \frac{l_0}{l} \frac{1}{2\lambda}, \frac{l_0}{l} \cdot \frac{3}{2\lambda} \dots, \quad (17)$$

im zweiten Stücke die Abstände vom anderen Ende des zusammengesetzten Stabes

$$x'_k = \frac{\pi}{2\beta'}, \frac{3\pi}{2\beta'} \dots = \frac{c'}{c} x_k. \quad (18)$$

Eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhange zwischen c' und der Tonhöhe gewinnt man mittelst einer graphischen Methode.

Werden z. B. wie auf Fig. 1 die Curven $y = \operatorname{tg} x$ gezeichnet, und schneidet man diese durch eine Gerade

$$y = -\frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}},$$

so geben die Abscissen der Schnittpunkte die Werthe von z , welche, in Formel (15) eingesetzt, die Wurzeln der Geschwindigkeiten bestimmen, welche dem durch die Neigung der Geraden definirten Tone entsprechen. Der Schnittpunkt mit der durch 0 hindurchgehenden Tangentencurve gibt den kleinsten Werth von z , also die grösste Geschwindigkeit, welche bei der betreffenden Tonhöhe noch möglich ist; diese entspricht also dem Grundton des Stabes.

Dieselbe Tonhöhe kann auch durch eine geringere Geschwindigkeit erzeugt werden, wenn sie nämlich dem ersten Obertone eines Systemes entspricht; diese Geschwindigkeit ist dann gegeben durch den Schnittpunkt mit der zweiten Tangentencurve. Analog für die höheren Obertöne.

Wenn wir nun — bei constantem λ' und p' — die Geschwindigkeit c' und dementsprechend die Tonhöhe ändern, ergibt sich Folgendes.

Der höchste Werth, welchen der Grundton erreichen kann, also die geringste Neigung der Geraden, entspricht der Lösung $z = 0$, somit $c' = \infty$; da diese Neigung der Geraden gleich ist der Tangente im 0-Punkte, so hat man mithin

$$1 = -\frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \quad (19)$$

zur Bestimmung des Tones, welchen das System in dem Falle gibt, wenn die Schallgeschwindigkeit in dem angesetzten Stücke unendlich ist; weil $\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l} < 0$, also $l > l_0$, so ist dieser immer tiefer als jener, welchen der Stab ohne das angefügte Stück schwingt. (Die übrigen Wurzeln der Gleichung entsprechen den Obertönen.) Für jede endliche Geschwindigkeit ist der Ton aber noch tiefer, denn ein je kleineres c' , also grösseres z man erhalten will, desto grösser muss man die Neigung der Geraden machen.

(Wenn $z > \frac{\pi}{2}$, also

$c' < \frac{4NL\lambda'}{l}$ wird, so muss

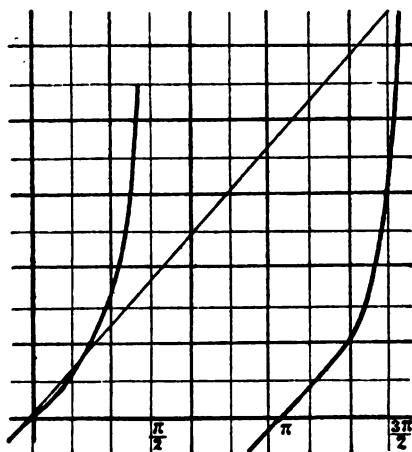


Fig. 1.

die Gerade entgegen dem Sinne des Uhrzeigers noch weiter gedreht werden, so dass sie die zweite Tangentenlinie, welche nun dem tiefsten Tone entspricht, schneidet u. s. w.)

Ähnliche Überlegungen gelten für die Obertöne; diese sind im Allgemeinen unharmonisch.

Um die günstigsten Versuchsbedingungen zu finden, muss man sich über den Einfluss von p' und λ' , die man ja beliebig variiren kann, klar werden. Dazu dient die Figur 2. Hier sind

(immer bei constantem p und λ) für einige bestimmte Verhältnisse der Gewichte und Längen des angesetzten Stückes die Curven $\frac{c_L}{\lambda}$ gezeichnet, welche die Abhängigkeit der berechneten

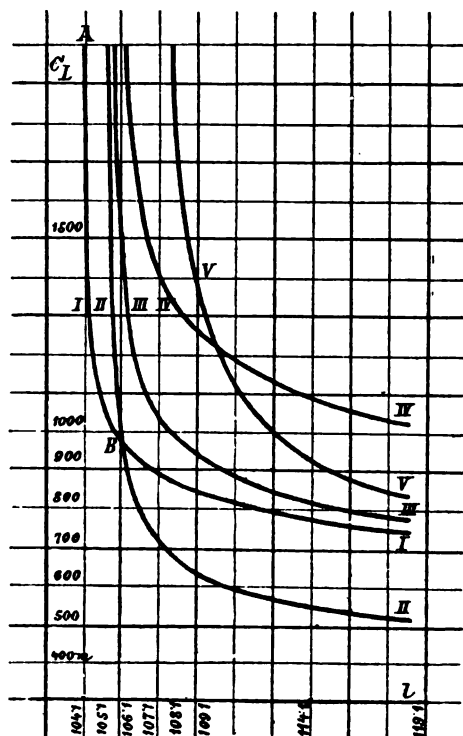


Fig. 2.

Geschwindigkeit c_L (Ordinate) von der zugehörigen Länge der Monochordsaite (Abscisse) darstellen.

Für	I	ist $p' = 8.92 \text{ g}$,	$\lambda' = 120 \text{ mm}$
	II	17.83	80
	III	17.83	120
	IV	17.83	160
	V	35.66	120

Dabei ist

$$p = 765.5 \text{ g}, \quad \lambda = 1495.5, \quad l_0 = 104.1, \quad L = 417, \quad N = 435.$$

Daraus ergibt sich Folgendes:

Der Einfluss, welchen ein Fehler der Tonbestimmung auf die Zahl für die Geschwindigkeit hat, ist desto grösser, je grösser die Neigung der Curve in dem betreffenden Punkte ist; solange also z. B. der Punkt auf dem Stücke zwischen *A* und *B* der Linie liegt, wird die Messung sehr ungenau werden, dagegen ist in einiger Entfernung rechts von *B* eine ziemliche Genauigkeit erreichbar; man wird also trachten, die Dimensionen der Stäbe so zu wählen, dass die durch die Töne bestimmten Punkte auf diesen Theilen der Curven liegen.

Die Genauigkeit bei einer gegebenen Geschwindigkeit, z. B. 1000 *m*, ist durch die Neigung der Curven in den Punkten bestimmt, wo sie durch eine in der betreffenden Höhe gezogene Horizontale geschnitten werden. Aus dem Vergleiche von I, III, V ersieht man, dass es vortheilhaft ist, grössere Gewichte der zu messenden Stücke zu verwenden, aus dem Vergleiche von II, III und IV aber, dass insbesondere die Länge möglichst gross zu machen ist. Wie später ausgeführt werden wird, erfordert dies, damit überhaupt eine Tonerzeugung möglich werde, eine Vermehrung des Gewichtes. Andererseits aber ist bei grossen Tonvertiefungen, wie sich zeigte, der Klang merklich unreiner, so dass eine mittlere Lage die beste sein dürfte.

Die Gleichungen für die Torsionstöne ergeben sich nun aus dem Vorstehenden ganz leicht; die Differentialgleichung für drehende Schwingungen

(δ = Winkelverschiebung)

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{E}{2(\mu+1)\rho} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \quad (20)$$

ist vollständig der Gleichung (3) analog, und die Gleichungen (7) sind durch die ähnlichen

$$\delta = \delta' \\ D \frac{\partial \delta}{\partial x} = D' \frac{\partial \delta'}{\partial x}$$

zu ersetzen, welche aussprechen, dass die Drehungswinkel δ und die Drehungsmomente *D* an der Trennungsstelle continuirlich in einander übergehen.

D haben wir gleichzusetzen

$$= \frac{E\theta}{2(\mu+1)} = T\theta,$$

wobei θ das Trägheitsmoment des Querschnittes mit der Flächendichte 1 bedeutet.

Mithin gelten auch für diesen Fall die früher abgeleiteten Formeln, wenn man E durch T und q durch θ ersetzt. Gleichung (14) wird demnach

$$\theta\lambda\rho\frac{\operatorname{tg}\beta\lambda}{\beta\lambda} + \theta'\lambda'\rho'\frac{\operatorname{tg}\beta'\lambda'}{\beta'\lambda'} = 0.$$

Ist der Stab ein Hohlcyylinder, also der Querschnitt ein Kreisring mit den Radien R, r , so ist

$$\theta = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2)(R^2 + r^2); \quad (21)$$

wenn man wieder $(R^2 - r^2)\pi\lambda\rho$ gleich dem Gewichte p setzt, so hat man endlich

$$p(R^2 + r^2)\frac{\operatorname{tg}\beta\lambda}{\beta\lambda} + p'(R'^2 + r'^2)\frac{\operatorname{tg}\beta'\lambda'}{\beta'\lambda'} = 0. \quad (22)$$

zur Bestimmung der Tonhöhe; die zur Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen geeignetste Formel ist analog (15) und (16)

$$c_T' = 2\pi NL \frac{\lambda'}{l_T z_T}, \quad (23)$$

wobei das z_T aus der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} z_T}{z_T} = \frac{p(R^2 + r^2)}{p'(R'^2 + r'^2)} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0 T}{l_T}}{\frac{\pi l_0 T}{l_T}}, \quad (24)$$

zu berechnen ist.

¹ Hierbei ist also die Kenntniss von R und r nöthig; $2R$ wurde mit einem Dickenmesser bestimmt, r meistens aus dem Gewichte, dem specifischen Gewichte und dem R berechnet.

Kennt man c'_L und c'_T , so folgt daraus

$$E = \rho c_L'^2; \quad T = \rho c_T'^2 = 2(\mu + 1)E;$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{T} \right) - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_L}{c_T} \right)^2 - 1.$$

Da Torsionsschwingungen zusammengesetzter Stäbe noch nicht untersucht waren, so war eine experimentelle Bestätigung der Formeln wünschenswerth. Als solche will ich die Resultate eines Versuches anführen, wobei eine Messingröhre, mit den Rändern etwas übergreifend, an eine Glasröhre angesiegtelt wurde.

Es waren

- $\lambda' = 305 \text{ mm}$
- $p' = 150 \text{ g}$
- $l_L = 126.6 \text{ mm}$
- $l_T = 218.6 \text{ „}$
- $R = 14.45 \text{ mm}$
- $r = 13.79 \text{ mm.}$

(Die hiebei verwendete Glasröhre ist die auf S. 25 als *B* bezeichnete, daselbst sind auch *N* und *L* angeführt.)

Aus diesen Daten wurde berechnet

$$c'_L = 3144 \text{ m}, \quad c'_T = 1872 \text{ m}, \quad \mu = 0.411,$$

während die directe Bestimmung aus Longitudinal- und Transversalton eines längeren Stückes derselben Messingröhre

$$c_L = 3180 \text{ m}, \quad c_T = 1881 \text{ m}, \quad \mu = 0.429$$

ergab, was in Anbetracht dessen, dass gemäss dem früher Gesagten die Genauigkeit bei so grossen Geschwindigkeiten überhaupt geringer ist, als genügende Übereinstimmung angesehen werden kann.

IV.

Stefan hatte bei seinen Versuchen als tonerregenden Theil fast ausschliesslich Holzstäbe benützt. Für longitudinale Töne sind diese auch ganz gut anwendbar, nicht aber für Torsionstöne.

Infolge der verschiedenen Elasticität in der Richtung senkrecht und parallel zu den Faserflächen, sowie infolge der Inhomogenität des Materials gibt ein solcher Stab je nach der Art des Anreibens ganz verschiedene Torsionstöne. (Bei einem Versuche gab ein 995 *mm* langer Stab aus weichem Holz einen Longitudinalton von 2669 Schwingungen und Torsionstöne, welche zwischen 709 und 762 schwankten, was für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen $c_L = 5310 \text{ m}$ und für die Torsionswellen $c_T = 1410\text{—}1517 \text{ m}$ ergibt.) Am besten entsprach der Anforderung auf Reinheit und Gleichmässigkeit der Töne eine ziemlich dickwandige Glasröhre, welche daher bei den im Folgenden angeführten Versuchen ausschliesslich benützt wurde.

Auch der zu untersuchende Körper wurde in Röhrenform gegossen, einerseits weil die Theorie voraussetzt, dass die Kräfte auf den ganzen Querschnitt vertheilt sind, während sie, falls man an die Glasröhre ein massives Stück anfügt, bloss an der Mantelfläche des letzteren angreifen würden, anderseits weil in einem röhrenförmigen Stücke sich viel rascher eine gleichförmige Temperatur herstellen lässt, als in einem massiven, was in Anbetracht des schlechten Wärmeleitungsvermögens solcher Körper sehr wichtig ist.

Die Befestigung des Stückes geschah auf die Weise, dass die Glasröhre bis über die Schmelztemperatur des Materiales erwärmt und dann das Stück darangefügt wurde; beim Erkalten hielt es infolge der Adhäsion meist genügend fest.

Der Ton wurde durch Reiben des Glases mittelst eines weichen, mit Wasser gut durchfeuchteten, mit Flanell überzogenen Filzlappens erregt.

Das Hauptaugenmerk musste bei den Versuchen auf die Constanterhaltung auf einer beliebigen Temperatur gerichtet werden.

Stefan hatte einfach den Stab längere Zeit an einem Orte von wenig veränderlicher Temperatur neben einem Thermometer gelassen, bevor der Ton bestimmt wurde; um grössere Temperaturunterschiede zu ermöglichen und eine grössere Genauigkeit zu erzielen, wurde bei diesen Versuchen folgende Anordnung getroffen: es wurde ein doppelwandiger paral-

lelopipedischer Kasten aus Zinkblech hergestellt, der oben durch einen gut passenden Holzdeckel verschliessbar war, in welchem sich zwei Löcher zum Durchstecken der Thermometer befanden, während an einer der Schmalseiten des Kastens eine kreisförmige Öffnung ausgeschnitten war, durch welche das Ende der Glasröhre (bis zu einer Marke) mit dem daran befestigten (z. B. Wachs-) Stücke hineinragte. In den Raum zwischen den Doppelwänden konnte mittelst zweier Röhrenansätze Wasser eingeleitet werden. Damit das Innere des Kastens von der äusseren Luft möglichst abgesperrt werde, wurde der Zwischenraum zwischen der Glasröhre und der Wand der Öffnung mit Watta ausgefüllt, welche durch zwei eingeschobene Korkringe beiderseits festgehalten wurde. Ebenso wurde ein Wattapfropfen in die Röhre gesteckt. Dass dies auf die Tönhöhe keinen irgend merkbaren Einfluss habe, wurde durch Versuche constatirt. Mittelst Durchleiten von Eiswasser konnte die Temperatur erniedrigt werden, durch Erwärmen mit einem untergestellten Bunsen-Brenner beliebig erhöht werden; die Flammenhöhe konnte so regulirt werden, dass die Temperaturschwankung im Inneren während einer Stunde $0.2-0.3^{\circ}$ nicht überstieg. So lange wurde auch jedesmal abgewartet, bevor der Versuch begonnen wurde, damit in dem (Wachs-) Stücke eine gleichmässige Temperaturvertheilung eintrete.

Diese Anordnung der Versuche hat zugleich den Vortheil, dass, falls die äussere Temperatur gleich bleibt, der Einfluss der thermischen Änderung der Elasticität des Glases auf die Tonhöhe des Systems nur sehr klein ist, da bloss das in den Kasten hineinragende Stück diesbezüglich in Betracht kommt. Wenn man die Rechnung ganz exact durchführen will, kann man die von Stefan abgeleitete Formel für einen aus drei Stücken bestehenden Stab anwenden.¹ Diese Stücke wären in diesem Falle:

- I. Glasröhre auf Zimmertemperatur,
- II. Glasröhre auf Temperatur des Kastens,
- III. Wachsröhre.

Bei den im Folgenden angeführten Versuchen war aber die Länge des Stückes II nur $\frac{1}{30}$ von I, so dass in Anbetracht

¹ Diese Sitzungsber., LV, 1867.

des geringen Unterschiedes von c_1 und c_2 der Einfluss der Erwärmung desselben ganz vernachlässigt werden konnte.

Bei Anstellung der Experimente muss auch der Umstand berücksichtigt werden, dass der Knotenpunkt, in welchem der Stab festgeklemmt wird, von der jeweiligen Tonhöhe abhängt, dass daher seine Lage jedesmal aus der übereinstimmenden Saitenlänge am Monochord nach Formel (17) berechnet werden muss. Praktisch ist es, behufs Verschiebung des Einklemmungspunktes von vornherein eine Scala auf der Glasröhre einzuzätzen. (Als Klemmbacken dienten zwei 1.5 cm breite, etwas ausgehöhlte Korkstücke, welche auf Brettchen aufgeleimt waren, die mit einer Schraubenzwinge zusammengedrückt wurden).

Man könnte sich von dieser Complication ganz befreien, indem man auch an der anderen Seite der Röhre ein Wachstück befestigt, so dass das System symmetrisch wird. Dann hätte man die Rechnung für einen einseitig befestigten Stab von der halben Länge der Glasröhre mit angefügtem Wachstück durchzuführen. Da aber in diesem Fall ein zweiter Kasten erforderlich ist, und auch die Herstellung gleicher Röhrenstücke nicht ganz leicht ist, zog ich es vor, bei der beschriebenen Anordnung zu bleiben.

Die Messung der Tonhöhe geschah, wie früher erwähnt wurde, mittelst eines Monochordes. Um bei der Abgrenzung des schwingenden Saitenstückes möglichste Genauigkeit zu erreichen, wurde die Kante des verschiebbaren Steges zugescharft und auch eine Vorrichtung angebracht, dass die Saite von oben niedergedrückt wurde, so dass ein Schwanken derselben an den Endpunkten, welches eine Tonvertiefung zur Folge hat, vermieden wurde. Die Stahlsaite wurde durch Gewichte gespannt; die Tonhöhe blieb sehr constant; auch die Correction infolge der Steifheit der Saite war zu vernachlässigen, so dass die direct abgelesenen Saitenlängen den Schwingungszahlen verkehrt proportional gesetzt werden konnten.

Die Vergleichung der Tonhöhen der Saite und des Stabes geschah nach dem Gehör, Schwebungen konnten nicht wahrgenommen werden, aber trotzdem war eine ziemliche Genauig-

keit der Einstellung möglich, da Unterschiede von $0.1 \text{ mm} = 1$ Schwingung auf 1500 noch merklich waren. Allerdings war diese Fehlergrenze bei Unreinheit der Töne etwas höher.

V.

Bei der Durchführung der Messungen zeigten sich besonders zwei störende Umstände, und die dadurch hervorgerufenen Fehler waren die Ursache, dass namentlich die Bestimmung des μ nicht die gewünschte Genauigkeit erlangte. So zeigt es sich nämlich, dass nur wenn die Länge des angesetzten Stückes eine gewisse Grösse nicht überschreitet, der Grundton des Systems ertönt; will man den Ton noch vertiefen, indem man ein längeres Stück ansetzt oder die Temperatur erhöht, so spricht der Grundton nicht mehr an, meist aber tritt jetzt der erste Oberton hervor. Dies hat den Effect, dass die Tonvertiefung, mit welcher nach dem auf S. 751 Gesagten die Genauigkeit wächst, nur eine gewisse Grenze erreichen kann. Oft ist es nicht einmal vortheilhaft, so weit zu gehen, da zuweilen schon vorher die Klarheit des Tones merklich getrübt ist. Insbesondere ist die Beobachtung des Torsionstones erschwert, da die durch die ruckweisen drehenden Bewegungen der Hand hervorgebrachten Töne nicht so gut charakterisirt sind, als die Longitudinaltöne, bei denen es leichter ist, je nach der Art des Reibens den Grund- oder Oberton festzuhalten.

Da das Verschwinden des Grundtones bei der grössten erreichbaren Tonvertiefung einzutreten beginnt, also wenn der Knotenpunkt des Glasstabes am meisten gegen die Trennstelle zu verschoben ist, meint Stefan, welcher diese Erscheinung auch beobachtete, dass ihre Ursache in der Vertheilung der Verdünnungen und Verdichtungen im schwingenden Stabe liegen müsse, welche in der Nähe der Knoten am stärksten, in der Nähe der Schwingungsbäuche am geringsten seien.

Vielleicht bietet aber folgende Überlegung eine befriedigendere Erklärung.

Man kann die Schwingungen des Wachsstückes auch als eine Art von durch die Glasröhre erzwungenen Schwingungen betrachten; für sich allein tönt das Wachsstück nicht. Unter

sonst gleichen Verhältnissen werden sich diese leichter erzeugen lassen, wenn ihre Amplitude im Vergleich zur Amplitude der Glasschwingungen klein, als wenn sie gross ist. Nun ergeben die Gleichungen (12) für das Verhältniss der Amplituden

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos \beta \lambda}{\cos \beta' \lambda'} = - \frac{E q \beta \sin \beta \lambda}{E' q' \beta' \sin \beta' \lambda'}$$

oder noch leichter Transformation, wenn wieder zur Abkürzung $\beta' \lambda' = z$ gesetzt wird

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos \frac{\pi l_0}{l}}{\cos z} = - \frac{p}{p'} \frac{\sin \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \frac{z}{\sin z}.$$

Betrachten wir nun die Grenzfälle, wo

1. der Knoten der Mitte der Glasröhre am nächsten liegt, also der Ton der höchst mögliche wird, nämlich gemäss dem auf S. 749 Gesagten gleich jenem, welcher der Gleichung (19) entspricht; dann ist $z = 0$, also nach der ersten der obigen Formeln $\frac{A'}{A}$ dem absoluten Betrage nach höchstens gleich Eins, und zwar desto kleiner, je mehr $\frac{\pi l_0}{l}$ sich von 180 entfernt, also je grösser $\frac{p'}{p}$.

2. Wenn der Knoten an der Verbindungsstelle selbst liegt, ist nach Formel (17)

$$\lambda = \frac{\pi}{2\beta}, \text{ also } \beta \lambda = \frac{\pi l_0}{l} = \frac{\pi}{2}, \text{ also auch } \beta' \lambda' = z = \frac{\pi}{2},$$

somit nach der zweiten der obigen Formeln

$$\frac{A'}{A} = - \frac{p}{p'}.$$

In der Regel wird nun p' bei weitem kleiner sein als p , mithin im zweiten Falle die Amplitude der Wachsschwingungen A' viel grösser sein müssen als jene der Glasschwingungen A , daher wird der Ton nur sehr schwer erzeugt werden können, während im Falle 1) das Gegentheil stattfindet.

Dies ist auch von vornherein ersichtlich, da wir im Anfange bewiesen haben, dass sich die Gleichung (14) auch aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes ableiten lässt, so dass also im Falle 2) die Amplituden der Wachsschwingungen unverhältnissmässig grösser sein müssen als jene der erregenden Glasröhre, um diesen Gleichgewicht zu halten. Zugleich ergibt sich, dass tiefe Töne desto leichter ansprechen werden, je grösser $\frac{p'}{p}$ ist; dies stimmt mit der Erfahrung überein, z. B. ein Wachsstück vom Gewichte 58.97 g , welches an die später noch zu beschreibende Glasröhre A befestigt war, erzeugte noch einen Ton von 130 mm Saitenlänge, dagegen ein sehr dünnes vom Gewichte 17.83 g war schon bei 116 mm kaum zum Tönen zu bringen.

Es würde daraus hervorgehen, dass man p' möglichst gross machen soll, doch ist dann, wie schon früher bemerkt, die Klangreinheit beeinträchtigt. Will man dann doch Töne hervorbringen, so springen die Stücke ab — eben wegen der grossen Amplituden.

Der erste Oberton dagegen hat dann meist seinen Knoten in der Nähe der Mitte des Glasstückes, daher nach Formel (17)

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2\beta}, \quad \beta\lambda = \pi,$$

daher auch

$$\beta'\lambda' = \pi,$$

also

$$\frac{A'}{A} = +1,$$

er wird also gerade dann leicht ansprechen.

Der zweite störende Umstand ist der, dass die Tonhöhe nicht ganz unabhängig ist von der Art des Anreibens; wenn das Reibzeug ziemlich trocken ist, daher die Reibung gross, die Töne laut, so erscheinen sie meist tiefer, als wenn man, mit ganz nassem Reibzeug, mit geringer Reibung leisere Töne erregt. Dies bildet nicht eine Eigenthümlichkeit der zusammengesetzten Stäbe, es ist auch recht deutlich an Torsionstönen (weniger gut an Longitudinaltönen) von Metallröhren, nament-

lich wenn sie mit Colophoniumlappen gerieben werden und, wie früher erwähnt, an Holzstäben bemerkbar.

Eine diesbezügliche Bemerkung fand ich bei Wertheim (Ann. chim. et phys. III), welcher dies darauf zurückführt, dass bei lauterem Tönen, also grösseren Verschiebungen, die Elastizitätskräfte nicht mehr proportional denselben, sondern langsamer wachsen.

Es wäre ganz plausibel, dass dies bei Wachs etc., wo die Elasticitätsgrenze weit niedriger ist, mehr hervortritt als bei anderen Körpern. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass auch die Reibung selbst, welche in der einen frei schwingenden Stab voraussetzenden Theorie nicht berücksichtigt wird, einen Einfluss hat.

Eine analoge Erscheinung wäre die, dass gestrichene Saiten einen etwas tieferen Ton geben als gezupfte. Um diese Fehlerquelle möglichst zu verringern, wurde das Reibzeug möglichst nass gemacht, und wurden meist ziemlich leise Töne erregt. Die dabei vorkommenden Schwankungen blieben meist unter $0.1\text{--}0.2\text{ mm}$ Saitenlänge (bei geringer Tonvertiefung weniger).

Zur Untersuchung gelangten gelbes Bienenwachs, Paraffin, Spermacet, Kerzenstearin und weisser Schellack. Hierbei waren die Röhren durch Giessen in Formen erzeugt worden, nur jene aus Schellack musste, da dieses auch bei hoher Temperatur nicht ganz dünnflüssig wird, durch Überkleben eines geölten Messingstabes hergestellt werden.

Die Versuche konnten leider nicht bis in unmittelbare Nähe des Schmelzpunktes festgesetzt werden, denn entweder wurden die Körper schliesslich schon so weich, dass sie sich infolge der Schwerkraft zu rasch verbogen (Paraffin, Wachs, Schellack), oder sie wollten an der Glasröhre nicht mehr haften (Spermacet, Stearin).

VI.

Die Resultate der Messungen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Die Bezeichnungen sind übereinstimmend mit dem Früheren: t = Temperatur, λ' = Länge der angesetzten Stücker: p' = dessen Gewicht; R' , r' = äusserer

und innerer Radius; l_L = die dem Longitudinalton des ganzen Systems entsprechende Saitenlänge; l_T = analog dem Torsionston; c'_L = die daraus berechnete Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in dem Versuchsstücke; c'_T = jene der Torsionswellen; μ = das hieraus sich ergebende Verhältniss der Quervertraction zur Längsdilatation.

Bei allen Versuchen war

$$\begin{aligned} N &= 435 & R &= 1.2306 \\ L &= 417.1 & r &= 0.9362. \end{aligned}$$

(Gelbes) Wachs.

$$l_{0L} = 104.0, \quad p = 765.5, \quad \lambda = 1495.5, \quad l_{0T} = 165.7.$$

(Glasröhre A)

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
5.7	167	88.74	1.53025	0.7639	136.4		1032		
7.3	150.6	79.8			130.3	214.6	1010	615	0.356
16.4	151	79.73			135.98	225.8	922	552	0.394
16.6	130	68.0			126.75	209.5	900	540	0.389
25.7	111.5	58.97			127.6	210.9	737	443	0.381
26.1	95	50.19			119.08	196.05	735	438	0.408
30.6	130.9	68.0			98.95 ¹		670		
30.7	152	79.73			101.42 ¹		660		
31.6	95	50.19			123.1	205.4	662	388	0.454
36.6	78.5	41.8			120.6	199.9	556	329	0.424
Mittel									0.401

Paraffin.

$$l_{0L} = 104.0, \quad \lambda = 1495.5, \quad p = 765.5, \quad l_{0T} = 165.7.$$

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
6.1	204.4	54.75	1.244	0.77	121.26	194.0	1522	916	0.379
6.2	148.3	36.0	1.214	0.77	111.59	177.1	1501	886	0.434
6.5	117.7	28.9			109.1		1500		

¹ Erster Oberton.

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
17.3	205	54.75	1.244	0.77	124.5	199.55	1414	858	0.359
17.3	129	35.73	1.258	0.77	110.93	176.6	1414	828	0.459
17.3	159.3	38.05	1.214	0.77	113.34	180.46	1430	842	0.443
21.6	118.4	28.9	1.214	0.77	109.7	174.6	1300	733	0.574
21.7	129.4	35.73			111.3		1349		
24.6	160.1	38.25	1.214	0.77	116.0	185.05	1259	757	0.383
25.2	206.0	54.75			136.4		1194		
25.2	206.0	54.75			96.85 ¹		1189		
27.8	118.9	28.9			111.8		1035		
28.6	207	54.75			101.0 ¹		984		
29.3	103.3	25.4			111.9		851		
30.2	93.5	22.95			112.0		744		
30.8	159.3	38.05	1.214	0.77	101.9 ¹	163.75	751	437	0.473
32.9	56.0	14.15			108.6		470		
35.3	42.9	10.55			110.6		261		
35.3	42.9	10.55			102.4 ¹		240		
Mittel. . . .									0.438

Spermacet.

$$l_{0L} = 104.0, \quad p = 765.5, \quad \lambda = 1495.5 \quad l_{0T} = 165.7.$$

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
4.9	166.6	62.45	1.366	0.773	117.7	189.4	1517	909	0.394
14.5	166.9	62.45			118.8		1432		
18.9	167	62.45			118.9		1426		
19.9	167	62.45			119.25	191.45	1403	859	0.334
24.7	167.2	62.45			121.05		1311		
27.5	167.4	62.45			121.37	196.1	1298	782	0.378
28.4	167.4	62.45			122.4	197.9	1258	759	0.373
32.6	167.8	62.45			127.2	212.6	1129	645	0.533
32.9	167.8	62.45			129.1		1092		
33.1	149.7	55.40			122.2	201.6	1091	628	0.506
Mittel. . . .									0.420

¹ Erster Oberton.

Weisser Schellack.

$$l_{0L} = 102.2, \quad p' = 751.0, \quad \lambda = 1468.5.$$

(Glasröhre B)

t	λ'	p'	l_L	c'_L
8.7	171.5	40.77	96.4 ¹	1009
19.4	136.5	34.32	117.7	970
25.5	104	28.42	109.5	948
26.3	136.5	34.32	124	869
30.8	104	28.42	110.1	865
35.3	104	28.42	111.4	821
40.0	98	23.71	111.4	762

Stearin.

$$l_{0L} = 104.0, \quad \lambda = 1495.5, \quad p = 765.5.$$

t	λ'	p'	l_L	c'_L
16.1	159.5	62.84	119.1	1354
17.3	188	56.9	120.8	1313
17.3	180.5	53.95	118.5	1396
18.1	185.3	78.18	126.16	1354
26.4	185.8	78.18	128.5	1284
33.6	186.2	78.18	133.25	1181
37.3	160.5	62.84	123.4	1177
38.5	186.5	78.18	135.4	1145
38.5	186.5	78.18	93.18 ¹	1138
40.8	121.3	37.32	113.36	1076
41.5	160.6	62.84	127.5	1077
49.2	122.0	37.32	117.6	911

Der besseren Übersicht wegen sind die erhaltenen Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den Figuren 3, 4, 5 und 6 als Punkte graphisch eingetragen; man sieht sofort, dass eine

¹ Erster Oberton.

lineare Formel die Abhängigkeit derselben von der Temperatur nicht darstellen könne; man muss hiezu eine Function von der Form $c = a + bx + cx^2$ verwenden, bei Paraffin müsste sogar noch ein Glied $+dx^3$ hinzukommen.

Die Werthe dieser Constanten wurden für die Longitudinalwellen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; anstatt bei Paraffin die vierte Constante hinzuzunehmen, zog ich es vor, die Curve in drei Stücke zu theilen und für jedes

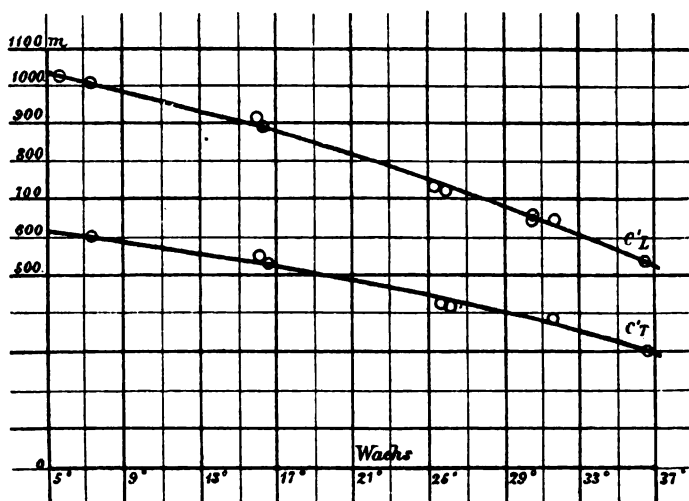


Fig. 3.

die quadratische Formel zu berechnen. Die durch diese Gleichungen dargestellten Curven sind in jenen Figuren eingetragen. Wo die Werthe des μ bestimmt waren,¹ wurde daraus das Mittel genommen, mit dieser Zahl die Torsionswellengeschwindigkeit berechnet und die so erhaltene Curve gleichfalls eingezeichnet. Hierbei ist allerdings die Änderung des μ

¹ Bei Stearin gelangte ich zu keinen brauchbaren Resultaten. Wahrscheinlich liegt der Grund in der stark krystallinen Structur und der Sprödigkeit desselben; es wird leicht von kleinen Sprüngen durchzogen, welche kaum sichtbar sind und sich nur durch Änderung des Tones bemerkbar machen.

Ebenso war bei Schellack wegen der Ungleichmässigkeit der Röhre eine Berechnung des μ nicht möglich.

mit der Temperatur nicht berücksichtigt, doch sind dazu die Beobachtungen nicht genügend genau, ihre Zahl zu gering, und würden die Correcturen bei der Torsionsgeschwindigkeit überhaupt nicht sehr gross sein.

Die Werthe der Constanten sind:

	Longitudinal- wellengeschwindigkeit			Torsions- wellengeschwindigkeit		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Wachs 6—37°..	1092·9	—9·417	—0·1464	652·9	—5·626	—0·0874
Spermacet 5—33°..	1479·8	+7·526	—0·5675	878·1	+4·466	—0·3367
Stearin 16—49°..	1352·7	+4·9012	—0·2786			
Schellack 9—40°..	1022·4	+0·1455	—0·1673			
Paraffin 6—25°..	1465·8	+12·390	—0·8774	864·3	+7·306	—0·5174
25—30°..	—3816·7	+438·986	—9·4892	—2250·6	+258·86	—5·5955
30—35°..	9326·2	—434·826	+5·0347	5499·3	—256·40	+2·9688

Die mit Hilfe dieser Constanten für einige Temperaturen berechneten Schallgeschwindigkeiten und die daraus folgenden Elasticitätsmoduln sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Schallgeschwindigkeit					Elasticitätsmodul				
	Wachs	Sper- macet	Paraf- fin	Stearin	Schel- lack	Wachs	Sper- macet	Paraf- fin	Stearin	
10°	984	1498	1502		1007	95·8	214	207		Dehnungsm.
20	846	1403	1363	1339	958	70·2	187	168	181	
30	679	1195	813	1249	876	44·6	134	58·6	157	
40				1103	761				121	
50				901					87·8	
10	588	889	886			34·2	75·5	71·9		Tors.-M.
20	505	833	804			25·0	65·8	58·5		
30	405	709	479			15·9	47·2	20·4		

Wenden wir uns nun zur Discussion der Resultate.

In Betreff der Übereinstimmung der einzelnen Beobachtungen untereinander ergibt sich Folgendes.

Die Longitudinalgeschwindigkeiten stimmen untereinander ziemlich gut überein; die durchschnittlichen Abweichungen betragen $1-1\frac{1}{2}\%$, also eine für derartige Versuche befriedigende Genauigkeit. Bei den Torsionsgeschwindigkeiten sind die Fehler etwas grösser. Bemerkenswerth ist, dass auch die

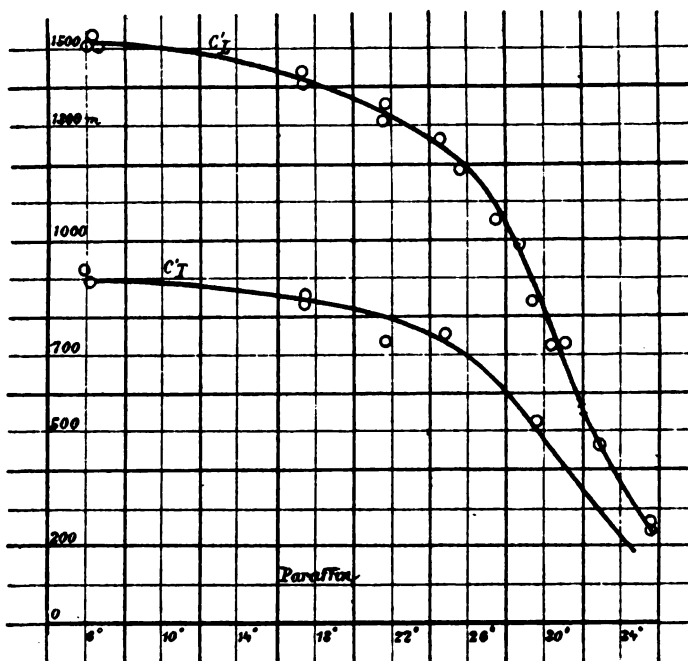


Fig. 4.

Beobachtungen bei verschiedenen Längen der Stücke und auch jene der Obertöne keine bedeutenden Differenzen zeigen — was auch als Bestätigung der Theorie gelten kann (vergl. z. B. Paraffin bei $17^{\circ}3$ oder bei $25^{\circ}2$).

Bezüglich des Wachses muss bemerkt werden, dass Stefan zu einem etwas anderen Resultate gelangte; den in der Einleitung erwähnten Zahlen zufolge fand er bei gewöhnlicher Temperatur die Geschwindigkeit allerdings fast gleich, aber die Abnahme derselben mit wachsender Temperatur ist nach seinen

Messungen noch bedeutend rascher. Vielleicht lässt sich dies dadurch erklären, dass hier gelbes Bienenwachs verwendet wurde, während er weisses Wachs gebrauchte, welches zumeist mit anderen Stoffen, namentlich Talg, versetzt wird. Auch die Differenz des Werthes für Stearin von der aus Warburg's Beobachtungen folgenden Zahl 1437 *m* wird sich auf eine kleine Verschiedenheit des Materials zurückführen lassen.

Allen zur Untersuchung gelangten Stoffen ist die bedeutende Abnahme der Elasticität mit wachsender Temperatur gemeinsam und bei allen erfolgt sie mit zunehmender Tempe-

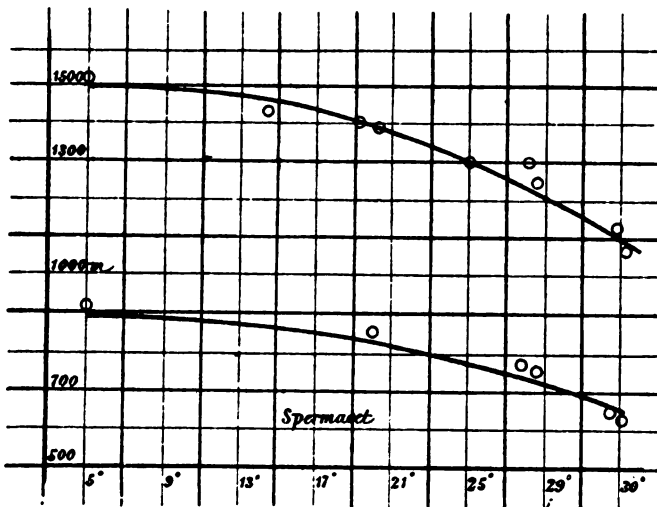


Fig. 5.

ratur immer rascher, nur das Paraffin bildet hievon eine Ausnahme; seine Curve weist in der Nähe von 30° einen Wendepunkt auf und wird oberhalb dieser Abscisse wieder convex. Ob dies bloss eine Eigenthümlichkeit dieses Körpers ist, lässt sich nicht entscheiden; es wäre möglich, dass auch die anderen Stoffe bei noch höherer Temperatur eine solche Erscheinung zeigen; leider liess sich dies aus früher genannten Gründen nicht mehr untersuchen.

Es scheint ferner, dass, wenigstens beim Paraffin, die Curve sich continuirlich der Ordinate 0 nähert, um sie vielleicht beim Schmelzpunkte zu erreichen; auch bei den anderen

Stoffen ist dies nicht unwahrscheinlich, da bei den höchsten Temperaturen die Neigung besonders gross ist. Es wäre nun sehr merkwürdig, wenn die wirkliche Schallgeschwindigkeit bis 0 abnehmen würde, während sie ja in den meisten Flüssigkeiten Werthe zwischen 1000 und 1500 *m* hat. Diese Erscheinung wird aber durch den Umstand erklärt, auf welchen zuerst Wertheim aufmerksam gemacht hat, dass nämlich diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in

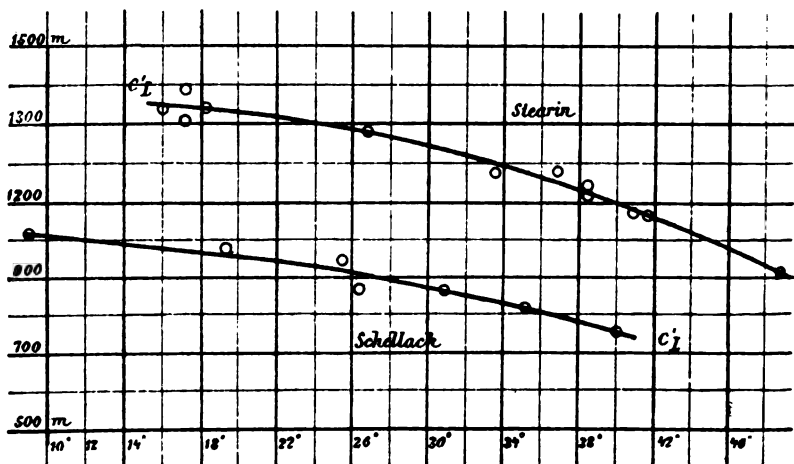


Fig. 6.

Stäben nicht identisch ist mit jener in Körpern, welche nach drei Dimensionen ausgedehnt sind.

Wird ein Stab gedehnt, so kann er sich ungehindert in der Quere zusammenziehen; in einem massiven, nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnten Körper ist dies dagegen nicht möglich, daher ergibt sich auch hier als Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, sondern

$$\begin{aligned}
 (c') &= \sqrt{\frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{E}{(1+\mu)\rho}} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \frac{T}{\rho}} = \\
 &= c'_L \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = c'_T \sqrt{\frac{2-2\mu}{1-2\mu}}.
 \end{aligned}$$

Diese Geschwindigkeit braucht auch für c'_L oder $c'_T = 0$ nicht gleich Null zu sein, wenn nämlich $\mu = 0.5$ wird — wie dies ja bei Flüssigkeiten der Fall ist. Diese Geschwindigkeit (c') ist es auch, welche bei flüssigen Körpern beobachtet wird; das c' , welches den Longitudinalwellen eines Flüssigkeitsstabes (welcher seitlich durch keine festen Wände begrenzt ist) entspricht, ist gleich Null. Es folgt somit, dass unsere Curve, welche das c' in festen Körpern darstellt, bei der Schmelztemperatur die Abscissenaxe erreichen muss, und zwar scheint es eben nach dem Gesagten, dass sie hiebei keinen Sprung macht, sondern continuirlich verläuft. Um das (c') in ausgedehnten Körpern direct zu messen, haben wir bis jetzt kein Mittel; man könnte es bei Kenntniss von μ berechnen, doch ist dazu die Bestimmung dieser Grösse zu unsicher, da die kleine Differenz $1 - 2\mu$ im Nenner vorkommt.

Um die in der Einleitung berührte Frage des Zusammenhanges zwischen der thermischen Änderung der Elasticität und dem Ausdehnungscoefficienten zu untersuchen, machte ich einige Messungen des specifischen Gewichtes der Körper bei verschiedenen Temperaturen. (Diese Zahlen wurden schon in den vorhergehenden Berechnungen theilweise benützt.) Diese Werthe, welche in Fig. 7 graphisch dargestellt sind, sind zugleich der Massstab für die Ausdehnung.

t	Wachs	t	Paraffin	t	Spermacet	t	Stearin
1.6	$\rho = 0.9774$	0.7	$\rho = 0.9055$	1.3	0.9423	1.0	1.0017
17.7	0.9646	17.9	0.8928	17.8	0.9322	17.7	0.9931
29.7	0.9500	29.6	0.8719	29.8	0.9213	29.6	0.9849
39.5	0.9193	39.4	0.8452	34.7	0.9148	39.3	0.9748
47.2	0.8778					47.2	0.9605

Der Anblick der Curven lehrt nun, dass allerdings Paraffin und Wachs, welche sich am meisten ausdehnen, auch ihre Elasticität am meisten ändern und dass ebenso beim Stearin die Kleinheit der thermischen Coefficienten übereinstimmt,

doch fehlt in den Details die Ähnlichkeit; so hat namentlich die merkwürdige Curve der Schallgeschwindigkeit des Paraffins gar keine Analogie mit dessen Wärmeausdehnungscurve. Auch würde man beim Spermacet, welches seine Elasticität ziemlich rasch ändert, einen grösseren Ausdehnungscoefficienten erwarten können. Es scheint somit, dass zwischen diesen Grössen nur ein mittelbarer Zusammenhang besteht. Von vornherein ist ja auch eher ein solcher zwischen dem Widerstande, welchen der Körper einer allseitigen Zusammendrückung entgegenstellt, also dem Volums-Elasticitätsmodul und der allseitigen thermischen Ausdehnung anzunehmen; man könnte

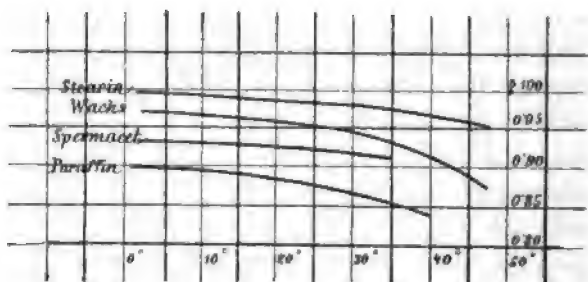


Fig. 7.

erwarten, dass nämlich die Änderung der elastischen Kräfte mit der Temperatur eben von der Vergrößerung der Distanzen zwischen den Molekülen herrührt. Der Längsmodul E folgt aus dem Volumsmodul k mit Hilfe der Formel

$$E = 3(1 - 2\mu)k,$$

also

$$\delta E = 3(1 - 2\mu)\delta k - 6k\delta\mu.$$

Da somit die Änderung des E auch durch die Änderung des μ beeinflusst wird, ist es immerhin noch nicht ausgeschlossen, dass zwischen k und dem Ausdehnungscoefficienten eine directe Beziehung herrscht und die Abweichungen davon bei E bei Annäherung an die Schmelztemperatur auf Rechnung des μ zu setzen sind, welches sich dann gerade rasch ändert. Hierüber ist vorderhand eine Entscheidung nicht möglich.

In Betreff des zweiten, im Abschnitte I erwähnten Punktes, der Grösse des μ , ist zu bemerken: In der That zeigen sich bei diesen weichen Körpern die μ , auch nach der dynamischen Methode bestimmt, verhältnissmässig gross; allerdings bleiben sie immerhin beträchtlich unterhalb der Zahl 0·5 von Mallock für Paraffin und dürfte dieser Werth (welcher auch $(c) = \infty$ involviren würde) in den früher erwähnten Mängeln der statischen Methode begründet sein. Im Übrigen möchte ich den hier gefundenen Mittelwerthen auch keine sehr grosse Genauigkeit beimessen, da ja die einzelnen Messungen ziemlich grosse Abweichungen zeigen. Ein Theil von ihnen lässt sich — bei Spermacet und Wachs — wohl auf die Änderung des μ mit der Temperatur zurückführen, doch bleiben auch dann noch beträchtliche Differenzen — namentlich bei Paraffin. Dies ist bei der Grösse des Einflusses, welchen geringe Fehler bei der Tonbestimmung etc. haben, leicht begreiflich.

Immerhin ist die Anwendung dieser Methode bei weichen Körpern gerechtfertigt, da zu erwarten ist, dass sich die Fehler der Gewichtsbestimmung, Messung der Radien, Messung des Tones bei einem Mittelwerthe gegenseitig aufheben, und da eben eine andere dynamische Methode zur Bestimmung des μ in solchen Stoffen nicht vorhanden ist.

VII.

Die allgemeinen Ergebnisse der Untersuchung sind also — um sie zum Schlusse noch kurz zusammenzufassen:

1. Bezüglich der Anwendbarkeit der Methoden überhaupt:

Die Schwingungen zusammengesetzter Stäbe sind ein gutes Mittel zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinal- und Torsionswellen in Stäben von weichen Körpern (Paraffine, Schellack etc.) und somit auch des adiabatischen E ; sie gestatten auch die Bestimmung des μ , allerdings wird sich dabei keine grosse Genauigkeit erzielen lassen.

2. Bezüglich der Änderung der Elasticität mit der Temperatur:

Die Geschwindigkeit c'_L und c'_T , somit auch E und T , nehmen mit wachsender Temperatur bei solchen Körpern sehr

rasch ab, und zwar nicht derselben proportional, sondern immer rascher; ob zum Schlusse immer wieder ein Wendepunkt eintritt — wie beim Paraffin — liess sich nicht entscheiden. Die Curven dürften bei der Schmelztemperatur die Abscissenaxe berühren. Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dieser Abnahme und dem thermischen Ausdehnungscoëfficienten existirt nicht, doch ist damit noch nicht ausgeschlossen, dass ein solcher zwischen letzterem und dem Volumsmodul besteht, was dann die scheinbare Übereinstimmung zwischen den obigen Grössen bei Stoffen, die weit von ihrem Schmelzpunkte entfernt sind, erklären würde.

3. Bezüglich der Grösse des μ :

Dasselbe schwankt bei den untersuchten Stoffen (Wachs, Spermacet, Paraffin) — den Versuchen zufolge — zwischen 0·4 und 0·44, ist somit relativ gross, wenn auch nicht so, wie es die statischen Methoden zu ergeben scheinen. Bei Wachs und Spermacet war eine Zunahme mit steigender Temperatur bemerkbar.

XIX. SITZUNG VOM 12. JULI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft IV und V (April und Mai 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr. Ign. Klemenčič in Graz dankt für die ihm zur Durchführung seiner Untersuchung über die Magnetisirung durch elektrische Oscillationen bewilligte Subvention.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht folgende zwei Arbeiten aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität zu Innsbruck:

1. »Eine Studie über unipolare Induction«, von Prof. Dr. Ernst Lecher.
2. »Experimentelle Darstellung von Magnetfeldern«, von Joh. Zuchristian.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit der Herren k. u. k. Oberstabsarzt Prof. Dr. F. Kratschmer und k. u. k. Regimentsarzt Dr. E. Wiener in Wien, betitelt: »Grundzüge einer neuen Bestimmungsmethode der Kohlensäure in der Luft«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien: »Zur Kenntniss der Überwallungsharze« (II. Abhandlung), von Dr. Max Bamberger.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup überreicht folgende vier im chemischen Institut der k. k. Universität in Graz ausgeführte Arbeiten:

1. »Über die Constitution der Verbindungen von Chinaalkaloiden mit Äthyljodid«, von Zd. H. Skraup.
2. »Über das Verhalten von Hydrojodcinchonin zu Wasser«, von Dr. G. Pum.
3. »Mangantrichlorid und Chlorokupfersäure«, von G. Neumann.
4. »Quantitative Analyse von Schwermetallen durch Titiren mit Natriumsulfid«, von G. Neumann.

Das c. M. Prof. Franz Exner übersendet eine Arbeit, betitelt: »Elektrochemische Untersuchungen« (IV. Mittheilung).

Ferner übersendet derselbe eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn J. G. Garvanoff: »Über die innere Reibung in Ölen und deren Änderung mit der Temperatur.«

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Wien (IV. Bezirk), übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (10. Fortsetzung).

Herr Dr. Wilhelm Kaiser, k. k. Polizei-Commissär in Floridsdorf, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches angeblich die Beschreibung einer in verhältnissmässig beschränktem Raume (bei grosser Stromstärke) untergebrachten transportablen Quellenbatterie enthält.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung über gewundene Bergkrystalle vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von E. Bryk: »Über die Einwirkung von Jod und Kalilauge auf Harnsäure«;

ferner eine von Prof. R. Přibram aus Czernowitz eingesendete Abhandlung von G. Gregor: »Über die Einwirkung von Jodmethyl auf Resacetophenonkalium«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht zwei weitere Berichte von Dr. Eugen v. Halácsy in Wien: III. »Beitrag zur Flora von Thessalien« und IV. »Beitrag zur Flora von Achaia und Arcadien«, welche den Schluss der botanischen Ergebnisse einer von demselben im Auftrage der kaiserl. Akademie der Wissenschaften unternommenen Forschungsreise nach Griechenland bilden.

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer überreicht den IV. Theil der in Verbindung mit Ed. Edl. v. Bergenstamm verfassten Vorarbeiten zu einer Monographie der *Muscaria Schizometopa*, welcher ein Verzeichniss der bis jetzt gezogenen Parasiten und ihrer Wirthe und eine ebensolche alphabetische Aufzählung der Wirthe und ihrer Parasiten, ferner Nachträge zu den früheren Theilen enthält.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts-Laboratorium von Herrn Fritz Pollak durchgeführte Untersuchung: »Studien über die synthetische Bildung von Mesoweinsäure und Traubensäure«.

Das w. M. Herr Vicepräsident Prof. E. Suess übergibt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt »Beiträge zur Stratigraphie Centralasiens«.

Herr Dr. J. Sahulka, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Neue Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Kaiserliche Universität in Kasan, Jubiläumsschrift zur hundertjährigen Geburtstagsfeier N. Lobatschewski's. Kasan, 1894; 4^o.

Wilde, H. Über den Ursprung der elementaren Körper und über einige neue Beziehungen ihrer Atomgewichte. London, 1892; 4^o.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XX. SITZUNG VOM 11. OCTOBER 1894.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, begrüsst die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den Ferien und heisst das neueingetretene Mitglied Herrn Prof. A. Weichselbaum herzlich willkommen.

Hierauf gedenkt der Vorsitzende der Verluste, welche die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe seit der letzten Sitzung durch den Tod zweier hervorragender Männer der Wissenschaft erlitten hat.

Am 17. Juli verschied in Perchtoldsdorf bei Wien der Senior der Akademie Hofrath Dr. Joseph Hyrtl, emerit. Professor der Wiener Universität, im 83. Lebensjahre. Hyrtl war das letzte noch lebende wirkliche Mitglied aus der Reihe der bei Gründung der Akademie (1847) von Sr. Majestät Kaiser Ferdinand I. ernannten vierzig Akademiker.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Am 8. September erfolgte zu Charlottenburg bei Berlin das Ableben des ausländischen Ehrenmitgliedes wirkl. geh. Rath und Universitätsprofessor Dr. Hermann von Helmholtz.

Die Mitglieder erheben sich gleichfalls zum Zeichen des Beileids von den Sitzen.

Ferner bringt der Vorsitzende folgende an Se. Excellenz den Herrn Präsidenten der Akademie gelangte Mittheilungen zur Kenntniss, und zwar:

Ein Schreiben Sr. Excellenz des w. M. Herrn Dr. Cajetan Freiherrn von Felder, worin derselbe der kaiserl. Akademie den

Dank ausspricht für die ihm zu seinem 80. Geburtstage am 19. September l. J. dargebrachten Glückwünsche.

Ein Schreiben von Dr. A. Friedlowsky in Kreisbach, in welchem derselbe im Namen der Frau Hofrathswitwe Auguste Hyrtl der kaiserl. Akademie für die Theilnahme an der Leichenfeier ihres verewigten Gatten und für die gleichzeitige Kranzspende herzlich dankt; — desgleichen ein Dankschreiben Ihrer Excellenz Frau von Helmholtz in Charlottenburg für das ihr aus Anlass des Ablebens ihres Gemals von der kaiserl. Akademie übersandte Beileidstelegramm.

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Werk: »Die Liparischen Inseln. III. Lipari« vor.

Im Laufe der Ferien sind folgende Publicationen der Classe erschienen:

Sitzungsberichte, Bd. 103. (1894), Abtheilung I, Heft IV bis V (April—Mai); Abtheilung II. a., Heft III—V (März—Mai), Heft VI (Juni) und VII (Juli); Abtheilung III, Heft I—IV (Jänner bis April).

Monatshefte für Chemie, Bd. 15. (1894), Heft VI (Juni), Heft VII (Juli) und Heft VIII (August); — ferner das General-Register zu den Bänden I—X dieser Monatshefte.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar:

Die Herren Dr. J. Breuer in Wien, Prof. Dr. G. Goldschmiedt und Prof. Dr. H. Molisch in Prag für die Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern — und

Herr A. Auwers, ständiger Secretär der königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin für die Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede.

Herr Dr. Sigm. Fuchs, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, dankt für die ihm zur Vollendung seiner Untersuchungen über den Erregungsvorgang in den marklosen Nervenfasern der Wirbellosen bewilligte Subvention.

Der Secretär berichtet, dass die im laufenden Jahre unter der wissenschaftlichen Leitung des Herrn k. und k. Hofrathes Director Steindachner auf S. M. Schiff »Pola« unternommenen geologischen Forschungen in den grossen Tiefen der Adria erfolgreich durchgeführt wurden und dass das Expeditions-schiff unter Commando des k. und k. Fregatten-Capitän Mörth nach neunwöchentlicher Fahrt am 1. August wieder glücklich in den Hafen von Pola eingelaufen ist; — ferner dass auch die im Monate Mai l. J. von Herrn Dr. K. Natterer auf S. M. Schiff »Taurus« ausgeführten chemischen Untersuchungen im Marmara-Meere ganz entsprechende Resultate ergeben haben.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Hans Molisch an der k. k. deutschen Universität in Prag übersendet eine Arbeit: »Die mineralische Nahrung der Pilze« (I. Abhandlung).

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über die allgemeinen Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in äolotropen und isotropen Substanzen« — und
2. »Über das Kriterion der Connexialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung«, beide vorgenannten Arbeiten von Prof. Dr. J. Finger an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
3. »Bemerkungen über Wärmeleitung«, von P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten.
4. »Über die zeitweilig verloren gehende elektrische Durchlässigkeit (Leitungsfähigkeit) unserer Metalle für Ströme von ganz geringer Spannung«, von Dr. A. Vietrzycki, k. k. Bezirksarzt in Brzesko (Galizien).

Ferner legt der Secretär folgende behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Schreiben vor:

1. Von Dr. Isidor Altschul, k. Bezirksarzt in Stretraia (Rumänien), mit der Aufschrift: »Zwei Abhandlungen. I. Über das chemische Verhältniss des schlagenden Wetters; II. Über constantes Licht durch Influenz-Elektricität«.

2. Von Herrn Gustav Hirsch in Wien, mit der Aufschrift: »Vindex«, angeblich ein Mittel gegen die Reblaus.
3. Von Herrn Franz Müller, Schulleiter in Siegenfeld (Niederösterreich), mit der Aufschrift: »Leseapparat«.
4. Von Herrn Oswald Liss, Bauingenieur in Wien, mit der Aufschrift: »Sempre avanti«. Der Inhalt betrifft angeblich einen neuen Eisenbahn-Oberbau.
5. Von Dr. Norbert Herz in Wien, mit der Aufschrift: »Physik 744«. Dasselbe enthält angeblich die Principien einer Lösung des Problems des lenkbaren Luftschiffes.
6. Von den Herren Franz B. Smolik und Emil Plechawski in Wien, mit der Aufschrift: »Karte der Eisenbahn-routen zur Ermittlung der Entfernungen beliebiger Stationsverbindungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Czernowitz: »Über die Bildung von Naphtoldithiocarbonsäuren« von Prof. Dr. R. Přibram und C. Glücksmann.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890·0 nach den in den Jahren 1889 bis 1894 im Auftrage der kaiserl. Akademie ausgeführten Messungen« (I. Theil).

Herr Dr. Sigm. Fuchs, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über den zeitlichen Verlauf des Erregungsvorganges im marklosen Nerven«.

Schliesslich überreicht der Secretär, Hofrath Director J. Hann, eine Abhandlung des Herrn Eduard Mazelle, Adjunct am astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest, unter dem Titel: »Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichsten Werthen der Lufttemperatur«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. III.
»Lipari«, Prag, 1894; Folio.

Le Prince Albert I^{er}, Prince de Monaco, Résultats des
Campagnes Scientifiques accomplies sur Son Yacht »l'Hiron-
delle«. Publiés sous la direction avec le concours du
Baron Jules de Guerne, chargé des Travaux zoolo-
giques à bord. Fascicule VII. Crustacés décapodes pro-
venant des Campagnes 1886, 1887, 1888 par A. Milne-
Edwards et E. L. Bouvier. I^{ère} Partie. »Brachyures
et Anomoures«. Imprimerie de Monaco, 1894; Folio.

Instituto Agronomico do Estado de São Paulo (Brazil)
em Campinas, Relatorio Annual 1893. S. Paulo, 1894; 4°.

Liverpool Biological Society, Report upon the Fauna of
Liverpool Bay. Vol. I. (with 10 plantes and 2 maps). London
1886; 8°. — Vol. II. (with 12 plantes and 1 chart). Liver-
pool, 1892; 8°.

Prinz W., Agrandissements des Photographies Lunaires. Publié
sous les Auspices de M. E. Solvay. Observatoire Royal
de Belgique. Partie d'un cliché obtenu au foyer du grand
Réfracteur de Lick Observatory. Planche I. Agrandis-
sement à 8 diametres; Planche II. Agrandissement à 24 dia-
metres; Planche III. Agrandissement à 33 diametres.

Änderungen des elektrischen Widerstandes wässriger Lösungen und der galvanischen Polarisation mit dem Drucke

von

Bruno Piesch.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

Die Frage, inwiefern eine Änderung des Druckes einen Einfluss auf den elektrischen Leitungswiderstand einer Flüssigkeit ausübt, wurde bereits in mehrfacher Weise behandelt, aber die meisten dieser Untersuchungen, welche nur mit geringen Druckänderungen ausgeführt wurden, haben keine nennenswerthen Ergebnisse geliefert. Dieselben sind grösstentheils in der Abhandlung des Herrn Fink¹ angeführt, welcher sich bisher am eingehendsten in dieser Richtung beschäftigt hat. Er hat durch eine grössere Reihe von Versuchen mit Salzsäure, Chlornatrium- und Zinksulfatlösungen unter Anwendung hoher Drucke gezeigt, dass im Allgemeinen mit Zunahme des Druckes eine Abnahme des Leitungswiderstandes dieser Flüssigkeiten erfolgt. Ich werde wohl noch öfter Gelegenheit haben, auf diese Arbeit Fink's zurückzukommen. Von späteren Untersuchungen sind nur die von Fousserau² hervorzuheben, welcher fand, dass sich der Widerstand sehr verdünnter Lösungen von Eisenchlorid und Chloraluminium bei einer Druckzunahme von 175 Atm. um 5—6% des ursprünglichen Werthes verringert, aber

¹ Wied. Ann., XXVI, S. 481 (1888).

² Beibl., 11, S. 723.

nach tagelangem Stehenlassen diesen wieder erreicht. Die Stärke der Änderung nahm mit der Concentration der Lösung zu. Alle diese Versuche, vor Allem diejenigen Fink's haben gezeigt, dass nur bei Anwendung geeigneter Methoden und Apparate, welche grosse Druckänderungen zulassen, genaue und brauchbare Resultate zu erzielen sind.

Ich stellte mir nun die Aufgabe, die Untersuchungen, die Herr Fink an den drei Elektrolyten ausgeführt hat, mit wesentlich verschiedenen Versuchsanordnungen auf eine grössere Reihe wässriger Lösungen auszudehnen, und ich will gleich hier erwähnen, dass die im Folgenden mitgetheilten Untersuchungsergebnisse mit dem oben angeführten allgemeinen Resultate Fink's vollkommen übereinstimmen.

Eine andere Frage war die, ob nicht eine Druckänderung auch auf die chemischen Erscheinungen, welche der elektrische Strom beim Durchgang durch einen Elektrolyten hervorruft, von Einfluss ist. Diese chemischen Erscheinungen bestehen bekanntlich erstens in der Zersetzung des Elektrolyten, anderseits in der Rückbildung desselben unter gleichzeitigem Verschwinden der ausgeschiedenen Ionen. Dieser zweite chemische Vorgang wird nach den neueren Theorien als die Ursache jener elektromotorischen Kraft angesehen, welche mit dem Namen galvanische Polarisation bezeichnet wird. Die obige Frage wird daher ihre Beantwortung erhalten, wenn wir untersuchen, ob sich die galvanische Polarisation mit dem Drucke ändert. Diese Frage hat Herr F. Exner¹ in seinen »Elektrochemischen Untersuchungen« aufgeworfen und daselbst auch die Vermuthung ausgesprochen, dass ähnlich wie die Temperatur auch der Druck auf die Polarisation von Einfluss sein müsse.

Methoden und Apparate.

Bei der Wahl der Methode der Widerstandsbestimmung hat es sich vor Allem darum gehandelt, eine möglichst grosse Genauigkeit der Messungen zu erzielen, da es ja aus den früheren Versuchen hervorgeht, dass die Widerstandsände-

¹ Diese Sitzungsberichte, Bd. 100 (1891).

rungen oft nur geringe sind. Mit der Telephonmethode, welche bei Flüssigkeitswiderständen am häufigsten angewendet wird, konnte ich die gewünschte Genauigkeit nicht erreichen, denn die Versuche, die ich damit anstellte, ergaben eine solche von nur 2 $\frac{0}{0}$. Ich wendete daher eine Methode an, welche einerseits eine gleichzeitige Messung des Widerstandes und der Polarisation gestattet, anderseits auch einen Anspruch auf grosse Genauigkeit macht. Eine ähnliche Art, den Widerstand und Polarisation gleichzeitig zu bestimmen, ist auch bereits von Neumann (Wiedem. Galv.) angegeben worden.

Das Wesen dieser Methode besteht in Folgendem: Der Strom einer Batterie von der elektromotorischen Kraft E theilt sich in zwei Zweige; in den einen derselben wird der zu bestimmende Flüssigkeitswiderstand (x) eingeschaltet, ein Widerstandskasten und die eine Rolle eines Differentialgalvanometers, der andere Zweigstrom geht durch einen zweiten Stöpselrheostaten und in entgegengesetzter Richtung durch die andere Galvanometerrolle und vereinigt sich dann wieder mit dem ersten Zweig, um zur Batterie zurückzukehren. Sobald der Strom geschlossen wird, beginnt sich die Polarisation (p) zu entwickeln, und es wird nun im zweiten Rheostaten soviel Widerstand (w) eingeschaltet, bis die Stromintensität in beiden Zweigen dieselbe ist, die Nadel also dauernd auf Null einsteht. Dass dazu immer eine längere Zeit nöthig war, geht aus einigen Ursachen hervor, auf die ich noch später zu sprechen komme. Nun wird in den ersten Zweig ein Zusatzwiderstand (g) geschaltet und die Stromgleichheit durch Zuschalten eines Widerstandes g_1 in den anderen Zweig wiederhergestellt. Mache ich den Flüssigkeitswiderstand genügend gross, woraus sich auch für w ein entsprechend hoher Werth ergibt, so kann ich den Widerstand der Batterie und der Zuleitungsdrähte dagegen vernachlässigen. Bezeichnet nun i die Stromstärke eines Zweigstromes und a den Widerstand einer Galvanometerrolle (dass dieser Werth für beide Rollen derselbe ist, ist durch einen Versuch bestätigt worden), so folgt aus der ersten Einstellung nach den Gesetzen der Stromverzweigung: $E - p = i(x + a)$, $E = i(w + a)$ und daraus $\frac{E - p}{E} = \frac{a + x}{a + w}$.

Nach Einschaltung der Zusatzwiderstände erhält man auf dieselbe Weise: $\frac{E-p}{E} = \frac{a+x+g}{a+n+g_1}$. Daraus ergibt sich für den zu bestimmenden Widerstand $x = \frac{(a+n)g}{g'} - a$ und für den Werth der Polarisation $p = E\left(1 - \frac{g}{g_1}\right)$. Man kann also aus den zwei Einstellungen die gesuchten Grössen bestimmen. Jedoch eine Voraussetzung wurde bei dieser Methode gemacht, deren Richtigkeit man von vorneherein wohl nicht annehmen kann. Es ist dies die Voraussetzung, dass die Polarisation nach Zuschalten des Widerstandes g , also mit der Änderung der Stromstärke dieselbe bleibt. Im Allgemeinen wird dies auch gewiss nicht der Fall sein. Der Umstand jedoch, dass der Flüssigkeitswiderstand — schon aus oben angeführten Gründen — sehr gross gewählt wird und der Zusatzwiderstand im Verhältniss dazu genügend klein gemacht werden kann, lässt vermuthen, dass eine Änderung der Polarisation innerhalb so geringer Stromintensitätsunterschiede nicht eintreten wird. Dies wurde natürlich durch eine Reihe von Versuchen auch nachgewiesen, von denen ich hier einige anführen will. Als Flüssigkeit wurde eine verdünnte Kupfersulfatlösung verwendet, in welche Platinelektroden eintauchten. Der Widerstand n wurde nun regulirt, bis die Nadel sich auf Null einstellte, dann verschiedene Zusatzwiderstände $g, g', g'' \dots$ eingeschaltet, welche wieder durch Widerstände $g_1, g'_1, g''_1 \dots$ compensirt wurden. Ändert sich die Polarisation nicht, so muss sich verhalten $g : g' : g'' = g_1 : g'_1 : g''_1$.

g	$n+g_1$	g_1	g	$n+g_1$	g_1	g	$n+g_1$	g_1	g	$n+g_1$	g_1
0	541.5	0	0	1582	0	0	2260	0	0	3910	0
20	581.0	39.5	50	1647	65	50	2360	100	50	3980	70
40	622.0	80.5	100	1712	130	100	2460	200	100	4050	140
60	666.5	125.0	150	1772	190	150	2570	310	150	4120	210

Diese Resultate zeigen nun, dass bei genügend grossem n und geringen Zusatzwiderständen g die Proportionalität zwischen den g und g_1 besteht, also eine geringe Intensitätsände-

rung des Stromes keinen merkbaren Einfluss auf die Polarisation ausübt. Nehmen die Werthe des g zu, so sehen wir, dass sich die Werthe der g_1 nicht mehr proportional mit diesen ändern. Bei grösseren Widerständen w können wir natürlich auch entsprechend höhere Zusatzwiderstände einschalten, und dies ist ja auch für die Genauigkeit der Messungen von grossem Vortheil.

Eine Schwierigkeit, die sich bei dieser Methode darbietet, und welche auch die Ursache davon ist, dass einige Messungen nur näherungsweise ausgeführt werden konnten, muss hier noch erwähnt werden. Bekanntlich erreicht nach dem Schliessen des primären Stromes der Polarisationsstrom nicht momentan seinen vollen Werth, sondern es ist dazu immer eine längere Zeit nöthig. Man muss daher lange warten, bis die Galvanometernadel zur Ruhe kommt und die erste Einstellung gemacht werden kann. Die Erfahrung zeigte, dass bei grösseren Flüssigkeitswiderständen das Maximum der Polarisation schneller erreicht wurde. Bei einigen Flüssigkeiten konnte aber ein stationärer Zustand überhaupt nicht beobachtet werden; die Nadel bewegte sich entweder continuirlich nach einer Richtung oder war beständig in schwingender Bewegung begriffen. In diesem Falle musste man eben auf ein genaues Resultat verzichten und zufrieden sein, überhaupt eine Änderung des Widerstandes mit dem Druck feststellen zu können. Die Ursache dieser Erscheinung lag wahrscheinlich in grösseren Concentrationsänderungen der Flüssigkeit; denn die Zersetzung der Elektrolyten erfolgt ja immer rascher als die gleichzeitige Wiedervereinigung der ausgetrennten Ionen, sobald nur die elektromotorische Kraft des primären Stromes grösser ist als die der Polarisation. Und dies letztere war ja bei allen Messungen der Fall. Ich will noch erwähnen, dass zur Stromerzeugung eine Anzahl Accumulatoren diente, welche eine genügend constant bleibende elektromotorische Kraft hatten. Die Grösse derselben war natürlich bei den einzelnen Versuchen verschieden und richtete sich immer nach der Grösse des Flüssigkeitswiderstandes. Die Werthe wechselten zwischen 3—8 Volt. Da ja zur Berechnung der Polarisation die elektromotorische Kraft der Kette bekannt sein muss, so musste dieselbe nach jedem Versuche gemessen

werden, und zwar geschah dies mittelst eines Siemens'schen Torsionsgalvanometers, welches die Klemmen der Accumulatoren zu einem Nebenkreis verband. Dieses Instrument gestattete eine genaue Ablesung von Hunderten Volt. Was die Genauigkeit der Messungen überhaupt anlangt, muss ich hervorheben, dass eine Änderung des Widerstandes w um 0.03% noch einen merkbaren Ausschlag der Galvanometernadel ergab.

Druckapparat und Widerstandsgefäss. Zur Erzeugung des Druckes diente ein Cailletet'scher Druckapparat (wie er auch von Fink bei seinen Untersuchungen verwendet wurde), den Herr Hofrath v. Lang in gütigster Weise zur Verfügung stellte, und wofür ich an dieser Stelle meinen besten Dank zum Ausdruck bringe. Auf die Beschreibung des Apparates will ich nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, dass man mit demselben mit Leichtigkeit einen Druck von 700 Atmosphären erreichen konnte. Bei meinen Versuchen ging ich jedoch nur bis zu einem Druck von 500 und nur einmal bis 600 Atmosphären. Die Messung des Druckes geschah mittelst eines an die Pumpe angebrachten Bourdon'schen Manometers.

Die grössten Schwierigkeiten machte die Herstellung des Widerstandsgefässes, und zwar die luftdichte Abschlüssung nach Aussen und die Einführung des Zuleitungsdrahtes. Meine anfänglichen Versuche, die Glasröhre, wie sie zur Verflüssigung von Gasen verwendet wird, als Widerstandsgefäss zu benützen, indem man den Zuleitungsdraht oben einschmilzt, missglückten insofern, als die Glasröhren oberhalb des Wulstes, der an die Metallhülse angepresst wird, sprangen. Ich traf daher eine wesentlich andere Anordnung, die sich äusserst vortheilhaft erwies. In die Metallhülse (A) (Fig. 1) wurde ein Ebonitcylinder (E) eingekittet, der sich gegen das untere Ende erweiterte, um dort einen Abschluss nach Aussen herzustellen. Der Cylinder war

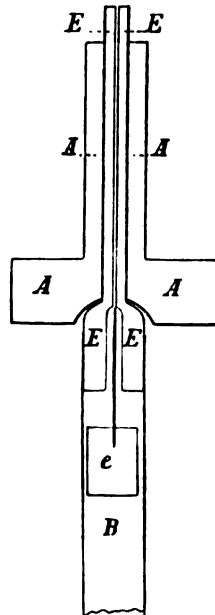


Fig. 1.

in der Richtung seiner Axe durchbohrt, damit der Kupferdraht hindurchgeführt werden konnte. An denselben wurde ein Platindraht angelöthet, der dann die eine Elektrode (e) trug. Als Elektroden benützte ich rechteckige Platinbleche, die an die Platindrähte angenietet waren. Die Bohröffnung wurde ganz mit Kitt ausgefüllt, so dass auch die Löthstelle, die in dem unteren weiteren Theil der Bohrung lag, mit Kitt umgeben war und mit der Flüssigkeit keineswegs in Berührung kommen konnte. Ich muss bemerken, dass der Dubois'sche Kitt (eine Mischung von gleichen Theilen Colophonium und gelbem Wachs), welchen ich dabei verwendete, selbst bei den höchsten Drucken vollkommen dicht gehalten hat; erst nach einer längeren Reihe von Versuchen musste er wieder erneuert werden.

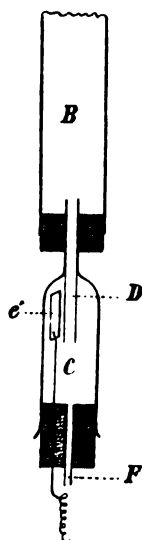


Fig. 2.

Zur Aufnahme der Flüssigkeit dienten zwei Glasröhren, von denen die eine (B) auf den unteren weiteren Theil des Ebonitcylinders aufgekittet war, wie es in Fig. 1 dargestellt ist. Sie ist durch einen Kautschukpfropfen nach unten geschlossen. Die zweite Glasröhre C (Fig. 2) hat einen engeren Theil, mit dem sie durch den Pfropfen in die erste Röhre hineinragt, und einen weiteren, der ebenfalls mit einem Kautschukstöpsel versehen ist. Durch den letzteren geht eine kurze Glasröhre (F), welche die Verbindung nach Aussen herstellt. Ausserdem wurde durch diesen Pfropfen der Platindraht geführt, der die zweite Elektrode (e') trägt und unten in eine Spirale endigt. Zu erwähnen ist noch die kleine Röhre D , welche in den engeren Theil von C eingeschoben wurde und verhindern sollte, dass die Gasblasen, welche sich bei der Zersetzung an den Elektroden bilden, in diesen Theil der Röhre gelangen und dadurch eine Unterbrechung des Stromes verursachen. Diese Zusammenstellung des Widerstandsgefäßes, besonders die Anwendung einer engen Verbindungsröhre hatte lediglich den Zweck, den Widerstand aus den oben angeführten Gründen zu vergrössern. Bei gut leitenden Flüssigkeiten war es nöthig, noch engere Röhren anzuwenden, bei einigen sehr schlecht

leitenden dagegen musste man den Pfropfen mit der zweiten Elektrode direct in die Röhre *B* einsetzen.

Sobald alle Theile des Widerstandsgefässes bis zum äussersten Rande der kleinen Röhre *F* gefüllt sind, wird dasselbe nun in den eisernen Cylinder des Druckapparates eingesetzt. Auf dem Boden desselben befindet sich eine Schichte Quecksilber, in welches die Platindrahtspirale hineintaucht, so dass dadurch eine leitende Verbindung zwischen der unteren Elektrode (*e'*) und dem Eisencylinder hergestellt ist. Ein starker Kupferdraht, der um denselben gewunden ist, leitet den Strom weiter. Der Widerstand aller dieser Leitungen ist, wie die Versuche ergeben haben, ein so geringer im Vergleich mit dem Flüssigkeitswiderstand, dass er überhaupt nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Da das Quecksilber zur Leitung des Stromes benützt wurde, durfte dasselbe keineswegs mit dem Elektrolyten in Berührung kommen. Denn auf diese Weise würde es ebenfalls die Stelle einer Elektrode einnehmen, und ausserdem würde die Berührung des Quecksilbers mit dem Platindrahte einerseits und die Anwesenheit des Elektrolyten anderseits die Ursache zur Bildung eines störenden elektrischen Stromes sein. Es wurde daher die zu untersuchende Flüssigkeit unten durch eine nicht leitende Flüssigkeit, Schwefelkohlenstoff, abgeschlossen, dessen specifisches Gewicht grösser ist als das des Wassers und der untersuchten Flüssigkeiten. Der übrige Theil des Eisencylinders wurde mit Wasser angefüllt. Der Schwefelkohlenstoff musste natürlich nach einigen Versuchsreihen immer erneuert werden, da er durch die Berührung mit dem Quecksilber sehr rasch verunreinigt wurde.

Die untere Elektrode *e'* wurde in einer entsprechenden Höhe angebracht, so dass sie von dem Schwefelkohlenstoff, der etwa durch den hohen Druck in die Röhre *C* eingedrungen war, nicht bedeckt werden konnte. Anderseits durfte sie auch nicht zu hoch angebracht werden, da der obere Theil dieser Röhre zur Ansammlung der ausgeschiedenen Gase bestimmt war. Aus demselben Grunde musste auch zwischen der oberen Elektrode *e* und dem Ebonitcylinder ein freier Raum gelassen werden. Die Menge der ausgeschiedenen Gase war allerdings

eine sehr geringe, und durch den Druck wurde ihr Volumen noch bedeutend reducirt. Es wäre noch zu bemerken, dass die Stromrichtung bei allen Versuchen dieselbe blieb, und zwar wurde dieselbe so gewählt, dass die untere Elektrode (e') mit dem Zinkpol der Batterie in Verbindung stand, dass sich also das Metall des Elektrolyten immer auf dieser Elektrode absetzte. Diese Einrichtung wurde getroffen, weil die untere Elektrode mit grosser Leichtigkeit gereinigt werden konnte. Die Reinigung geschah durch Lösung des niedergeschlagenen Metalls in Salpetersäure und Abwaschen mit Soda und Wasser. Ausserdem wurden die Elektroden noch ausgeglüht, um sie auch von den absorbirten Gasen zu befreien. Trotzdem konnte ein gänzlich Verschwinden des Polarisationsstromes nicht erreicht werden, das sehr empfindliche Galvanometer zeigte stets einen wenn auch sehr schwachen Strom an.

Die Beobachtungen.

Wie ich schon eingangs erwähnt habe, war es mir darum zu thun, die Beobachtungen an einer grösseren Reihe von Flüssigkeiten anzustellen, und ich will daher an dieser Stelle vor Allem Einiges über die verwendeten Flüssigkeiten hervorheben. Es gelangten sowohl verdünnte Säuren, als auch Salzlösungen zur Untersuchung, und zwar von ersteren die Schwefelsäure, Salpetersäure, Chlorwasserstoffsäure und zwei organische, die Essig- und Oxalsäure. Anschliessend an jede derselben wurde dann eine Reihe von Salzen untersucht, und zwar die Kupfer-, Eisen-, Zink-, Nickel- und Magnesiumsalze, nur bei der Schwefelsäure an Stelle des letztgenannten das Natriumsulfat. Ausserdem konnte von den Salzen der beiden organischen Säuren das Eisenacetat, sowie sämtliche eben genannten Salze der Oxalsäure infolge ihrer Unlöslichkeit in kaltem Wasser zur Untersuchung nicht verwendet werden.

Um auch einen gleichzeitigen Einfluss der Concentration auf die Widerstandsänderung der Lösung feststellen zu können, wurden die meisten der Flüssigkeiten bei zwei verschiedenen Concentrationen beobachtet. Dabei standen die Procentgehalte der Salzlösungen und der entsprechenden Säuren in einem ganz bestimmten Verhältniss, so dass in gleichen Mengen der

Lösungen auch gleiche Mengen der Säureradicale enthalten waren, oder mit anderen Worten, dass in der Gewichtseinheit der beiden Lösungen sich eine gleich grosse Anzahl elektrolytischer Molekeln befand. Weiter folgt daraus, dass sich die Anzahl der in der Volumeinheit enthaltenen elektrolytischen Molekeln der beiden Lösungen verhalten müssen wie die specifischen Gewichte derselben. Bezeichnet nämlich p das in der Gewichtseinheit enthaltene Gewicht der gelösten Substanz, A das Äquivalentgewicht der Lösung, d. h. das Moleculargewicht dividirt durch die Anzahl der Säureradicale, so ist die

in der Gewichtseinheit enthaltene Molekelanzahl $g = \frac{p}{A}$, für

eine zweite Lösung ist $g' = \frac{p'}{A'}$, soll nun $g = g'$ sein, so muss

sich verhalten: $p : p' = A : A'$, wenn daher der Procentgehalt

($P = 100 p$) der Säure gegeben ist, so folgt daraus $P' = \frac{PA'}{A}$

für den Procentgehalt der Salzlösung.

Ist ferner m die Anzahl der elektrolytischen Molekeln in der Volumeinheit und s das specifische Gewicht der Lösung, so ist $m = sg$ und für die zweite Lösung $m' = s'g'$, und da $g = g'$, so verhalten sich: $m : m' = s : s'$, was bereits oben ausgesprochen wurde.

Zwei Salze, Kupfer- und Magnesiumacetat, konnten infolge ihrer sehr geringen Löslichkeit in den entsprechenden Concentrationen nicht untersucht werden, sie wurden daher ebenso wie das Nickelacetat auch nur bei einer einzigen Concentration beobachtet. Die Herstellung der Lösungen von bestimmter Concentration geschah entweder auf die Weise, dass die nöthige Menge der Substanz abgewogen und in der dazu gehörigen Menge destillirten Wassers gelöst wurde, oder es wurde aus Tabellen das dem gewünschten Procentgehalt entsprechende specifische Gewicht entnommen und nach diesem die Lösung hergestellt. Im ersteren Falle wurde das specifische Gewicht nachträglich vermittelst eines Aräometers bestimmt.

Eine grosse Rolle sowohl bei Widerstands- als auch bei Polarisationsmessungen spielt auch die Temperatur, und es ist bekannt, dass die Flüssigkeiten bei Erhöhung der Temperatur

besser leiten, dass dagegen die Polarisirung eine Abnahme der Werthe zeigt. Die Frage, ob der Druck bei verschiedenen Temperaturen auch den Widerstand oder die Polarisirung in verschiedener Weise beeinflusst, habe ich bei der vorliegenden Arbeit gar nicht in Betracht gezogen, da es mir ja vor Allem nur darum zu thun war, festzustellen, ob überhaupt der Druck eine Änderung dieser Erscheinungen hervorruft.

Die Messungen wurden daher alle bei Zimmertemperatur vorgenommen, und die Hauptsache war, dass dieselbe während einer Versuchsreihe möglichst constant blieb. Den Eisencylinder, in welchen das Widerstandsgefäss eingeschlossen war, mit einem Wasserbad zu umgeben, schien mir überflüssig, da ja bei der grossen Wanddicke dieses Cylinders äussere Temperaturschwankungen, die während einer Versuchsreihe nur sehr gering sein konnten, nicht leicht in das Innere des Gefässes dringen konnten. Bei weitem grösser und störender sind die Temperaturunterschiede, welche durch die Zu- und Abnahme des Druckes hervorgerufen werden. Dadurch entstehende Fehler konnte man nur dadurch vermeiden, dass man nach der Erhöhung oder Erniedrigung des Druckes bis zur Ablesung am Galvanometer ungefähr 10—15 Minuten verstreichen liess. Übrigens zeigte das Galvanometer selbst den Rückgang der Temperatur an. Die Druck- und Temperaturerhöhung vermindert den Widerstand, es erfolgt ein starker Ausschlag in diesem Sinne, der aber bald mit der Temperatur zurückzugehen anfängt, bis die Nadel gänzlich zur Ruhe gelangt. Da auch die Beobachtungen bei abnehmendem Drucke gemacht wurden, so konnte ein Fehler durch die beiden entsprechenden Messungen ebenfalls ausgeglichen werden.

Ich will nun noch kurz den Gang einer Versuchsreihe beschreiben. Nachdem auf die oben angeführte Weise die zu untersuchende Lösung hergestellt war, was immer längere Zeit vor Beginn des Versuches geschah, wurde das Widerstandsgefäss gefüllt und in dem Eisencylinder des Druckapparates luftdicht verschraubt. (Die nöthigen Dichtungsleder mussten öfters erneuert werden.) Dann wurde der Strom geschlossen und so lange gewartet, bis die Nadel möglichst zur Ruhe gekommen war. Jetzt konnte erst die Nulleinstellung der Nadel

erfolgen, und es wurde nun die erste Ablesung gemacht, dann nach Einschalten des Zusatzwiderstandes die zweite und eine dritte Ablesung wieder ohne den Zusatzwiderstand. Aus der ersten und dritten Ablesung wurde dann immer das arithmetische Mittel genommen. Nun erhöhte ich den Druck auf 250 Atmosphären und liess wieder 10—15 Minuten verstreichen, bis ich die drei Ablesungen machen konnte. Dasselbe geschah dann bei 500 Atmosphären und bei den absteigenden Drucken. Es muss noch bemerkt werden, dass die Pumpe während einer Zeit von 15 Minuten selbst bei 500 Atmosphären in den meisten Fällen vollkommen dicht hielt.

Aus diesen Ablesungen berechnete ich nach den zu Beginn entwickelten Formeln die Werthe für die Widerstände und die Polarisation, welche ich nun in eine Tabelle zusammengestellt im Folgenden mittheilen will. Die erste Spalte der Tabelle enthält die fortlaufenden Nummern der Versuche, die zweite Spalte die Namen und chemischen Formeln der untersuchten Substanzen, dann ist weiters das specifische Gewicht (s) angegeben, der Procentgehalt (P), worunter die Anzahl der Gewichtstheile wasserfreien Salzes in 100 Gewichtstheilen Lösung verstanden ist, in der fünften Reihe stehen die Drucke (Π) und in der sechsten die berechneten Widerstände (W), dann sind die Mittelwerthe derselben für die gleichen Drucke angegeben und weiters die Änderungen des Widerstandes bei einer Druckerhöhung um Π Atmosphären, ausgedrückt in Procenten (q) des Anfangswiderstandes bei 0 Atmosphären. Die Widerstände sind in Siemens-Einheiten, die Polarisationswerthe in Volt ausgedrückt. Die drei letzten Columnen enthalten die beobachteten Polarisationswerthe (p), die berechneten Mittelwerthe und die Quotienten aus den Polarisationsänderungen und den entsprechenden Drucken $\left(\frac{dp}{\Pi}\right)$.

Nr.	Sub- stanz	s	P	Π	Widerstand		—q	Polarisation		$\frac{dp}{\Pi}$
					beob- achtet	Mittel- werthe		beob- achtet	Mittel- werthe	
I. Schwefelsäure und Sulfate.										
1	Schwefelsäure H ₂ SO ₄	1·040	5·96	0	415·5	421·3	14·12 ⁰ / ₁₀ 25·13	2·11	2·12	0·00012 00
				250	373·7	361·8		2·16	2·15	
				500	319·3	315·4		2·13	2·15	
				500	311·5			2·17		
				250	350·0			2·14		
				0	427·1			2·13		
2	Schwefelsäure H ₂ SO ₄	1·020	3·03	0	743·5	747·7	11·24 ⁰ / ₁₀ 16·57	1·86	1·80	0·00012 00
				250	670·5	663·6		1·83	1·83	
				500	622·0	623·7		1·83	1·83	
				500	625·5			1·83		
				250	656·8			1·84		
				0	752·0			1·74		
3	Kupfersulfat CuSO ₄	1·076	7·47	0	1114	1099	9·73 ⁰ / ₁₀ 16·87	1·53	1·56	0·00024 12
				250	996	992		1·62	1·62	
				500	910	914		1·66	1·65	
				500	918			1·65		
				250	989			1·62		
				0	1084			1·60		
4	Kupfersulfat CuSO ₄	1·032	3·24	0	3620	3575	9·87 ⁰ / ₁₀ 16·14	1·54	1·54	0·00048 00
				250	3252	3222		1·66	1·66	
				500	2996	2998		1·66	1·66	
				500	3000			1·66		
				250	3192			1·66		
				0	3531			1·54		
5	Eisensulfat FeSO ₄	1·100	9·88	0	2755	2742	7·80 ⁰ / ₁₀ 13·34	1·08	1·07	0·00036 32
				250	2528	2528		1·19	1·16	
				500	2376	2376		1·24	1·24	
				250	2528			1·13		
				0	2729			1·07		
6	Eisensulfat FeSO ₄	1·049	5·02	0	4863	4832	13·64 ⁰ / ₁₀ 23·10	1·00	0·99	0·00032 36
				250	4189	4173		1·16	1·07	
				500	3714	3716		1·16	1·16	
				500	3718			1·16		
				250	4158			0·99		
				0	4802			0·98		

Nr.	Sub- stanz	s	P	II	Widerstand		—q	Polarisation		$\frac{dp}{II}$
					beob- achtet	Mittel- werthe		beob- achtet	Mittel- werthe	
7	Zinksulfat $ZnSO_4$	1·107	9·79	0	2853	2849		2·43	2·40	0·00028 24
				250	2276	2268	20·39 ⁰ / ₀	2·50	2·47	
				500	2025	2032	28 67	2·55	2·53	
				500	2040			2·51		
				250	2260			2·44		
				0	2846			2·37		
8	Zinksulfat $ZnSO_4$	1·052	4·97	0	4594	4591		2·30	2·32	0·00056 20
				250	3487	3505	23·66 ⁰ / ₀	2·46	2·46	
				500	3193	3170	30·96	2·51	2·51	
				500	3147			2·51		
				250	3523			2·46		
				0	4589			2·34		
9	Nickelsulfat $NiSO_4$	1·128	9·40	0	2656	2668		1·95	1·94	0·00008 12
				250	1958	1972	26·08 ⁰ / ₀	1·98	1·96	
				500	1805	1805	32·34	1 99	1·99	
				500	1806			2·00		
				250	1986			1·95		
				0	2680			1·93		
10	Nickelsulfat $NiSO_4$	1·053	4·78	0	4405	4423		2·07	1·99	0·00028 24
				250	3864	3904	11·73 ⁰ / ₀	2·07	2·06	
				500	3697	3712	16·05	2·12	2·12	
				500	3729			2·12		
				250	3944			2·05		
				0	4442			1·91		
11	Natriumsulfat Na_2SO_4	1·080	8·63	0	1613	1594		2·31	2·34	0·00016 04
				250	1429	1443	9·47 ⁰ / ₀	2·38	2·38	
				500	1405	1414	11·30	2·40	2·39	
				500	1424			2·39		
				250	1457			2·38		
				0	1575			2·37		
12	Natriumsulfat Na_2SO_4	1·040	4·39	0	2690	2645		2·46	2·45	0·00020 12
				250	2400	2395	9·45 ⁰ / ₀	2·51	2·50	
				500	2328	2328	11·98	2·53	2·53	
				500	2328			2·53		
				250	2391			2·50		
				0	2600			2·45		

Nr.	Sub- stanz	s	P	II	Widerstand		-q	Polarisation		$\frac{dp}{\Pi}$
					beob- achtet	Mittel- werthe		beob- achtet	Mittel- werthe	
II. Salpetersäure und Nitrate.										
13	Salpetersäure HNO_3	1·050	8·99	0 250 500 500 250 0	2097 1244 1036 1005 1354 2117	2107 1299 1020	 38·35% 51·59	2·01 2·17 2·01 2·11 2·05 1·93	1·97 2·11 2·06	 0·00056 — 20
14	Kupfernitrat $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$	1·127	13·30	0 250 500 500 250 0	986 871 868 850 874 926	956 872 859	 8·78% 10·14	1·39 1·45 1·43 1·47 1·44 1·42	1·40 1·44 1·45	 0·00016 04
15	Kupfernitrat $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$	1·064	6·92	0 250 500 500 250 0	1586 1267 1242 1209 1216 1450	1518 1241 1225	 18·25% 19·30	1·35 1·46 1·47 1·54 1·51 1·43	1·39 1·48 1·50	 0·00036 08
16	Eisennitrat $\text{Fe}_2(\text{NO}_3)_6$	1·090	11·51	0 250 500 500 250 0	1317 1036 914 898 1086 1286	1301 1061 906	 18·44% 30·35	0·94 1·29 1·43 1·49 1·21 1·04	0·99 1·25 1·46	 0·00104 084
17	Eisennitrat $\text{Fe}_2(\text{NO}_3)_6$	1·046	5·89	0 250 500 500 250 0	1935 1727 1607 1617 1735 1865	1900 1731 1612	 8·89% 15·05	1·03 1·15 1·26 1·26 1·15 1·03	1·03 1·15 1·26	 0·00048 44
18	Zinknitrat $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$	1·131	13·42	0 250 500 500 250 0	1368 1251 1185 1187 1261 1366	1367 1256 1186	 8·12% 13·24	2·55 2·67 2·77 2·77 2·67 2·55	2·55 2·67 2·77	 0·00048 40

Nr.	Sub- stanz	s	P	II	Widerstand		—q	Polarisation		$\frac{dp}{\Pi}$
					beob- achtet	Mittel- werthe		beob- achtet	Mittel- werthe	
19	Zinknitrat $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$	1·068	6 99	0	2483	2500	$12\cdot76\%$ 15·64	2·46	2·53	0·00080 24
				250	2162	2181		2·73	2·73	
				500	2118	2109		2·73	2·79	
				500	2100			2·86		
				250	2200			2·73		
20	Nickelnitrat $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$	1·120	13·00	0	1116	1105	$10\cdot95\%$ 13·48	1·94	1·88	0·00048 04
				250	987	984		2·01	2·00	
				500	955	956		2·01	2·01	
				500	957			2·01		
				250	981			2·00		
21	Nickelnitrat $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$	1·062	6·76	0	1580	1568	$9\cdot18\%$ 16·89	1·89	1·87	0·00000 08
				250	1445	1424		1·89	1·87	
				500	1306	1303		1·89	1·89	
				500	1301			1·89		
				250	1404			1·85		
22	Magnesiumnitrat $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	1·080	10·51	0	1405	1415	$16\cdot53\%$ 22·89	2·56	2·56	0·00000 00
				250	1246	1181		2·56	2·56	
				500	1090	1091		2·56	2·56	
				500	1092			2·56		
				250	1116			2·56		
23	Magnesiumnitrat $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	1·041	5·47	0	2649	2620	$13\cdot32\%$ 18·24	1·42	1·42	0·00000 00
				250	2333	2271		1·42	1·42	
				500	2140	2142		1·42	1·42	
				500	2144			1·42		
				250	2209			1·42		
24	Ammoniumnitrat NH_4NO_3	1·024	5·84	0	1776	1787	$7\cdot94\%$ 12·97	2·40	2·44	0·00024 16
				250	1642	1645		2·50	2·50	
				500	1553	1555		2·54	2·54	
				500	1557			2·54		
				250	1648			2·50		
				0	1798			2·48		

Nr.	Sub- stanz	s	P	Π	Widerstand		—q	Polarisation		$\frac{dp}{\Pi}$
					beob- achtet	Mittel- werthe		beob- achtet	Mittel- werthe	
III. Chlorwasserstoffsäure und Chloride.										
25	Salzsäure HCl	1·050	10·17	0	1140			1·46		—
				250	335			1·45		
				500	291	—	—	1·40		
				250	385			1·38		
				0	1286			1·48		
26	Kupferchlorid Cu Cl ₂	1·206	18·78	0	1351	1313		0·69	0·72	0·00012 04
				250	1233	1239	5·63 ^{0/10}	0·75	0·75	
				500	1197	1204	8·29	0·77	0·76	
				500	1212			0·75		
				250	1245			0·75		
0	1275			0·75						
27	Kupferchlorid Cu Cl ₂	1·066	7·20	0	2518	2500		0·80	0·80	0·00020 —0·00008
				250	2310	2314	7·44 ^{0/10}	0·87	0·85	
				500	2270	2252	9·92	0·80(?)	0·83	
				500	2234			0·87		
				250	2318			0·84		
0	2482			0·80						
28	Eisenchlorid Fe ₂ Cl ₆	1·133	15·16	0	1516	1505		0·52	0·52	0·00024 36
				250	1413	1427	5·18 ^{0/10}	0·60	0·58	
				500	1342	1366	9·23	0·74	0·67	
				500	1391			0·60		
				250	1441			0·56		
0	1494			0·52						
29	Eisenchlorid Fe ₂ Cl ₆	1·049	5·81	0	2211	2177		0·52	0·59	0·00116 012
				250	1706	1720	20·99 ^{0/10}	0·88	0·88	
				500	1569	1536	28·54	0·88	0·91	
				500	1543			0·94		
				250	1735			0·88		
0	2143			0·67						
30	Zinkchlorid Zn Cl ₂	1·177	19·07	0	1433	1442		2·08	2·06	—0·00008 +0·00004
				250	1320	1329	7·83 ^{0/10}	2·05	2·04	
				500	1263	1265	12·26	2·05	2·05	
				500	1268			2·05		
				250	1338			2·04		
0	1451			2·04						

Nr.	Substanz	s	P	II	Widerstand		—q	Polarisation		$\frac{dp}{II}$
					beobachtet	Mittelwerthe		beobachtet	Mittelwerthe	
31	Zinkchlorid $ZnCl_2$	1·066	7·31	0	1998	1995	21·55%	2·08	2·06	—0·00020
				250	1594	1565		2·02	2·01	
				500	1420	1420		1·98	1·98	
				500	1420			1·98		
				250	1536			2·00		
32	Nickelchlorid $NiCl_2$	1·200	18·16	0	1120	1116	5·02%	1·55	1·56	0·00016
				250	1057	1060		1·60	1·60	
				500	1031	1031		1·61	1·61	
				500	—					
				250	1063			1·60		
33	Nickelchlorid $NiCl_2$	1·069	7·00	0	2007	2025	5·38%	1·69	1·72	0·00012
				250	1897	1916		1·77	1·75	
				500	1887	1887		1·73	1·73	
				250	1935			1·73		
				0	2043			1·75		
34	Magnesiumchlorid $MgCl_2$	1·100	13·27	0	1060	1020	8·53%	1·81	1·89	0·00008
				250	934	933		1·86	1·91	
				500	917	919		1·86	1·87	
				500	921			1·89		
				250	932			1·96		
35	Magnesiumchlorid $MgCl_2$	1·038	5·09	0	2064	2026	15·94%	2·00	2·07	0·00020
				250	1755	1703		2·13	2·12	
				500	1538	1538		2·13	2·13	
				500	1538			2·13		
				250	1652			2·12		
36	Essigsäure $C_2H_4O_2$	1·014	10·00	0	915	918	15·14%	2·09	2·10	0·00020
				250	758	779		2·15	2·15	
				500	717	713		2·15	2·16	
				500	709			2·17		
				250	801			2·15		
				0	921			2·11		

IV. Essigsäure, Acetate und Oxalsäure.

Nr.	Sub- stanz	s	P	II	Widerstand		—q	Polarisation		$\frac{dp}{II}$
					beob- achtet	Mittel- werthe		beob- achtet	Mittel- werthe	
37	Essigsäure $C_2H_4O_2$	1·005	4·00	0	1136	1204	$9\cdot88\%$ 17·10	2·27	2·29	0·00040 00
				250	1040	1085		2·39	2·39	
				500	906	998		2·39	2·39	
				500	1001			2·39		
				250	1131			2·39		
				0	1273			2·32		
38	Kupferacetat $(Cu(C_2H_3O_2)_2)$	1·028	5·02	0	2770	2695	$14\cdot21\%$ 21·81	0·90	1·08	0·00108 064
				250	2309	2312		1·35	1·35	
				500	2107	2107		1·51	1·51	
				500	2108			1·51		
				250	2316			1·35		
				0	2620			1·26		
39	Zinkacetat $Zn(C_2H_3O_2)_2$	1·115	15·25	0	4017	4100	$8\cdot39\%$ 15·19	2·37	2·31	0·00040 16
				250	3742	3756		2·41	2·41	
				500	3467	3477		2·45	2·45	
				500	3487			2·45		
				250	3770			2·41		
				0	4183			2·25		
40	Zinkacetat $Zn(C_2H_3O_2)_2$	1·050	6·10	0	1213	1209	$10\cdot33\%$ 18·52	2·22	2·23	0·00012 40
				250	1071	1084		2·29	2·26	
				500	984	985		2·36	2·36	
				500	986			2·36		
				250	1098			2·24		
				0	1205			2·24		
41	Nickelacetat $Ni(C_2H_3O_2)_2$	1·043	5·88	0	1844	1820	$7\cdot52\%$ 14·05	1·67	1·67	0·00052 44
				250	1690	1683		1·80	1·80	
				500	1563	1564		1·91	1·91	
				500	1565			1·91		
				250	1676			1·80		
				0	1796			1·67		
42	Magnesium- acetat $Mg(C_2H_3O_2)_2$	0·008	1·00	0	294·5	302·1	$2\cdot15\%$ 4·83	2·45	2·45	0·00000 00
				250	290·0	295·6		2·45	2·45	
				500	287·1	287·5		2·45	2·45	
				500	288·0			2·45		
				250	301·3			2·45		
				0	309·7			2·45		

Nr.	Substanz	s	P	II	Widerstand		-q	Polarisation		$\frac{dp}{II}$
					beobachtet	Mittelwerthe		beobachtet	Mittelwerthe	
43	Oxalsäure $C_2H_2O_4$	1·035	7·14	0	1495	1538	13·59 $\frac{0}{0}$ 24·18	1·31	1·31	0·00000 00
				250	1303	1329		1·31	1·31	
				500	1165	1166		1·31	1·31	
				500	1167			1·31		
				250	1355			1·31		
				0	1581			1·31		
44	Oxalsäure $C_2H_2O_4$	1·014	2·86	0	2584	2586	19·03 $\frac{0}{0}$ 26·60	1·36	1·36	0·00000 -0·00040
				250	2056	2094		1·36	1·36	
				500	1900	1898		1·26	1·26	
				500	1897			1·26		
				250	2132			1·36		
				0	2588			1·36		

In diesen Tabellen sind die Widerstandsänderungen in Procenten des Anfangswiderstandes bei 0 Atmosphären angegeben; schon aus diesen Zahlen ersieht man, dass, wenn man die Drucke als Abscissen und als zugehörige Ordinaten die Widerstände aufträgt, die Verbindungslinien der erhaltenen Punkte nicht linear verlaufen werden, sondern dass die Abhängigkeit des Widerstandes vom Druck durch eine Gleichung $w = w_0 + ax + bx^2 = w_0(1 + \alpha x + \beta x^2)$ ausgedrückt werden muss. Ich habe aus den drei Mittelwerthen die einzelnen Coëfficienten nach diesen Gleichungen berechnet und will dieselben für die verschiedenen Substanzen in der folgenden Tabelle angeben.

Nr.	Substanz	a	b	α	β
1	Schwefelsäure ..	-0·263	+0·000103	-0 0006242	+0·0000002445
2	Schwefelsäure ..	0·424	0353	05670	04721
3	Kupfersulfat	0·482	0224	04386	02038
4	Kupfersulfat	1·840	1370	05146	03831
5	Eisensulfat	0·980	0496	03574	01809
6	Eisensulfat	3·046	1624	06302	03360
7	Zinksulfat	3·019	2771	10594	09724
8	Zinksulfat ..	5·852	6017	12744	13103
9	Nickelsulfat	3 844	4240	14407	15892

Nr.	Substanz	<i>a</i>	<i>b</i>	α	β
10	Nickelsulfat	-2.735	+0.002629	-0.0006183	+0.0000005943
11	Natriumsulfat . . .	0.849	0980	05326	06148
12	Natriumsulfat . . .	1.362	1458	05153	05512
13	Salpetersäure . . .	4 290	4232	20360	20085
14	Kupfernitrat	0.474	0560	04958	05858
15	Kupfernitrat	1.627	2084	10718	13730
16	Eisennitrat	1.133	0684	08705	05255
17	Eisennitrat	0.766	0400	04084	02105
18	Zinknitrat	0.526	0328	03847	02399
19	Zinknitrat	1.770	1976	07080	07904
20	Nickelnitrat	0.670	0744	06063	06733
21	Nickelnitrat	0.620	0184	03954	01173
22	Magnesiumnitrat	1.227	1156	08668	08166
23	Magnesiumnitrat	1.839	1764	07017	06731
24	Ammoniumnitrat	0.673	0416	03766	02328
25	Salzsäure	—	—	—	—
26	Kupferchlorid . . .	0.375	0316	02856	02407
27	Kupferchlorid . . .	0.992	0992	03968	03968
28	Eisenchlorid	0.347	0140	02305	00909
29	Eisenchlorid	2.410	2336	11070	10730
30	Zinkchlorid	0.551	0396	03821	02746
31	Zinkchlorid	2.290	2280	11478	11428
32	Nickelchlorid . . .	0.281	0220	02517	01970
33	Nickelchlorid . . .	0.596	0640	02943	03160
34	Magnesiumchlorid	0.494	0584	04843	05725
35	Magnesiumchlorid	1.604	1256	07917	06199
36	Essigsäure	0.698	0576	07603	06274
37	Essigsäure	0.540	0256	04483	02125
38	Kupferacetat	1.885	1420	06994	05269
39	Zinkacetat	1.506	0520	03673	01268
40	Zinkacetat	0.548	0200	04532	01654
41	Nickelacetat	0.584	0144	03209	00791
42	Magnesiumacetat	0.023	-0.000013	00761	— 00430
43	Oxalsäure	0.928	+0.000368	06034	+ 02392
44	Oxalsäure	2.561	2372	09903	09172

Fasst man die erhaltenen Beobachtungsergebnisse zusammen, so lässt sich vor Allem feststellen, dass bei allen untersuchten Flüssigkeiten ohne Ausnahme mit zunehmendem Drucke eine

Verminderung des Widerstandes eintrat. Wie die Procentzahlen und ebenso die berechneten Coëfficienten ergeben, geht die Abnahme des Widerstandes nicht dem Drucke proportional vor sich, sondern wir finden, dass die Änderungen desselben zwischen 0 und 250 Atmosphären immer grösser sind als zwischen 250 und 500 Atmosphären. Eine Ausnahme davon scheint nur das Magnesiumacetat zu machen, welches bei höheren Drucken eine stärkere Änderung zeigte als bei niederen; jedoch kann ich gerade den Messungen dieser Substanz keine Genauigkeit zusprechen; sie gehört zu jenen Substanzen, bei welchen, wie schon früher erwähnt wurde, ein Stillstehen der Nadel nicht erwartet werden konnte. Ich will hier auch die übrigen Flüssigkeiten angeben, deren Messungen aus demselben Grunde keinen Anspruch auf Genauigkeit machen können; es sind dies die Salpeter- und Chlorwasserstoffsäure und das Natriumsulfat. Bei letzterem wirkte besonders die Bildung von NaOH störend, wesshalb nachher an Stelle der Natrium- die Magnesiumverbindungen untersucht wurden. Bei der Salzsäure habe ich nur die beobachteten Werthe angegeben. Man ersieht daraus, dass die anfängliche Änderung sehr bedeutend ist, die Änderung zwischen 250 und 500 Atmosphären dagegen sehr gering; eine Angabe der Procentzahlen und Coëfficienten schien mir überflüssig. Eine grössere Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit haben wohl die Messungen der Salpetersäure; auch sie zeigen grössere Änderungen des Widerstandes als alle anderen Substanzen. Im Allgemeinen kann ich sagen, dass die Elektrolyte, bei welchen an der Kathode eine Gasentwicklung stattfand, wie dies eben bei den genannten Substanzen und auch bei den anderen Säuren der Fall war, schwieriger zu untersuchen waren. Die Ursache hievon liegt wohl in complicirten secundären chemischen Vorgängen, die den Werth der Polarisation fortwährend ändern und dadurch ein Schwanken der Galvanometernadel hervorrufen.

Was den Einfluss der Concentration der Lösung betrifft, so haben die gemachten Beobachtungen kein einheitliches Resultat ergeben. Es zeigte sich nämlich, dass nur bei einem Theil, und zwar bei der Mehrzahl der untersuchten Flüssigkeiten die weniger concentrirte Lösung bei einer Druck-

erhöhung um 500 Atmosphären eine stärkere Abnahme des Leitungswiderstandes aufwies. Dieses Ergebniss hatte auch Fink bei den drei Substanzen gefunden, die er untersucht hat, nämlich bei der Salzsäure, dem Chlornatrium und dem Zinksulfat.

Ich habe zwar von diesen nur das letztere bei zwei verschiedenen Concentrationen beobachtet, aber ich glaube, meine weiteren Resultate lassen sich mit diesen theilweise ganz gut in Zusammenhang bringen.

Es hat sich nämlich ergeben, dass alle vier untersuchten Zinksalze diese Eigenschaft besitzen, ausserdem sämmtliche Chloride, nur mit Ausnahme des Chlornickels; aber auch dieses zeigte zwischen 0 und 250 Atmosphären in geringerer Concentration eine stärkere Änderung des Widerstandes, erst über 250 Atmosphären trat das Umgekehrte ein. Bei den anderen Substanzen kann eine gewisse Regelmässigkeit in ihrem Verhalten nicht gefunden werden; von den Kupfersalzen z. B. verhielten sich nur das Nitrat und Chlorid nach der obigen Regel, das Sulfat dagegen nur bis zu 250 Atmosphären. Bei höheren Drucken nahm der Widerstand der concentrirteren Lösung stärker ab als der der weniger concentrirten.

Ich muss hier noch hervorheben, dass ich im Allgemeinen bedeutend grössere Werthe für die Widerstandsänderungen erhielt als Fink. Die grössten von Fink gefundenen Werthe von q betrugen nicht ganz 7% (für ZnSO_4), während ich für diese Substanz eine Abnahme von 30·96% fand. Andere Flüssigkeiten ergaben noch grössere Werthe. Den kleinsten Werth von q erhielt ich beim Chlornickel, dessen Widerstandsänderung für 500 Atmosphären nur 6·81% betrug.

Wenn wir jetzt die Resultate, die sich aus den Polarisationsbeobachtungen ergeben haben, ins Auge fassen, so finden wir hier eine noch grössere Unregelmässigkeit in dem Verhalten der einzelnen Substanzen wie bei den Widerstandsmessungen. Am wichtigsten ist daher das allgemeine Ergebniss dieser Beobachtungen, dass nämlich eine Druckänderung auch eine Änderung der Polarisation zur Folge hat. Die vorhandenen Unregelmässigkeiten sind wohl erklärlich; denn abgesehen davon, dass Polarisationsmessungen

überhaupt schwer auszuführen sind (besonders bei einigen dieser Substanzen), so haben wir es doch hier in den meisten Fällen mit sehr geringen Änderungen der Polarisationswerthe zu thun, deren Bestimmung auch nur einen geringen Grad von Genauigkeit beanspruchen kann. Ja es ist wahrscheinlich, dass bei einigen Flüssigkeiten, die gar keine Änderung der Werthe zeigten, doch solche vorhanden waren, die sich jedoch infolge ihrer Kleinheit der Beobachtung am Galvanometer entzogen haben.

Wenn man die einzelnen beobachteten Polarisationswerthe betrachtet, so findet man, dass mit Ausnahme weniger Flüssigkeiten immer ein Steigen der Polarisation mit dem Drucke stattfindet. Ein regelmässiges Sinken wurde nur beim Zinkchlorid und bei der verdünnteren Oxalsäure bemerkt, ausserdem bei den ungenauen Beobachtungen der Salzsäure. Bei der weniger concentrirten Schwefelsäure ist ebenfalls ein Fallen der Polarisation zu verzeichnen, welches sich aber bei der darauffolgenden Druckerniedrigung fortsetzt. Das Entgegengesetzte davon trat beim Magnesiumchlorid ein: Die Werthe stiegen sowohl bei der Zunahme, als auch bei der Abnahme des Druckes continuirlich. Das Magnesiumnitrat zeigte gar keine Änderung, ebenso das Magnesiumacetat und die concentrirtere Oxalsäure. Bei einigen Flüssigkeiten wieder änderten sich die Polarisationswerthe nur bis 250 Atmosphären, weiterhin nicht mehr; im Allgemeinen kann gesagt werden, dass die Änderungen mit zunehmenden Drucken kleiner wurden; bei einigen Substanzen werden sie Null, bei einigen sogar negativ.

Die grössten Unregelmässigkeiten in den Änderungen der Polarisation wurden bei der Salpetersäure beobachtet. Es ist dies eine Substanz, deren elektrolytische Zersetzung von einer Reihe secundärer Reactionen begleitet ist, die vielleicht im Laufe der Zeit oder bei der Druckänderung wechseln und daher unregelmässige Änderungen der Polarisation hervorrufen. Dies wären die auffallendsten Erscheinungen, die sich bei den Beobachtungen ergeben haben.

Wenn wir die Einflüsse, welche die Temperatur und der Druck auf die Leitungsfähigkeit von Flüssigkeiten und die Polarisation ausüben, mit einander vergleichen, so lässt sich

Folgendes sagen: Sowohl Temperatur als Druck bewirken eine Vergrösserung der Leitungsfähigkeit, dagegen wirken sie beide in entgegengesetzter Weise auf die galvanische Polarisation. Wie die Messungen von Herrn Fr. Exner ergeben haben, hat eine Temperaturerhöhung ein Sinken der Polarisation zur Folge, während aus den vorliegenden Untersuchungen im Allgemeinen eine Zunahme der Polarisation mit dem Drucke ersichtlich ist.

Im ersteren Falle wurde die Erscheinung auf die im Elektrolyten vor sich gehenden chemischen Reactionen zurückgeführt, und auch im letzteren Falle ist dies wohl möglich. Aus den Beobachtungen lässt sich unmittelbar schliessen, dass der Wärmewerth, welcher der Rückbildung des zersetzten Elektrolyten entspricht, mit zunehmendem Drucke eine Änderung erfahren muss, denn durch die Grösse desselben ist ja die elektromotorische Kraft der Polarisation gegeben. Schon unter gewöhnlichen Umständen werden für manche Substanzen grössere Polarisationswerthe gefunden als die thermischen Werthe der einfachen chemischen Reactionen ergeben; dieselben lassen sich dann immer auf secundäre chemische Vorgänge zurückführen, bei welchen ein Wärmeverbrauch stattfindet. Ein solcher secundärer Process ist z. B. die Bildung von Wasserstoffsuperoxyd oder anderen Superoxyden.

Zum Schlusse will ich noch einen Versuch erwähnen, den ich mit einer vierprocentigen alkoholischen Lösung von Ammoniumnitrat ausgeführt habe. Die Beobachtungen waren aber infolge des stetigen Wachsens des Ausschlages der Nadel so schwierig, dass ich gar keine Zahlenwerthe angeben kann. Es liess sich nur feststellen, dass auch diese Lösung eine Änderung des Widerstandes in demselben Sinne, also eine Abnahme, zeigte. Dieselbe betrug bei einer Druckerhöhung um 500 Atmosphären ungefähr 5%, wie die beiläufigen Messungen ergeben haben. Eine wässrige Lösung desselben Salzes, die ich zum Vergleich untersuchte, verhielt sich ganz regelmässig, wie aus der Tabelle (Nr. 24) zu ersehen ist.

Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1894.)

§. 1. In einer kürzlich erschienenen Abhandlung von W. Wien¹ fand ich die Angabe, dass nach Maxwell's Lichttheorie eine ebene Ätherwelle auf die getroffene Flächeneinheit, welche sie zurückwirft, einen Druck ausübe, gleich dem doppelten Betrage der Energie in der Volumeinheit der einfallenden Welle. Dies gibt mir Veranlassung, auf die in früheren Publicationen erwähnte Vorstellung zurückzukommen, welche ich mir vom Wärmezustande der Körper überhaupt und insbesondere der Gase gebildet habe.

Ich nehme an, ein Körper bestehe aus unzähligen Atomen, welche durch Leere, d. h. nur mit Äther erfüllte Zwischenräume von einander getrennt sind. Ein Atom ist kein blosser Punkt, sondern nimmt einen Raum ein und hat eine gewisse Gestalt und innere Structur; dasselbe ist aus kleineren Theilen zusammengefügt, unterscheidet sich aber von einem Körper dadurch, dass es dem Äther gegenüber sich als ein Continuum verhält und nur an der Aussenfläche mit diesem in Contact steht. Ein Körper, dessen Atome unter sich gleich sind, ist ein Grundstoff. Die Atome können im Allgemeinen Licht- und Wärmestrahlen durch ihre Substanz hindurch, ähnlich wie es der Äther thut, mit einer durch ihre innere Structur bedingten Geschwindigkeit fortpflanzen; für den weitaus grössten Theil der bei gewöhnlicher Temperatur zwischen den Körpern aus-

¹ Wiedemann's Annalen, Bd. 52, S. 147.

getauschten Wärmestrahlen aber sind die Atome undurchlässig oder opak, d. h. sie reflectiren dieselben an ihren Aussenflächen fast vollständig.

Indem die in einen Körper eindringenden Wärmestrahlen durch zahllose Reflexionen an den Aussenflächen der getroffenen Atome nach allen Richtungen in demselben diffundirt werden, muss er in seinem Volumen beständig eine gewisse, zwischen seinen Atomen hin- und hergeworfene und hiedurch bis zu einem entsprechenden Betrage angesammelte Strahlenmenge enthalten, welche nach meiner Anschauung den wesentlichen Theil seiner Wärmemenge ausmacht.

Denkt man sich einen Körper in einem leeren Raume befindlich und gleichmässig von allen Seiten her Strahlen empfangend, für welche seine Atome opak sind, dann muss derselbe, sobald er bereits durch und durch mit Strahlen gesättigt ist, fortwährend ebensoviel davon nach aussen abgeben, als er gleichzeitig von aussen empfängt; er hat in diesem Falle eine constante Temperatur. Hienach wird die absolute Temperatur des Körpers durch die Strahlenmenge gemessen, welche in einer bestimmten Zeit normal durch die Einheit seiner Grenzfläche aus- und eintritt und welche daher auch in seinem Volumen in der gleichen Zeit normal durch jede darin angenommene Flächeneinheit gehen muss.

§. 2. Bei einer gegebenen Temperatur wird nach dem Gesagten die Volumeinheit eines Körpers eine desto grössere Strahlenmenge enthalten, je kleiner die Diffusionsgeschwindigkeit der dieselbe ausmachenden Strahlen ist. Diese Geschwindigkeit ist aber, nach einer der kinetischen Gastheorie entlehnten Bezeichnung, der mittleren Weglänge der hin- und hergeworfenen Strahlen proportional. Bedeutet r den mittleren Abstand der unter sich gleichen Atome und e die Aussenfläche eines solchen, so ist, die Atome als kugelförmig gedacht, die mittlere Weglänge und also die Diffusionsgeschwindigkeit der Strahlen proportional mit $\frac{r^3}{e}$, folglich die in der Volumeinheit angesammelte Strahlenmenge proportional mit $\frac{e}{r^3}$, und man kann für die absolute Temperatur T diese Menge

$$= \frac{CeT}{r^3}$$

setzen, wo C ein constanter Factor ist. Das Volumen v muss dann eine Strahlenmenge

$$= \frac{CevT}{r^3}$$

oder, wenn n die Zahl der Atome in v und daher $nr^3 = v$ ist,

$$= CneT$$

enthalten. Entspricht das Volumen v der Gewichtseinheit, so stellt Cne die spezifische Strahlenwärme des bezüglichen Stoffes vor; bezeichnen wir diese mit c , so haben wir die Gleichung

$$c = Cne.$$

Ist c' die spezifische Strahlenwärme eines zweiten Stoffes und haben n' und e' die entsprechende Bedeutung, so besteht die Proportion

$$c : c' = ne : n'e',$$

d. h. die specifischen Strahlenwärmen beider Stoffe verhalten sich wie die Summen der Aussenflächen der in der Gewichtseinheit vorhandenen Atome.

Hat ein Atom des einen Stoffes die Masse m , ein Atom des anderen die Masse m' , so ist $nm = n'm'$ und daher

$$c : c' = \frac{e}{m} : \frac{e'}{m'}.$$

Nimmt man von beiden Stoffen solche Gewichtsmengen a und a' , welche gleich viel Atomaussenfläche, also bei derselben Temperatur auch gleich viel Strahlenwärme enthalten und insofern thermisch äquivalent sind, so hat man

$$a : a' = \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'}$$

und hiemit ergibt sich nach dem Vorigen:

$$c : c' = a' : a,$$

d. h. die specifischen Strahlenwärmen beider Stoffe verhalten sich wie umgekehrt ihre thermischen Äquivalentgewichte. Es ist daher

$$ac = a'c',$$

d. h. das Product aus dem thermischen Äquivalentgewichte und der specifischen Strahlenwärme hat für jeden den gleichen Stoff Werth.

§. 3. Wenn ein Wärmestrahle, wie Maxwell annimmt und andere Physiker für wahrscheinlich zu halten geneigt scheinen, an einem getroffenen und ihn reflectirenden Flächenstücke einen seiner Intensität proportionalen Druck erzeugt, so müssen die Atome eines warmen Körpers vermöge der zwischen ihnen diffundirten Strahlenmenge einen ihrer Intensität entsprechenden Druck auf einander ausüben, gerade so, als wären sie mit einer Repulsivkraft begabt. In einem gewöhnlichen Gase sind dann die Atome nicht mehr, wie man in der kinetischen Theorie postulirt, vollkommen frei beweglich; es erscheint denkbar, dass sie, anstatt wie hin- und hergeworfene elastische Kugeln unmittelbar auf einander oder auf die einschliessenden Wände zu stossen, unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Bestrahlung in mittleren Abständen von einander sich zu erhalten suchen, ähnlich wie man dies für die Atome flüssiger und fester Körper auf Grund der gangbaren Hypothesen allgemein annimmt.

Einen von Wärmestrahlen ausgeübten Druck kann man sich nun in der Art erzeugt denken, dass man sich vorstellt, sie seien die Wege sehr kleiner, von warmen Körpern ausgesendeter Theilchen, welche mit grosser constanter Geschwindigkeit geradlinig fortfliegen, bis sie auf ein Hinderniss treffen, von dem sie zurückprallen. Die in einem Körper bei der Temperatur T angesammelte Strahlenmenge cT ist dann nichts Anderes, als die Summe der lebendigen Kräfte solcher hypothetisch zwischen seinen Atomen hin- und hergeworfenen Theilchen. Nach den Grundsätzen der kinetischen Gastheorie muss in diesem Falle, wenn v das Körpervolumen, x den darin von der Substanz der Atome erfüllten Raum, also $v-x$ die Summe der leeren Zwischenräume und p den Strahlendruck bedeutet, die Gleichung

$$p(v-x) = \frac{2}{3} cT$$

bestehen; denkt man sich aber die Strahlenmenge cT in Wärmeinheiten ausgedrückt und ist A der Verwandlungsfactor, so hat man

$$p(v-x) = \frac{2}{3} A c T.$$

Für die gewöhnlichen Gase kann der von der Substanz der Atome eingenommene Raum x gegen das Gesamtvolumen v als sehr klein vernachlässigt werden; für solche erhält man daher

$$pv = \frac{2}{3} A c T$$

und sonach lässt sich, wenn v die Gewichtseinheit enthält, die im gewöhnlichen Wärmemass ausgedrückte spezifische Strahlenwärme auf die einfachste Weise aus der Formel

$$c = \frac{3pv}{2AT}$$

berechnen. Setzt man $A = 426$ und $T = 273$, so folgt für die atmosphärische Luft mit den bekannten Werthen von p und v :

$$c = 0.1030;$$

wir werden von diesem Resultate in der Folge Gebrauch machen.

Unter dem Einflusse der gegenseitigen Bestrahlung können die Atome eines Körpers natürlich nicht in absoluter Ruhe sein, sondern müssen sich gleichfalls bewegen und daher eine entsprechende Summe lebendiger Kräfte besitzen; diese wird, wenn n die Zahl der Atome der Gewichtseinheit, m die Masse und γ^2 das maximale Geschwindigkeitsquadrat eines Atoms bedeutet, durch

$$\frac{n m \gamma^2}{2} = \frac{\gamma^2}{2g}$$

ausgedrückt, wo g die Beschleunigung der Schwere und folglich $nmg = 1$ ist.

Die Gesamtwärme w eines Körpers wird nach dem Gesagten neben seiner Strahlenwärme cT noch das thermische

Äquivalent der lebendigen Kräfte seiner Atome umfassen, und es ergibt sich daher die Gleichung¹

$$w = cT + \frac{nm\gamma^2}{2A}.$$

Für ein ideales Gas kann man, wenn s dessen specifische Wärme bei constantem Volumen ist,

$$w = sT$$

setzen. Hiemit erhält man

$$s = c + \frac{nm\gamma^2}{2AT}$$

oder, wenn man für c den oben gefundenen Werth einsetzt:

$$s = \frac{3pv + nm\gamma^2}{2AT}.$$

Die specifische Wärme bei constantem Drucke ist für ein solches Gas

$$= s + \frac{pv}{AT};$$

bezeichnet k das Verhältniss beider specifischen Wärmen, so wird demnach:

$$k = \frac{5pv + nm\gamma^2}{3pv + nm\gamma^2}.$$

Für Luft, Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff ist mit grosser und schwerlich zufälliger Annäherung

¹ Da die Atome ohne Zweifel nicht absolut starr sind, sondern unter der Einwirkung der zwischen ihnen diffundirten Strahlenmenge sich im Zustande einer inneren Erschütterung befinden, so müssen sie aus diesem Grunde eine absorbirte Summe lebendiger Kräfte in sich enthalten; diese scheint aber nach Allem immer sehr klein zu sein und ist in obiger Gleichung ausser Betracht gelassen. Übrigens ist anzunehmen, dass die Atome vermöge jener inneren Erschütterung ihrer Substanz selbständig Strahlen aussenden, also ein eigenes Emissionsvermögen besitzen, und es liegt dann nahe, zwischen dem eigenthümlichen Licht- und Wärmespectrum jedes Stoffes und der besonderen inneren Structur seiner Atome einen ursächlichen Zusammenhang zu vermuthen.

$$k = 1.4 = \frac{7}{5},$$

und mit diesem Werthe ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{nm\gamma^2}{2} = pv;$$

der Druck p ist also für die genannten Gase gleichbedeutend mit der Dichte ihrer kinetischen Energie, und man hat für dieselben die einfachen Ausdrücke:

$$w = cT + \frac{pv}{A} = \frac{5pv}{2A},$$

$$s = c + \frac{pv}{AT} = \frac{5pv}{2AT},$$

und zur Bestimmung ihrer Atomgeschwindigkeit folgt nach dem Vorigen:

$$\gamma^2 = 2gpv.$$

Dass der Druck p eines idealen Gases identisch sei mit der Dichte seiner kinetischen Energie, erscheint mir bei der zu Grunde liegenden Anschauung als nothwendig. Wenn sie im Wesen richtig ist, kann das Verhältniss k für ein unmittelbar aus Atomen in dem oben bezeichneten Sinne gebildetes ideales Gas keinen anderen Werth als 1.4 haben,¹ und es muss dann

¹ Für den Quecksilberdampf haben zwar Kundt und Warburg durch Schallversuche $k = \frac{5}{3}$ gefunden, und man hat darin einen glänzenden Beweis der Richtigkeit der kinetischen Theorie erblicken zu können geglaubt. Allein diese Theorie verlangt bei diesem Werthe den Zustand eines idealen Gases, und als ein solches kann man einen schon ganz oder nahe gesättigten Dampf nicht ohne Beweis ansehen. Eine nahe Befolgung des Mariotte'schen Gesetzes ist in dieser Hinsicht für sich allein nicht entscheidend. Würde man in obiger Gleichung für k den Werth $\frac{5}{3}$ setzen, so ergäbe sich die kinetische Energie

$$\frac{nm\gamma^2}{2} = 0,$$

ein Resultat, welches sich von selbst ausschliesst.

die Constitution der vorhin genannten Gase jener Bedingung wirklich entsprechen. Wir werden eine Bestätigung dessen weiterhin in ihrer specifischen Wärme finden.

§. 4. Im Bisherigen war vorausgesetzt, dass die einen Körper constituirenden, durch leere Zwischenräume getrennten Partikeln eben schon seine Atome seien, und dies dürfte für die freien Grundstoffe im Allgemeinen zutreffen. Es ist aber auch und insbesondere bei Gasen der Fall denkbar, dass die nächsten constituirenden Bestandtheile eines Körpervolumens keine Atome, sondern selbst noch kleine Körperchen sind und als solche nicht nur an ihrer äusseren Begrenzung, sondern auch in ihrem Inneren dem Äther Berührungspunkte und also den eindringenden Strahlen Angriffspunkte darbieten. Derartige kleine Körperchen mögen Molekeln, die aus solchen aufgebauten Körper thermisch zusammengesetzte und dagegen jene, welche unmittelbar aus Atomen gebildet sind, thermisch einfache heissen.

Nach dem Gesagten hat jede Molekel eine bestrahlte Aussenfläche und eine Summe bestrahlter Innenflächen. Bezeichnen wir für einen Körper, dessen Temperatur T sei, mit cT die zwischen den Aussenflächen und mit c_0T die zwischen den Innenflächen seiner Molekeln hin- und hergeworfene Strahlenmenge, so enthält er im Ganzen eine Strahlenmenge

$$= (c + c_0)T,$$

und $c + c_0$ ist seine specifische Strahlenwärme.

Ist der gedachte Körper ein Gas und kann man dasselbe vermöge der gegenseitigen Abstände seiner Molekeln als ein ideales betrachten, so ist nach dem Vorigen die kinetische Energie der als Ganze bewegten Molekeln $= pv$ und daher die Gesamtwärme des Gases

$$w = (c + c_0)T + \frac{pv}{A},$$

wobei angenommen ist, dass die Summe der lebendigen Kräfte der Atome innerhalb der Molekeln gegen diejenige der als Ganze bewegten Molekeln als unbedeutend zu vernachlässigen sei. Diese Annahme erscheint als zulässig, weil in gegenwärtiger

Hypothese von heftigen Zusammenstößen der Molekeln ohne hin nicht die Rede sein kann.

Demnach ist jetzt die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen

$$s = c + c_0 + \frac{pv}{AT}$$

und das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen

$$k = \frac{A(c + c_0) + 2pv}{A(c + c_0) + pv};$$

setzt man hier der Bedeutung von c gemäss wieder

$$c = \frac{3pv}{2AT},$$

so ergibt sich die bemerkenswerthe Gleichung

$$k = \frac{7 + 3 \frac{c_0}{c}}{5 + 3 \frac{c_0}{c}},$$

und sonach kann man, wenn k bekannt ist, den Werth des Quotienten

$$\frac{c_0}{c} = \frac{7 - 5k}{3(k - 1)},$$

nämlich das Verhältniss der Summe der Aussenflächen zur Summe der Innenflächen aller Molekeln des Gases, folglich, wenn sie unter sich gleich sind, für eine Molekel bestimmen.

Zunächst möge hier die folgende Bemerkung Platz finden. Wenn ein ideales Gas unmittelbar aus Atomen besteht, so darf man erwarten, dass seine specifische Wärme und daher auch k von der Temperatur unabhängig sei. Dies haben die Versuche Regnault's und anderer Physiker für die oben genannten Gase, bei welchen $k = \frac{7}{5}$ und $c_0 = 0$ ist, in der That ergeben

Ist hingegen das Gas thermisch zusammengesetzt, d. h. besteht es aus Molekeln, die man als kleine feste Körperchen ansehen kann, so sind die Atome innerhalb einer Molekel

gegenseitig bewegt und insofern im Besitze einer Summe lebendiger Kräfte, welche vorhin vernachlässigt wurde; dieselbe ist aber nicht nothwendig verschwindend klein und wird jedenfalls mit der Temperatur zunehmen, die specifische Wärme und k werden daher nicht völlig constant, sondern mehr oder weniger mit der Temperatur veränderlich sein. Dies ist der Erfahrung gemäss bei Gasen, für welche k bedeutend kleiner als $\frac{7}{5}$ und folglich c_0 nicht Null ist, wirklich der Fall.

§. 5. Bezeichnet man für zwei thermisch zusammengesetzte Körper, analog wie für einfache, als thermisch äquivalent solche Gewichtsmengen a und a' , in welchen die Summe der Aussenflächen der Molekeln gleich gross ist, so besteht für dieselben, wie für thermisch einfache Körper, die bereits aufgestellte Proportion:

$$a : a' = c' : c.$$

Sind beide Körper Gase, welche vom idealen Zustande nicht erheblich abweichen, so hat man für gleiche Temperatur und Spannung:

$$c : c' = v : v'$$

und somit ergibt sich für gewöhnliche Gase überhaupt, sie mögen thermisch einfach oder zusammengesetzt sein,

$$a : a' = \frac{1}{v} : \frac{1}{v'},$$

d. h. die thermischen Äquivalentgewichte der Gase verhalten sich allgemein wie ihre Dichten. In der Chemie gilt der Satz, dass die chemischen Äquivalentgewichte der Gase ihren Dichten proportional sind; man muss also schliessen: Thermisch äquivalente Gewichtsmengen verschiedener Stoffe sind auch chemisch äquivalent.

Die demnach thatsächlich bestehende Proportionalität zwischen thermischem Äquivalentgewicht und Dichte der Gase, welche sich hier unter der Annahme ergab, dass die lebendige Kraft der Atome innerhalb der Molekeln gegen diejenige der als Ganze bewegten Molekeln und um so mehr gegen die im Volumen diffundirte Strahlenmenge nur klein sei, kann als

Beweis gelten, dass diese an sich wahrscheinliche Annahme der Wirklichkeit entspricht. Dies führt aber zu dem Schlusse, dass auch für einen gewöhnlichen festen Körper die Summe der lebendigen Kräfte seiner Atome gegen die in ihm diffundirte Strahlenmenge, also der Überschuss der experimentellen specifischen Wärme, welche S heisse, über die specifische Strahlungswärme nur klein sei und dass man demnach für thermisch einfache feste Körper annähernd

$$S = c$$

setzen kann. Da das Product ac für alle Körper gleich gross sein muss, so ist hiermit die annähernde Gleichheit von aS für die festen Grundstoffe (durchschnittlich nahe $= 6$), nämlich das Gesetz von Dulong und Petit, hinreichend erklärt.

Für thermisch zusammengesetzte feste Körper ist annähernd

$$S = c + c_0 = c(1 + \frac{c_0}{c}),$$

wobei, wenn a das Äquivalentgewicht eines solchen bedeutet, ac für alle den gleichen Werth wie bei den festen Grundstoffen haben muss. Setzt man demnach $ac = 6$, so wird

$$aS = 6(1 + \frac{c_0}{c});$$

der Werth von aS wird daher für thermisch zusammengesetzte Körper um so grösser ausfallen müssen, je grösser c_0 gegen c und also die Summe der Innenflächen der Molekeln des bezüglichen Körpers gegen die Summe ihrer Aussenflächen ist.

Da der Erfahrung gemäss aS für ähnlich constituirte Körper annähernd gleich gross ist, so folgt, dass die Ähnlichkeit der Constitution auf der Übereinstimmung in dem Werthe von

$\frac{c_0}{c}$ beruht.

§. 6. Nach dem Vorigen kann die chemische Äquivalenz zweier Stoffmengen, welche miteinander eine chemische Verbindung bilden, nur durch die Gleichheit der strahlenden Flächensumme, welche beide gegen einander ins Spiel setzen, bedingt sein. Haben also zwei Grundstoffe die Äquivalent-

gewichte a und a' und sind sie im Verhältniss von $a : a'$ in einer Verbindung enthalten, so muss nach der in §. 2 aufgestellten Definition der thermischen Äquivalenz, mit der dort angegebenen Bedeutung der Buchstaben, die Proportion

$$a : a' = \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'}$$

bestehen. Enthält die Verbindung N Atome des einen und N' Atome des anderen, und bezeichnet a_1 ihr Äquivalentgewicht, so hat man

$$a_1 : a : a' = \frac{Nm + N'm'}{Ne + N'e'} : \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'};$$

da nun hier der Bedingung der Äquivalenz gemäss $Ne = N'e'$ sein muss, so wird

$$a_1 : a : a' = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{e} + \frac{m'}{e'} \right) : \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'}$$

und hieraus folgt:

$$a_1 = \frac{a + a'}{2},$$

d. h. das Äquivalentgewicht der Verbindung ist die halbe Summe der Äquivalentgewichte der Bestandtheile.

So ist z. B. das Äquivalentgewicht von Chlornatrium nicht die ganze, sondern die halbe Summe der Äquivalentgewichte von Chlor und Natrium, also $= 29.25$; da dieser Werth, mit der specifischen Wärme der Verbindung multiplicirt, dem Gesetze von Dulong und Petit sich sehr gut anschliesst, so ist $c_0 = 0$, d. h. Chlornatrium ist, obwohl chemisch zusammengesetzt, thermisch einfach. Eine Zusammenlagerung von Atomen zu Molekeln findet also hier nicht statt.¹ Dies gilt in gleicher Weise für alle ähnlich construirten Verbindungen.

Sollen ν Äquivalente eines Stoffes mit 1 Äquivalent eines anderen sich chemisch verbinden, so muss hierzu die Summe

¹ Man könnte insofern sagen, dass Chlornatrium nicht nur, wie viele Chemiker bereits annehmen, in wässriger Lösung, sondern auch in der festen Aggregatform dissociirt ist.

der strahlenden Aussenflächen für beide Stoffe gleich gross werden. Dies kann am einfachsten so geschehen, dass durch Zusammenlagerung seiner Atome zu Molekeln und entsprechende Bildung von Innenflächen die Summe der Aussenflächen des ersteren Stoffes sich im Verhältniss von $\nu : 1$ reducirt; dann sind beide Stoffmengen thermisch und chemisch äquivalent. Demnach hat die Verbindung das Äquivalentgewicht

$$a_1 = \frac{\nu a + a'}{2},$$

d. h. das Äquivalentgewicht der Verbindung ist die halbe Summe der verbundenen Äquivalentgewichte und als Verhältniss der Summe der Innenflächen zur Summe der Aussenflächen ergibt sich für dieselbe:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\nu - 1}{2},$$

wo ν immer eine ganze Zahl ist.

So hat z. B. Wasser das Äquivalentgewicht

$$\frac{2+16}{2} = 9;$$

das Product dieser Zahl mit der specifischen Wärme ist

$$9 = 6 \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

und folglich ist $c_0 = \frac{1}{2} c$, d. h. die Summe der strahlenden Innenflächen der im Wasser vorhandenen Molekeln verhält sich zur Summe der strahlenden Aussenflächen wie 1 : 2 und zur Gesamtsumme der strahlenden Flächen wie 1 : 3.

Wenn ν Äquivalente eines Stoffes mit ν' Äquivalenten eines anderen sich chemisch verbinden sollen, so muss wieder die Summe der Aussenflächen für beide gleich gross werden. Dies geschieht am einfachsten so, dass durch Zusammenlagerung der Atome zu Molekeln und Bildung von Innenflächen die Summe der Aussenflächen bei dem ersten Stoffe im Verhältniss von $\nu : 1$, bei dem anderen im Verhältniss von $\nu' : 1$ sich reducirt,

wodurch beide Stoffmengen thermisch und chemisch äquivalent werden. Die Verbindung hat sodann das Äquivalentgewicht

$$a_1 = \frac{va + v'a'}{2},$$

während in derselben das Verhältniss der Summe der Innenflächen zur Summe der Aussenflächen:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{v + v' - 2}{2}$$

ist, wo v und v' immer ganze Zahlen bedeuten.

Wie man sieht, können hiernach die Werthe von $\frac{c_0}{c}$ mit der Zusammengesetztheit der Stoffe, von $c_0 = 0$ angefangen, nicht anders als die Zahlen der Reihe

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

fortschreiten, und es muss daher das Product aS aus Äquivalentgewicht und specifischer Wärme bei binären Verbindungen nach Verhältniss der Zahlen

$$6, 9, 12, 15, 18, \dots$$

an Grösse zunehmen, wie es annähernd wirklich der Fall ist. Durch die in dieser Hinsicht thatsächlich herrschende Einfachheit der Verhältnisse erscheint die Annahme einer Zusammenlagerung von ungleichartigen Atomen zu Molekeln gänzlich ausgeschlossen.

§. 7. Wir kehren jetzt zu der in §. 4 erhaltenen Formel zurück, welche für Gase die Beziehung zwischen $\frac{c_0}{c}$ und k ausdrückt. Weil k meistens nicht hinreichend genau bekannt ist, um daraus mit Sicherheit auf das genannte Verhältniss schliessen zu können, wollen wir zu den einfachsten dafür möglichen Werthen die entsprechenden Werthe von k suchen.

Für $c_0 = 0$ wird $k = 1.4$. Dieser Werth kommt bei den permanent gasförmigen Grundstoffen, aber auch bei Stickstoffoxyd, Kohlenoxyd und Chlorwasserstoff vor. Letztere drei Gase

sind daher, obwohl chemisch zusammengesetzt, thermisch einfach, d. h. eine Zusammenlagerung von Atomen zu Molekeln hat darin nicht statt. In dieser Hinsicht ist also z. B. zwischen Stickstoffoxyd und einem blossen Gemenge der gleichen Bestandtheile kein Unterschied, und es kann sonach der wirklich bestehende Unterschied nicht durch eine Verschiedenheit der Positionen der Atome bedingt sein.

Für $c_0 = \frac{1}{2} c$, der ersten Stufe thermischer Zusammensetzung entsprechend, wird

$$k = \frac{17}{13} = 1.3077;$$

dieser oder ein nahe gleicher Werth kommt bei Wasserdampf, Ammoniak, Schwefelwasserstoff, Sumpfgas, Kohlensäure, Stickstoffoxydul, ferner bei den Elementen Chlor, Brom und Jod vor. Letztere drei Stoffe sind daher in ihrer Gasform, obwohl chemisch einfach, thermisch zusammengesetzt, d. h. sie enthalten Molekeln mit strahlenden Innenflächen.

Ich hebe zunächst hervor, dass der Werth von $\frac{c_0}{c}$ für den Wasserdampf genau denselben Werth hat wie für das Wasser, eine Übereinstimmung, welche, auf zwei ganz verschiedenen Wegen erhalten, nicht zufällig sein kann. Bei dem Übergange von Wasser in Dampf bleibt sonach das Verhältniss der Summe der strahlenden Innenflächen zur Summe der strahlenden Aussenflächen ganz unverändert.

Chlorgas betreffend, muss dasselbe zu gleichen Raumtheilen aus zwei verschiedenen gleich dichten Chlorarten bestehen; für die eine ist $c_0 = 0$, wie für den Sauerstoff des Wasserdampfes, für die andere ist $c_0 = c$, wie für den Wasserstoff dieses Dampfes, und daher wird für die Verbindung beider $c_0 = \frac{1}{2} c$. Bemerkenswerth ist, dass das Chlor durch die Verbindung mit Wasserstoff seine thermische Zusammensetzung verliert und, ohne seine Dichte zu ändern, thermisch einfach wird. Hier tritt also ein wirklicher Verlust an strahlender Fläche ein, indem einfach c_0 in der Summe

$c + c_0$ verschwindet. Derartige Vorgänge sind überhaupt sehr gewöhnlich und sollen weiter unten eine nähere Deutung finden.

Für $c_0 = c$, als zweite Stufe thermischer Zusammensetzung, wird

$$k = \frac{5}{4} = 1.25;$$

dieser oder ein nahe gleicher Werth kommt bei einer Anzahl von Gasen und Dämpfen mit etwas mehr complicirter Zusammensetzung vor. Für $c_0 = \frac{3}{2}c$ ist bereits $k = 1.211$.

Je grösser c_0 gegen c wird, desto mehr vermindert sich der Werth von k , bis endlich bei sehr complicirter Zusammensetzung oder sehr grossen Molekeln, ähnlich wie bei festen oder flüssigen Körpern, annähernd $k = 1$ wird.

§. 8. Fragt es sich nun, wie die allseitige Einfachheit der betrachteten chemisch-physikalischen Verhältnisse zu Stande kommen könne, so ist von vornherein klar, dass sie jedenfalls in einem eigenthümlichen und einfachen Gesetze der Zusammenlagerung der Atome ihren Grund haben muss. Meine Ansicht hierüber ist diese.

In §. 2 wurde Kürze halber vorausgesetzt, die Atome der Elemente seien kugelförmig. Es ist aber wahrscheinlicher, dass sie Polyeder sind, und man kann sich einfach vorstellen, sie seien Würfel. Tritt nun eine Anzahl Atome eines Grundstoffes zu einer Gruppe zusammen, so wird unter ihnen, wie man annehmen kann, das Bestreben herrschen, wieder einen Würfel zu bilden. Ein so entstandenes, eine Summe strahlender Innenflächen enthaltendes Körperchen — eine Molekel — ist wesentlich ein kleiner Krystall. Es ist dabei möglich, dass die Dicke der zwischen den Atomflächen übrig bleibenden und sie trennenden Ätherschichten gegen die Dicke der Atome nur klein ist. Die kleinste Zahl würfelförmiger Atome, welche sich zu einer gleichfalls würfelförmigen Molekel gruppieren können, ist 8. Die Masse einer solchen Molekel ist 8mal, die Summe ihrer Aussenflächen 4mal grösser als für ein Atom. Da nun nach §. 2 das Äquivalentgewicht eines Stoffes dem Quotienten

$\frac{m}{e}$ aus Masse und Aussenfläche proportional ist, so sieht man, dass, wenn alle Atome einer bestimmten Stoffmenge sich zu je acht in Molekeln zusammenlagern, das Äquivalentgewicht des bezüglichen Stoffes sich verdoppelt hat, d. h. zu einer gleichen Summe von Aussenflächen wird jetzt die doppelte Gewichtsmenge erfordert. Treten die so entstanden Molekeln wieder zu je acht zur Bildung grösserer Molekeln zusammen, so ist das Äquivalentgewicht vervierfacht, und so fort. Die möglichen Äquivalentgewichte eines Stoffes sind daher ganze Multipla des kleinsten derselben, und es hat die meiste Wahrscheinlichkeit für sich, dass ihre Grösse nach Verhältniss der Potenzen von zwei fortschreiten muss.

Bei der gedachten Zusammenlagerung der Atome bleibt, weil dabei nur eine Verwandlung strahlender Aussenflächen in strahlende Innenflächen eintritt, die spezifische Strahlenwärme unverändert. Bei festen oder flüssigen Körpern wird daher durch eine solche Gruppierung der Atome die experimentelle spezifische Wärme, wie auch das Volumen, nur wenig beeinflusst. Ist aber der Körper ein Gas, so wird dessen Volumen, weil es nur durch die Summe der Aussenflächen der Molekeln bedingt ist, durch Verdoppelung des Äquivalentgewichtes auf die Hälfte reducirt; Äquivalentgewicht und Dichte wechseln also proportional. Während die spezifische Strahlenwärme des Gases constant bleibt, ändern sich mit seiner Dichte zugleich dessen spezifische Wärmen bei constantem Volumen und bei constantem Drucke; beide (und mit ihnen k) werden kleiner, sind dann aber für ein gleiches Volumen grösser als bei einem thermisch einfachen Gase.

Bei der Bildung von Wasserdampf reduciren sich zwei Volume Wasserstoff durch Zusammenlagerung seiner Atome zu Molekeln und Verdoppelung seines Äquivalentgewichtes auf ein Volum, welches mit dem gleichen Volum Sauerstoff äquivalent ist und mit diesem zwei Volume Wasserdampf gibt. Eine Zusammenlagerung der ungleichartigen Atome ist bei der Einfachheit der Verhältnisse nicht annehmbar.

Die spezifische Strahlenwärme des Knallgases, aus derjenigen der Bestandtheile nach der Formel in §. 3 berechnet,

ist 0·248. Als spezifische Strahlenwärme des Wasserdampfes, dem Werthe von k gemäss $c_0 = \frac{1}{2} c$ gesetzt, ergibt sich nach der genannten Formel, mit vorigem Resultate fast zusammenfallend,

$$c + c_0 = 0\cdot249;$$

aus Regnault's Bestimmung der specifischen Wärme des Dampfes bei constantem Drucke folgt dieselbe $= 0\cdot254$.

§. 9. Die im vorigen beschriebene Art der Zusammenlagerung gleichartiger Atome lässt eine sehr einfache Modification zu. Es ist ohne Schwierigkeit denkbar, dass die zur Bildung eines grösseren Würfels zusammentretenden würfelförmigen Atome, anstatt zwischen sich noch dünne Ätherschichten übrigzulassen, sich unmittelbar, d. h. bei völligem Ausschluss des Äthers, mit ihren Würfelflächen aneinander legen. Ein so entstehendes Gebilde enthält nicht, wie ein festes Körperchen, eine Summe strahlender Innenflächen, dasselbe ist insoferne keine Molekel, sondern, indem es dem Äther gegenüber ein Continuum ausmacht, ein — nur grösseres — Atom; es mag ein Synatom heissen. Legen sich alle Atome einer Stoffmenge auf diese Weise zu je acht zusammen, so ist, wie im früheren Falle, das Äquivalentgewicht verdoppelt, aber es ist jetzt zugleich die strahlende Flächensumme der Atome und somit die spezifische Strahlenwärme des Stoffes auf die Hälfte vermindert, das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme bleibt also unverändert. Dass Zusammenlagerungen dieser Art wirklich vorkommen, scheint nicht zweifelhaft.

Das schönste Beispiel bietet das Wasser in seinen drei Aggregatformen dar. Die specifische Wärme des Eises ist sehr nahe die Hälfte von der des Wassers; dies erklärt sich, wenn man annimmt, dass beim Erstarren der Flüssigkeit die gleichartigen Atome eines jeden ihrer zwei Elemente sich zur Bildung der nächst grösseren Synatome zusammenlegen, während das Verhältniss $c_0 : c$ und somit die Art der thermischen Zusammengesetztheit des Wasserstoffs und die thermische Einfachheit des Sauerstoffs bestehen bleibt. Das Äquivalentgewicht des

Eises ist dann = 18, dasjenige des Wasserstoffs ist darin im Ganzen vervierfacht, das des Sauerstoffs verdoppelt.

Die spezifische Strahlenwärme des Wasserdampfes ist, wie gefunden wurde, nahe 0.250 oder $\frac{1}{4}$ von der des Wassers und die Hälfte von der des Eises. Man muss daher annehmen, dass beim Verdampfen das Äquivalentgewicht des Eises von neuem durch Bildung der nächst grösseren Synatome sich verdoppelt, das des Wassers aber sich sogleich vervierfacht, wobei wieder das Verhältniss $c_0 : c$ unverändert fortbesteht. Das Äquivalentgewicht des Dampfes ist dann = 36, dasjenige des thermisch zusammengesetzten Wasserstoffs in demselben ist im Ganzen verachtfacht und das des thermisch einfachen Sauerstoffs vervierfacht. Die specifischen Strahlenwärmen von Wasser, Eis und Dampf verhalten sich wie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ und ihre Äquivalentgewichte wie $9 : 18 : 36$, das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme bleibt daher in allen drei Aggregatformen unverändert = 9.

Aus der specifischen Wärme des Wassers berechnet sich diejenige des flüssigen Wasserstoffs = 6, die des flüssigen Sauerstoffs = $\frac{3}{8}$, welche Zahlen auch dem Gesetze von Dulong und Petit entsprechen. Nimmt man dies auch bei flüssigem Stickstoff an, so ist dessen specifische Wärme = $\frac{3}{7}$ und hieraus folgt diejenige der flüssigen Luft = 0.4161 . Nun ist aber

$$\frac{0.4161}{4} = 0.1040$$

sehr nahe dem Werthe 0.1030 gleich, der sich in §. 3 für die specifische Strahlenwärme der atmosphärischen Luft ergab; man muss daher schliessen, dass Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff bei dem Übergange aus der flüssigen in die Gasform ihr Äquivalentgewicht durch unmittelbare Aneinanderlagerung ihrer Atome vervierfachen, wobei ihre specifische Strahlenwärme sich auf den vierten Theil reducirt. Dann entspricht aber für die permanent gasförmigen Grundstoffe das

Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme (mit welcher bei den festen Grundstoffen die experimentelle nahe zusammenfällt) dem Gesetze von Dulong und Petit vollkommen und die Ausnahme, welche man diesbezüglich bisher statuiren musste, verschwindet gänzlich.¹

Da die Äquivalentgewichte der Gase allgemein ihren Dichten proportional sind, so müssen Quecksilber und Cadmium beim Verdampfen ihr Äquivalentgewicht verdoppeln, während Phosphor und Arsen es verachtfachen, und es gibt wahrscheinlich keinen einzigen Grundstoff, welcher ohne Vergrösserung seines Äquivalentgewichtes aus der festen oder flüssigen in die Gasform übergehen könnte. Die Existenz einatomiger Gase im Sinne der kinetischen Theorie erscheint hierdurch ausgeschlossen.

Schon oben wurde erwähnt, dass Chlorgas durch chemische Verbindung mit Wasserstoff einen Verlust an strahlender Fläche, $\frac{1}{3}$ der ganzen Summe betragend, erfährt; nach dem Vorigen ist dies leicht verständlich. Der wichtigste Fall solcher Art betrifft das Ammoniakgas. Dem Werthe von k gemäss ist für dasselbe, wie für Wasserdampf, $c_0 = \frac{1}{2} c$. Hieraus folgt aber, dass $\frac{1}{4}$ der ganzen strahlenden Flächensumme seiner Bestandtheile im freien Zustande durch ihre Verbindung verschwindet, und in der That verhält sich die specifische Strahlenwärme eines Gemenges der Bestandtheile zu derjenigen des Ammoniaks wie 4 : 3. Man kann sich von der Constitution dieses Gases, wie ich hier der Kürze wegen nur andeute, vollkommen Rechenschaft geben, wenn man annimmt, dass in demselben das Wasserstoffgas zu einem Drittel sein Äquivalentgewicht verdoppelt und zu zwei Dritteln es vervierfacht hat. Eine Verdreifachung des Äquivalentgewichtes scheint also nicht leicht zu Stande kommen zu können. Starre Verbindungen führen zu ähnlichen Schlüssen.

¹ Als Ausnahmen vom genannten Gesetze erscheinen dann nur noch einige, durch die Kleinheit der specifischen Wärme auffallende feste Grundstoffe (Kohlenstoff, Bor, Silicium); ihr Verhalten dürfte aber nach dem Obigen durch eine in denselben mit Abnahme der Temperatur fortschreitende Synatombildung vollständig erklärbar sein.

Der Nachweis, dass ein Grundstoff sein Äquivalentgewicht vervielfachen kann, ohne dass er deswegen aufhört, das Gesetz von Dulong und Petit zu erfüllen, ist auch für die Hypothese von Prout von grosser Bedeutung. In der gleichen Beziehung ist zu bemerken, dass das Äquivalentgewicht eines Stoffes, als Quotient aus Masse und Aussenfläche seiner Atome, nicht nothwendig unter allen Umständen völlig constant bleiben muss, und dass daher die Äquivalentgewichte, welche ein Stoff durch Zusammenlagerung seiner Atome annehmen kann, nicht nothwendig genau ganze Vielfache des kleinsten sind.

§. 10. Bei einem Überblicke der vorliegenden Abhandlung mag vielleicht am meisten die unerwartete Folgerung auffallen, dass in chemischen Verbindungen zwar sehr gewöhnlich die gleichartigen, aber in keinem Falle die ungleichartigen Atome zu engeren für sich bestehenden Systemen associirt sind, und dass es chemische Verbindungen gibt, welche sich bezüglich der Positionen der sie constituirenden Atome von einem blossen Gemenge der gleichen Bestandtheile durchaus nicht unterscheiden. Wenn diese Folgerung feststeht, so bleibt zur Erklärung des thatsächlich bestehenden Unterschiedes nur die Annahme übrig, dass der Übergang eines Gemenges zweier oder mehrerer Stoffe in den Zustand einer chemischen Verbindung wesentlich nicht durch eine Veränderung der Atompositionen, sondern durch eine Veränderung der Atome selbst bedingt sei, d. h. dass jedes Element, wenn es mit einem anderen sich chemisch verbindet, die innere Structur seiner Atome wechselt. Wirklich erklärt sich auf solche Weise am einfachsten der durch die Erfahrung bewiesene Satz, dass die Elemente, wenn sie in Verbindungen eingehen, ihr eigenthümliches Licht- und Wärmespectrum und ihr specifisches Refractionsvermögen in keinem Falle unverändert beibehalten. Man kann dabei sich die Vorstellung machen, dass die miteinander verbundenen Stoffe sich gegenseitig in einem die Substanz ihrer Atome betreffenden Zwangszustande erhalten, aus welchem nur die Lösung der Verbindung sie wieder befreit. Es ist dann auch voraus zu erwarten, dass, wenn ein Atom unter dem Zwange eines äusseren Einflusses seine Structur wechselt, dies nicht geschehen kann, ohne dass zugleich ein

Quantum Wärme entweder erzeugt oder verbraucht wird, und in der That gibt es keine chemische Verbindung, bei deren directer oder indirecter Herstellung nicht eine bestimmte charakteristische Wärmemenge entweder entwickelt oder verschluckt wird.

Die kaum zu bezweifelnde Identität der thermischen und der chemischen Äquivalenz dürfte beweisen, dass die chemisch wirksamen Kräfte der Atome ihre Ausgangs- und Angriffspunkte nicht in deren Massen, sondern an deren Aussenflächen haben, und dies würde zu der Vermuthung berechtigen, dass es andere chemisch wirksame Kräfte zwischen den Atomen, als die Strahlen, welche sie einander zusenden, nicht gibt. Für diese Auffassung spricht es auch, dass die chemischen Wechselwirkungen der Stoffe mit Abnahme der Temperatur im Allgemeinen schwächer werden und dass nach den diesbezüglich entscheidenden Versuchen von R. Pictet bei einer niedrigen Temperatur von ungefähr -125° selbst die gewöhnlich stärksten Reactionen ganz aufhören.

Schlussbemerkung.

Wie ich im Eingange dieser Darlegung erwähnte, hat mich zu derselben die Aufstellung und Verwerthung des Satzes veranlasst, dass eine Ätherwelle an einer sie auffangenden Fläche einen Druck erzeuge. Ich halte es nun zwar für zweifellos, dass eine solche Welle als fortbewegende Kraft wirken kann, dem aber, dass diese Kraft ein Druck sei, stimme ich keineswegs bei. Ich gestehe, mir nicht vorstellen zu können, wie in Wirklichkeit ein solcher Druck zu Stande kommen soll. Dagegen scheint mir nach naheliegenden Analogien die Anschauung begründet, dass transversale Ätherschwingungen in ihrer Fortpflanzungsrichtung naturgemäss einen Zug, d. h. eine ihrer Intensität proportionale Verminderung des Ätherdruckes erzeugen müssen. Dass man an die Möglichkeit eines Zuges nicht denkt, einen Druck aber für annehmbar hält, hat seinen Grund vielleicht in der Thatsache, dass Erwärmung der Körper fast immer deren Volumen auszudehnen strebt; ich glaube aber, dass diese Wirkung diffundirter Wärmestrahlen der Annahme einer

ziehenden Kraft derselben durchaus nicht widerspricht. Dies lässt sich leicht anschaulich machen.

Denkt man sich eine für Wärmestrahlen opake Platte beiderseits gleich stark bestrahlt, so halten die entsprechenden Ätherkräfte sich das Gleichgewicht. Bringt man aber neben diese Platte und zu ihr parallel eine zweite, so werfen beide einen Schatten aufeinander; beide sind dann auf den einander zugewendeten Seiten weniger stark bestrahlt als auf den Gegenseiten, sie werden folglich durch den an ersteren überwiegenden Ätherdruck auseinander, d. h. nach der Seite der stärkeren Bestrahlung getrieben.

In einem Gase gibt es für jedes Atom zwischen den übrigen eine Lage, in welcher es auf allen Seiten gleich stark bestrahlt ist; aus dieser verschoben, empfängt es auf Seite der momentan näheren Atome, welche ihm nun vermöge ihrer Opacität einen grösseren Theil der von weiterher kommenden Strahlen interceptiren, eine geringere Strahlenmenge als auf Seite der momentan ferneren Atome, dasselbe wird also durch die resultirende Kraft nach einer mittleren Lage zurückgetrieben, welche demgemäss eine Lage stabilen Gleichgewichtes ist. Alle Atome des Gases fliehen auf solche Weise einander; sie üben gegenseitig einen durch die allgemeine Strahlendiffusion und also durch den Äther vermittelten Druck aus, welcher mit Erhöhung der Temperatur und mit Verminderung des Gasvolumens an Stärke zunimmt.

Bezüglich der Resultate dieser Abhandlung scheint es mir zunächst und wesentlich auf den Fundamentalsatz, dass Wärmestrahlen als fortbewegende Kräfte wirken, nicht aber darauf anzukommen, ob diese Kräfte aus einer Vermehrung oder einer Verminderung des Ätherdruckes an ihren Angriffspunkten hervorgehen.

Die Apisperiode der alten Ägypter

von

Dr. Eduard Mahler.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1894.)

Die Literatur, welche sich die Untersuchung der uns vom classischen Alterthume her überlieferten grösseren Zeitkreise der Ägypter zur Aufgabe macht, ist seit den enormen Fortschritten, welche die Entzifferung der Hieroglyphentexte gemacht, und insbesondere seit der Entdeckung des Serapeums durch den französischen Forscher Mariette zu einer sehr umfangreichen geworden. Eine eingehendere Untersuchung haben namentlich Brugsch und Lepsius diesem Gegenstande gewidmet, und es war gewiss erfreulich, dass auch diese hervorragenden Ägyptologen auf Grund der Denkmälerberichte zu den Resultaten gelangten, welche lange Zeit vordem schon Ideler aus rein astronomisch-chronologischen Gründen annehmen zu müssen glaubte. Die 25jährige Apisperiode soll nach Annahme dieser Forscher keine andere sein, als die Periode von 25 Jahren zu 365 Tagen, nach deren Ablauf die Mondphasen an den nämlichen Tagen des Jahres in gleicher Ordnung periodisch wiederkehren. Welch' hohen Grad von Wahrscheinlichkeit diese Hypothese hat, beweist der Umstand, dass $25 \times 365 = 9125$ Tage, und 309 synodische Monate $= 309 \times 29 \cdot 53059 = 9124 \cdot 952$ Tage sind.

Warum hiess aber dann diese 25jährige Periode die »Apisperiode«? Warum haben die Ägypter eine Periode, die einen rein astronomischen Charakter hatte, mit dem heiligen Apisstiere in Verbindung gebracht?

Diese Fragen blieben bisher noch unbeantwortet und auch die Hypothese selber ist noch von keiner Seite näher begründet

worden, wiewohl sie durch mehrere dieses Gebiet berührende Untersuchungen in die Ägyptologie aufgenommen wurde.

Ideler war von der Richtigkeit seiner Annahme, dass die von den Classikern des Alterthums berichtete 25jährige Lebensdauer des Apis sich nur auf die 25jährige Mondperiode von 9125 Tagen beziehe, so durchdrungen, dass er, ohne zu ahnen, dass er gerade damit der Wahrheit am nächsten kam, den heiligen Apisstier als ein lebendiges Symbol des Mondes und seiner Periode bezeichnete. Freilich haben die ägyptologischen Forschungen, die man zur Zeit Ideler's noch nicht kannte, ergeben, dass die Berichte der Griechen bezüglich der Lebensdauer des Apis der Wahrheit nicht entsprechen, denn wir haben z. B. Apise mit 7, 16, 17, 18, 23 und 26 Lebensjahren (siehe: Lepsius, Sitzungsber. der königl. Akad. Berlin, 1856, S. 316—317). Es kann sonach die Lebensdauer des Apis gewiss nicht der Grund gewesen sein für die Benennung der 25jährigen Mondperiode als »Apisperiode«. Woher also dieser Name?

Im Folgenden wird nun diese Frage beantwortet und zugleich der erste wissenschaftliche Nachweis für den rein astronomischen Charakter dieser Periode gegeben. Indem ich von dem festen Siriusjahre, welches ich auf Grund zahlreicher Belege als die alleinige Grundlage des im alten Ägypterreiche üblich gewesenenen Kalenders annehme und welches selbst zur Zeit der Ptolemäer noch den Tempelinschriften und religiösen Datirungen als Normaljahr zu Grunde lag (siehe Decret von Kanopus), ausging, reconstruirte ich mehrere von Lepsius und Brugsch uns mitgetheilte Apisdaten derart, dass ich das für den Tag der Inthronisation der heiligen Apisthiere überlieferte ägyptische Datum auf das julianische reducirte; dabei ergibt sich die merkwürdige Erscheinung, dass diese heiligen Thiere stets am Vollmondstage inthronisirt wurden. Nachdem dann noch auf Grund des uns bekannten inschriftlichen Materials der Nachweis geführt wird, dass man den Gott Osiris, als dessen lebendiges Symbol der Apis erachtet wurde, mit dem Vollmond identificirt hat, und wir sonach zufolge der vorliegenden inschriftlichen Urkunden folgern müssen, Apis = Osiris = Vollmond, so war damit nicht nur die

schon von Ideler vermuthete Thatsache gefunden, dass die Apisperiode einen rein astronomischen Charakter hatte und die 25jährige Mondperiode von 9125 Tagen bezeichnete, sondern auch die Erklärung gefunden, warum man dieselbe »Apisperiode« genannt hatte.

Bei dem historischen Entwicklungsgange, welchen die Jahrform der alten Ägypter zufolge ihres scharfen Beobachtungstriebes in naturgemässer Weise befolgen musste (zuerst das reine Mondjahr, dann das Jahr mit 12 dreissigtägigen Monaten, später das Sonnenjahr mit 12 dreissigtägigen Monaten + 5 Zusatztagen und endlich das Siriusjahr mit $365\frac{1}{4}$ Tagen), ist es wohl selbstverständlich, dass ihnen die Thatsache nicht entgehen konnte, dass nach je 25 Jahren in der Dauer von 365 Tagen die einzelnen Mondphasen wieder auf denselben Tag des Jahres periodisch wiederkehren. Denn es ist: $25 \times 365 = 9125$ Tagen und $309 \times 29.53059 = 9124.95231$ Tagen, so dass erst nach 20 solchen 25jährigen Perioden, d. i. nach 500 Jahren die Differenz 1 Tag ausmacht.¹ Es ist unter solchen Umständen leicht erklärlich, dass die Ägypter auch in der späteren Epoche ihrer Reichsgeschichte, wo schon die Dauer des festen Siriusjahres nicht nur gekannt, sondern auch praktisch verwerthet wurde, ihren astronomischen Rechnungen diese Periode und ein Jahr von 365 Tagen zu Grunde legten.

Besonders gute Dienste leistete diese 25jährige Periode zur Berechnung und Controlirung der einzelnen Mondtage und namentlich des Vollmondtages, an dem nach ägyptischer Auffassung der Mond sich erneute oder verjüngte.

So lesen wir (Brugsch, Thesaurus, I. Abth.):

1. (S. 30): »Leben und Erneuerung findet in Ewigkeit hin statt; der Mond kehrt zurück an seine Stelle und das Vollmondauge ist ausgestattet mit seiner Herrlichkeit«.

2. (S. 34): »das sind die Götter, welche verherrlichen das Mondauge, wenn es erneut seinen Kreislauf am 15. Tage des Mondmonates«.

¹ Es ist daher die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass gerade dieser 500jährige Zeitraum die sogenannte »Phönixperiode« bildete.

3. (S. 35): »das Mondauge (der Vollmond) ist unverseht und es ist ausgestattet mit seinen Herrlichkeiten zum Segen; es ist gefeit und es verjüngt sich allmonatlich.

4. (S. 38): »Der Himmel ist in Festesfreude, indem er die Gestalt des Vollmondes trägt«.

5. (S. 45): »Ausgefüllt ist das Vollmondauge am 15. Tage des Mondmonates« u. s. w.

Der Vollmondtag war aber auch einem anderen religiösen Feste gewidmet. Die Einführung des heiligen Apisstieres in das Apieum zu Memphis, also die Inthronisation dieses heiligen Thieres als lebendes Symbol der Seele des Gottes Osiris auf Erden, fand stets am Vollmondtag statt. Diese Thatsache, welche trotz der bezüglichen Berichte der Denkmäler bisher noch nicht erkannt wurde, findet ihre Bestätigung durch Belege, welche sich vermöge der uns erhaltenen Apisdaten durch die Rechnung leicht reconstruiren und prüfen lassen.

A. Das erste Datum, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, ist das der Einführung des Apisstieres im 31. Regierungsjahre Königs Ptolemäus Euergetes II. Seine näheren Daten sind:¹

Jahr	Monat	Tag	König
		Geburt:	
XXVIII	Tybi	24	Ptol. Euergetes II.
		Einführung in Memphis:	
XXXI	Thoth	23	Ptol. Euergetes II.

Es war also:

24. Tybi d. J. XXVIII bis 24. Tybi d. J. XXIX = Jahr I des Apis
 24. Tybi d. J. XXIX bis 24. Tybi d. J. XXX = Jahr II des Apis
 24. Tybi d. J. XXX bis 24. Tybi d. J. XXXI = Jahr III des Apis

¹ Diese sowie die folgenden hier erörterten Apisdaten sind entnommen der Arbeit von Lepsius in den Abhandlungen der königl. preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin vom Jahre 1856, betitelt: »Über die XXII. ägyptische Königsdynastie...«.

Nachdem aber selbst in der Ptolemäerzeit noch den Tempelinschriften und religiösen Datirungen das Sothisjahr als Normaljahr zu Grunde lag, so erhält man als entsprechende Daten im julianischen Kalender:

10. December d. J. 143 v. Chr. bis 10. December 142 v. Chr. =
= Jahr I des Apis = Jahr 28/29 Ptol. Euergetes II.

10. December d. J. 142 v. Chr. bis 10. December 141 v. Chr. =
= Jahr II des Apis = Jahr 29/30 Ptol. Euergetes II.

10. December d. J. 141 v. Chr. bis 10. December 140 v. Chr. =
= Jahr III des Apis = Jahr 30/31 Ptol. Euergetes II.

Es ist daher das Datum der Einführung des Apisthieres in Memphis:

23. Thoth d. J. XXXI Ptol. Euergetes II. = 11. August 140 v. Chr.

Nun wissen wir, dass zur Zeit der Ptolemäerherrschaft der graeco-macedonische Einfluss in Ägypten so mächtig war, dass sogar die Könige, um sich beim Volke verständlich zu machen, in ihren Decreten nach dem graeco-macedonischen Kalender datiren mussten. Daher auch die Doppeldaten aus dieser Epoche. (Siehe z. B. Decret von Kanopus).

Diesem Kalender zufolge fiel im Jahre 140 v. Chr. der 29. Juli julianisch auf den $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Metageitnon} \\ = 1. \text{ Lous} \end{array} \right\}$ Ol. 160, I, und daher entsprach der 11. August (= 42. Juli) dieses Jahres dem 14. Metageitnon = 14. Lous. Da aber der Metageitnon dieses Jahres ein hohler Monat, d. i. 29tägig war, so fiel die Dichomenie auf den 14. Tag, d. h. »der 11. August des Jahres 140 v. Chr. = 23. Thoth des Jahres XXXI Ptol. Euerg. II. der Tag der Einführung des Apis in das Apieum zu Memphis, war ein Vollmondtag«.

B. Eine andere Stele berichtet von der Inthronisation eines Apis im:

Jahr	Monat	Tag	des Königs
V	Payni	18	Amasis

Amasis regierte bekanntlich 570—526 v. Chr. Es ist daher
Jahr V = 566/5 v. Chr. und sonach

Jahr V, Payni 18 (im Normaljahr) = 565 v. Chr., Mai 3.

Am 2. Mai 565 v. Chr., um $14^h 9 \cdot 6^m$ mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. i. etwa $4\frac{1}{4}^h$ Nachmittag mittlere Memphiser Zeit trat die Vollmondsphase ein; es war also am Abend dieses 2. Mai die Vollmondscheibe sichtbar, und der mit diesem Abende beginnende Montag, welcher dem julianischen 3. Mai, dem Tage der Einführung des heiligen Apis in den Tempel zu Memphis entsprach, war sonach in der That ein Vollmondtag.

C. Eine dritte Stele erzählt uns die Inthronisation eines Apis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
I	Epiphi	9	Psametik II.

Jahr I des Königs Psametik II ist das Jahr 595/4 v. Chr.
Es ist daher

Jahr I, Epiphi 9 Königs Psam. II. = 594 v. Chr., Mai 24.

Nun zeigt die Rechnung, dass am 23. Mai des Jahres 594 v. Chr. um $19^h 26 \cdot 4^m$ mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. i. in der Nacht vom 23. Mai auf den 24. Mai, etwa $2\frac{1}{2}$ Stunden vor der mittleren Memphiser Mitternacht die Vollmondsphase eingetreten war; es war somit der 24. Mai des Jahres 594 v. Chr. in der That der Vollmondtag.

D. Eine andere Stele berichtet von der Einführung eines Apis in das Heiligthum zu Memphis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXIV	Pharmuthi	9	Taharka.

Wir wissen bereits, dass

das Jahr 595/4 v. Chr. = Jahr I Psametik II.,
also ist das Jahr 596/5 v. Chr. = Jahr XVI Nekau II.,
und daher das Jahr 611/0 v. Chr. = $\left\{ \begin{array}{l} \text{Jahr I Nekau II.,} \\ \text{Jahr LIV Psametik I.} \end{array} \right.$

Dann war aber:¹

das Jahr 664/3 v. Chr. = Jahr I Psametik I.

das Jahr 665/4 v. Chr. = Regierungsjahr Königs Rut-Amunmi.

das Jahr 666/5 v. Chr. = Jahr XXVIII oder letztes Jahr von
Taharka


und daher

das Jahr 668/7 v. Chr. = Jahr XXVI Taharka.

Der 1. Thoth des in diesem Jahre (668 v. Chr.) beginnenden Siriusjahres fiel (siehe weiter unten, Anhang S. 844) auf den 19. Juli julianisch. Auch war das betreffende Siriusjahr ein Schaltjahr von 12 dreissigtägigen Monaten +6 Ergänzungstagen. Dem 9. Pharmuthi des XXVI. Regierungsjahres Königs Taharka entsprach daher der 22. Februar des Jahres 667 v. Chr.

Um 8^h 24^m mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. h. etwa 10^h 30^m Vormittag Memphiser Zeit des 21. Februar 667 v. Chr. traf die Vollmondsphase ein, am Abende dieses Tages zeigte sich daher die Vollmondscheibe und es war sonach der folgende Tag, d. i. der 22. Februar, der Tag der Inthronisation des Apis, der Vollmondtag.

E. Besondere Beachtung verdient die folgende Thatsache. Der Apis, welcher im Jahre XXXI Königs Ptol. Euergetes II. zu Memphis inthronisirt wurde, ist nach dem Zeugnisse mehrerer Steleninschriften in Memphis geboren worden. Mit dem Tempel des heiligen Apisstieres war bekanntlich auch ein

»Zeugungshaus«,  genannt, verbunden. Aus diesem war der im Jahre XXXI Königs Ptol. Euergetes II. gekrönte Apis als Sohn der Kuh Kerka (siehe Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1884) hervorgegangen, und zwar im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXVIII	Tybi	24	Ptol. Euergetes II.

Selbstverständlich musste die Geburt eines Apis im Tempel zu Memphis den Ägyptern als ein besonderes glückliches

¹ Diese Angaben stimmen auch vollkommen mit Haigh (Egyptian genealogis, Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1869, S. 47).

Ereigniss erscheinen, und es ist nur natürlich, wenn sie in einem solchen Falle die Geburt dieses Apis als seine erste Einführung in den Tempel erachteten. Dann aber musste das vermerkte Datum der Geburt einem Vollmontage entsprechen, und dies ist auch wirklich der Fall. Das XXVIII. Regierungsjahr Ptol. Euergetes II. ist das Jahr 143/2 v. Chr., der 24. Tybi (Normaljahr) ist der 10. December, es ist also

Jahr XXVIII, Tybi 24 = 143 v. Chr., December 10,

und in der That ein Tag der Vollmondsphase.

F. Es wird ferner von der Inthronisation eines Stieres berichtet, welche statthatte in Memphis im¹

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXI	Thoth	20	Ptol. V. Epiphanes.

Wird auch diesem Datum das feste Siriusjahr zu Grunde gelegt, dann ist


1. Thoth d. J. I Königs Epiphanes = 20. Juli 203 v. Chr.,

1. Thoth d. J. XXI Königs Epiphanes = 20. Juli 183 v. Chr.,

und daher

20. Thoth d. J. XXI Königs Epiphanes = 8. August 183 v. Chr.

Da aber der 23. August dieses Jahres dem graeco-macedonischen 1. Gorpiäus (1. Boëdromion Ol. 149 II) entsprach, so war der 8. August, der Tag der Inthronisation des heiligen Apis, 15 Tage vor der Numenie des Monates Gorpiäus, und daher ein Vollmontag.

(Damit findet eine höchst scharfsinnige Correctur Prof. Brugsch's ihre Bestätigung. Auf S. 136 des 22. Jahrganges der Zeitschrift für ägyptische Sprache, woselbst Brugsch den »Apiskreis aus der Zeit der Ptolemäer« eingehend erörtert, macht unser Grossmeister auf dem Gebiete ägyptologischer Forschung folgende Bemerkung: »In dem Datum vom Jahre XXI (Lin. 8) ist die Zahl des Monatstages  incorrect geschrieben.

¹ Siehe Brugsch's »Der Apiskreis unter den Ptolemäern«, Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1884, S. 136.

Wir ergänzen die beiden Striche wiederum zu einem I und lesen **nn** »Tag 20«).

G. Eine andere Stele berichtet von der Einführung eines Apis in das Heiligthum von Memphis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXIX	Paophi	1	Šešonk III.

Šešonk III. war der Nachfolger von Thakelat II. Am 25. Mesori des Jahres XV dieses Königs fand eine in Ägypten sichtbare totale Mondfinsterniss statt; es ist dies (siehe des Verfassers Untersuchungen in den Denkschriften der Wiener Akad., 1887) die Finsterniss vom 9. Juli des Jahres 829 v. Chr. Thakelat II. regierte 15 Jahre; Šešonk III. kam sonach im Jahre 828 v. Chr. zur Regierung.¹ Es ist also

1. Paophi d. J. XXIX Šešonk III. = 1. Paophi d. J. 800 v. Chr.

Der 1. Thoth des in diesem Jahre beginnenden Siriusjahres fiel (siehe Seite 844) auf den 19. Juli. Dann war aber der 1. Paophi dieses Jahres, d. i. der Tag der Inthronisation des Apis = 18. August des Jahres 800 v. Chr. Und nachdem am Abende des 17. August dieses Jahres die Vollmondscheibe sichtbar war, so musste der mit diesem Abende beginnende Montag als Vollmondtag bezeichnet werden. Es war daher in der That der 1. Paophi des Jahres XXIX Königs Šešonk III., entsprechend dem 18. August des Jahres 800 v. Chr., ein Vollmondtag.

Aber auch den Denkmälerberichten ist diese für die Culturgeschichte Altägyptens gewiss bedeutungsvolle Thatsache direct zu entnehmen.

Es ist ja bekannt, dass der Apis allenthalben in Ägypten als das lebende Symbol des Osiris aufgefasst wurde und dass der Cult der Osirisseele mit dem des Apis eng verknüpft war.

¹ Zum gleichen Resultate kommt auf anderem Wege Dr. Haigh (siehe dessen Aufsatz: »Egyptian genealogies« in Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1866, S. 46, Zeile 2 von unten).

Plutarch (de Iside C. 29) sagt:

»Die meisten der Priester sagen übereinstimmend aus, dass der Osiris und der Apis eng verbunden seien, indem sie ausführen und lehren, dass wir den Apis als das Ebenbild der Seele des Osiris halten müssen«.


Eine zehnzeilige Hieroglypheninschrift (die bilingue Stele des Châhap im ägyptischen Museum zu Berlin, Zeitschrift für ägyptische Sprache, 1884, S. 102) beginnt also:

»Die königliche Opfergabe, wohlgefällig dem Ptah-Sokaris-Osiris, dem grossen Gotte, dem Herrn der Krypte, dem Apis-Osiris, dem Xent der Amenthes, dem Herrn der Ewigkeit...«

Nun bezeugen aber die astronomischen Inschriften, die wir in der vortrefflichsten Übersicht in Brugsch's »Thesaurus inscriptionum aegypticarum« zusammengestellt finden, dass der »Osiris« mit dem »Vollmond« in innigster Verbindung war.

Wir lesen daselbst (p. 30):

»In einer anderen Barke (an der Nordseite der Decke im Pronaos des Tempels von Dendera), welche unmittelbar dem Sonnenschiffe folgt, zeigt sich das Auge des Vollmondes in

der Gestalt , dem der ibisköpfige Thuti-Thot seine Huldigung auszudrücken scheint. Vor dem Schiffe des Mondes befindet sich folgende Inschrift: „Leben und Erneuerung findet in Ewigkeit hin statt; der Mond kehrt zurück an seine Stelle und das Vollmondauge ist ausgestattet mit seiner Herrlichkeit“. Ein drittes Schiff zeigt das Bild des thronenden Osiris mit Krone und Scepter. Vor ihm fünf Sterne. Ein vierzeiliger Text belehrt darüber: „Osiris-Onnophris, der Triumphator, er hat sich vereint mit dem Vollmondauge“.

Ein anderer Text (p. 38 daselbst) lautet in Übersetzung also:

»Der Himmel ist in Festesfreude, indem er die Gestalt des Vollmondes trägt. Die Seelen der Götter treten in ihm zum Vorschein und Osiris geht leuchtend auf in ihm als Mondgott«.

Eine andere Stelle (p. 40 in Thesaurus von Brugsch) erzählt uns, dass die Stadt Tentyra sich der Freude hingibt

wenn »die herrliche Seele des Gottes Osiris sich allmonatlich verjüngt, um den Vollmond in Besitz zu nehmen«.

Gleichfalls an der Nordseite der Decke im Pronaos des Tempels von Dendera zeigt ein Bild eine Apotheose des Osiris als Mondgott. Osiris thront in einem Schiffe und über ihm ist folgende Inschrift:

»Osiris-Onnophris, der Triumphator, ist eingetreten in das Mondauge am 15. Tage des Mondmonates« u. s. f.

Es ist also nicht erst die Rechnung, welche uns das wichtige Resultat verkündet, dass die Krönungsfeierlichkeit des heiligen Apisstieres in Memphis zur Zeit des Vollmondes erfolgte, schon die monumental beglaubigten Inschriften weisen in beredter Sprache darauf hin.

Es ist wohl bekannt, dass die Ägypter mit besonderer Vorliebe nicht nur ihre religiösen Satzungen, sondern auch ihre wissenschaftlichen Thesen, mögen diese die Mathematik, Medicin oder Astronomie betroffen haben, in gewisse mysteriöse Formeln zu fassen beliebten, die nicht für jedermann verständlich waren. Wer nicht mit den Eigenheiten der ägyptischen Denk- und Sprachweise vollkommen vertraut war, konnte da sehr leicht auf Irrwege gerathen. Und daher kommt es auch, dass selbst ein Herodot uns über Dinge zu berichten weiss, die in den uns erhaltenen Denkmälerinschriften nirgends Bestätigung finden. Die Priester haben den nach Ägypten gekommenen Fremden zweifellos Einiges vom Apiscult berichtet, ihre Aussagen aber in wohlerwogene Formeln gekleidet, die dann, in wörtlicher Bedeutung genommen, für den mit ägyptischer Cultur und ägyptischen Sitten völlig Unvertrauten noch immer unverständlich waren. Gar Vieles ist also über den Apiscult in den Schriften der Griechen und Römer überliefert worden, was mit den Berichten der Denkmäler in directem Widerspruche ist. Nirgends finden wir die 25-jährige Apisperiode als solche chronologisch verwerthet, denn Niemand hat nach Jahren einer solchen Periode datirt. Und wenn Ideler in ihr eine astronomische Periode erblickte, so hat er wohl das Richtige getroffen; aber auch er

irrte noch, indem er meinte, der Name »Apisperiode« käme daher, weil man die Lebensdauer des Apisstieres nach ihr festsetzte. Die ganze Periode ist einfach eine rein astronomische, welche 25 damals in der rechnenden Astronomie gebräuchliche 365tägige Jahre umfasste, nach deren Ablauf in periodischer Wiederkehr mehrere Jahrhunderte hindurch die einzelnen Mondphasen auf denselben Tag dieses 365tägigen astronomischen Jahres trafen.

Diese Thatsache haben die alten Ägypter, welche den Himmel mit peinlichster Sorgfalt beobachteten, frühzeitig wahrgenommen und haben die so entstandene Periode von 25×365 Tagen dazu benutzt, um nach ihr die Apisvollmonde, an denen — wie oben gezeigt wurde — die Inthronisation der Apisstiere statthaben sollte, zu regeln und zu bestimmen. Daher also der Name »Apisperiode« = »Mondperiode«.

A n h a n g.

Zur näheren Erläuterung einiger hier vorgebrachten Daten sehe ich mich veranlasst, auf die schon anderweitig (Transactions of the IX. Congress of the Orientalist's, vol. II, p. 323) angedeutete Thatsache hinzuweisen, dass zufolge unserer heutigen astronomischen Anschauungen innerhalb der im Jahre 1318 v. Chr. beginnenden Sothisperiode eine viermalige Reorganisation des Sothiskalenders nöthig war und wir daher innerhalb dieser Zeit fünf verschiedene Kalender in Betracht ziehen müssen.

I.

Von —1317 bis —893 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Sothisjahres
— $4n$	Juli 19	Gemeinjahr
— $(4n+3)$	19	Gemeinjahr
— $(4n+2)$	19	Schaltjahr
— $(4n+1)$	20	Gemeinjahr

II.

Von —892 bis —537 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Siriusjahres
— $4n$	Juli 19	Gemeinjahr
— $(4n+3)$	19	Schaltjahr
— $(4n+2)$	20	Gemeinjahr
— $(4n+1)$	20	Gemeinjahr

III.

Von —536 bis —236 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Siriusjahres
— $4n$	Juli 19	Schaltjahr
— $(4n+3)$	20	Gemeinjahr
— $(4n+2)$	20	Gemeinjahr
— $(4n+1)$	20	Gemeinjahr

IV.

Von —235 bis +36.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Siriusjahres
— $4n$ und + $4n$	Juli 20	Gemeinjahr
— $(4n+3)$ u. + $(4n+1)$	20	Gemeinjahr
— $(4n+2)$ u. + $(4n+2)$	20	Gemeinjahr
— $(4n+1)$ u. + $(4n+3)$	20	Schaltjahr

V.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Sothisjahres
$4n$	Juli 20	Gemeinjahr
$4n+1$	20	Gemeinjahr
$4n+2$	20	Schaltjahr
$4n+3$	21	Gemeinjahr

Elektrochemische Untersuchungen

(IV. Mittheilung)

von

Prof. **Franz Exner**,

c. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

§. 14. Über Concentrationsströme.

Aus den Tabellen der vorangegangenen Mittheilungen,¹ welche sich auf die Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Lösungen einerseits und zwischen verschieden concentrirten Lösungen anderseits beziehen, lassen sich alle jene Werthe entnehmen, die zur Charakteristik der sogenannten Concentrationselemente nöthig sind; unter letzteren sind im Allgemeinen solche Combinationen verstanden, bei welchen zwei Elektroden aus dem gleichen Metall in verschieden concentrirte Lösungen ein und desselben Salzes tauchen, abgesehen davon, ob letzteres das Elektrodenmetall, oder ein anderes als Kation enthält. Bezeichnen F_1 und F_2 die beiden Lösungen, so ist die ganze elektromotorische Kraft eines solchen Elementes durch die Summe $M|F_1 + F_1|F_2 + F_2|M$ gegeben und diese Summe lässt sich aus den oben erwähnten Tabellen entnehmen.

Dabei zeigt sich, dass diese Summe sehr wesentlich durch die Grössen $M|F_1$, respective $F_2|M$ bedingt ist, d. h. dass die Kraft einer solchen Combination keineswegs, wie dies häufig angenommen wird,² in erster Linie oder gar ausschliesslich vom Werthe $F_1|F_2$ abhängt; ändert man die Concentration

¹ Diese Sitzber., Bd. C, S. 607, und CI, S. 627 und 1436.

² Vergl. z. B. J. Moser, Monatshefte für Chemie, Bd. VI.

von F_1 , so ändert man damit nicht nur die Grösse $F_1|F_2$, sondern auch $M|F_1$. Aus der beobachteten Gesamtkraft eines solchen Elementes kann man somit durchaus keinen Schluss auf den Werth $F_1|F_2$ ziehen, und es ist klar, dass eine Berechnung dieses Werthes sich durch Beobachtung der Gesamtkraft nicht controliren lässt. Es kann vorkommen, dass der Werth $F_1|F_2$ kleiner, oder dass er grösser ist als letzterer; auch kann das Vorzeichen ein entgegengesetztes sein, so dass durch eine derartige Bestimmung selbst der Sinn des Concentrationsstromes falsch ermittelt wird.

Ich gebe im Folgenden drei typische Beispiele dieses Verhaltens, für welche die Zahlen aus §. 8 der II. Mittheilung entnommen sind.

1. **Zn in ZnSO_4 .** Die beiden Lösungen waren die an obiger Stelle mit I und III bezeichneten und enthielten $18 \cdot 4\%$, resp.

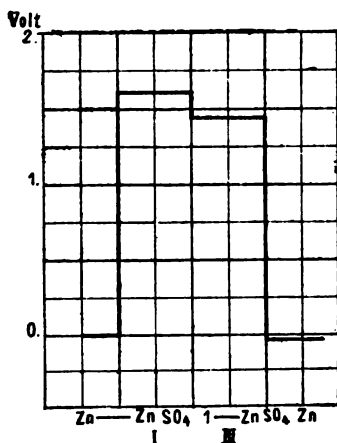


Fig. 1.

1% des negativen Jons (SO_4). Fig. 1 stellt das Diagramm des offenen Elementes dar; es wirkte hier die Kraft $F_1|F_2$ in gleichem Sinne, wie die Gesamtkraft E , doch ist letztere sehr viel kleiner als erstere.

In Zahlen ausgedrückt ergibt sich Folgendes:

$$E = \text{Zn} | \text{I} + \text{I} | \text{III} + \text{III} | \text{Zn}$$

und da nach dem Früheren in Volt

$$\text{Zn}|\text{I} = 1.61$$

$$\text{I}|\text{III} = -0.15$$

$$\text{III}|\text{Zn} = -1.48$$

ist, so folgt $E = -0.02$ Volt; die thatsächliche Kraft $F_1|F_2$ ist also hier siebenmal so gross als die beobachtete Gesamtkraft des Elementes.

Ein aus zwei Gefässen a und b , die mit den Lösungen I und III gefüllt und durch einen capillaren Bügel verbunden waren, zusammengestelltes Element wurde zum Vergleiche mit obigen untersucht, und zwar sowohl im offenen, wie im geschlossenen Zustande; in letzterem Falle wurden die beiden Zn-Elektroden direct mit einander metallisch verbunden. Es ergab sich offen (am Elektrometer) $E = -0.025$, in genügender Übereinstimmung mit obigem Werthe.

Um das Element auch in geschlossenem Zustande zu untersuchen, wurde der die Elektroden verbindende Bügel an's Elektrometer, und die Flüssigkeiten in a und b durch das System $\text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}$ (wie bei vielen früheren Messungen) zur Erde geleitet.

Es ergaben sich so die Werthe

$$\text{wenn } a \text{ abgeleitet} \dots\dots\dots -1.065$$

$$\text{wenn } b \text{ abgeleitet} \dots\dots\dots -1.091.$$

Die Differenz — also in diesem Falle die ganz in den capillaren Bügel fallende Gesamtkraft E — betrug -0.026 .

Berechnet man diese Einzelwerthe nach den früher gefundenen Zahlen, so ergibt sich für a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{I} = 0.54 \\ \text{I}|\text{Zn} = -1.61 \end{array} \right\} = -1.07$$

und für das Gefäss b :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{III} = 0.39 \\ \text{III}|\text{Zn} = -1.48 \end{array} \right\} = -1.09,$$

also wieder in Übereinstimmung mit den für a und b direct beobachteten Werthen; die Gesamtdifferenz beträgt auch hier wieder -0.02 Volt.

2. **Mg in MgSO_4** (Fig. 2). Die hier verwendeten Lösungen I und III enthielten denselben Procentgehalt an SO_4 , wie die früheren; wie Fig. 2 zeigt, ist aber jetzt die Kraft $F_1|F_2$ der Gesamtkraft E entgegengesetzt gerichtet, so dass man aus Beobachtung der letzteren allein einen ganz falschen Schluss auf die Richtung der ersteren ziehen würde.

Bei directer Messung des offenen Elementes wurde gefunden:

$$E = 0.221.$$

Die Berechnung nach den Zahlen des §. 8 ergibt dafür:

$$\text{Mg}|I = 2.44$$

$$I|III = -0.08$$

$$III|\text{Mg} = -2.12$$

oder $E = 0.24$, was mit obigem Werth in Anbetracht des Umstandes genügend übereinstimmt, dass einzelne dieser Werthe

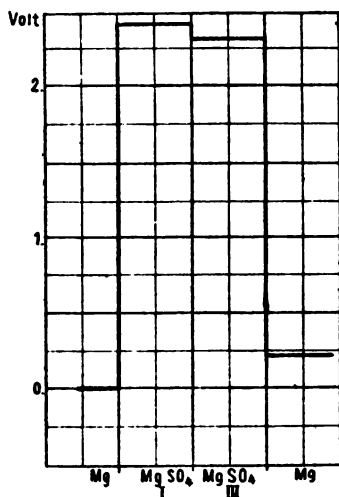


Fig. 2.

nur durch Beobachtung mit einer frei tropfenden Quecksilber-electrode gewonnen werden können, bei welcher Methode Fehler von einigen Hunderteln Volt kaum zu vermeiden sind.

Für den Fall des geschlossenen Elementes wurde nach derselben Methode wie beim ZnSO_4 , gefunden:

wenn das Gefäß a abgeleitet war -1.868 ,

wenn das Gefäß b abgeleitet war -1.657 .

Die Differenz von 0.211 Volt steht mit dem direct beobachteten Werth 0.221 und dem berechneten $E = 0.24$ zwar nicht in guter, aber immerhin in genügender Übereinstimmung.

Die Einzelpotentiale bei Ableitung der Gefäße a und b berechnen sich nach den Zahlen des §. 8 wie folgt.

Für a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{I} = 0.47 \\ \text{I}|\text{Mg} = -2.44 \end{array} \right\} = -1.97.$$

Für b :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{III} = 0.39 \\ \text{III}|\text{Mg} = -2.12 \end{array} \right\} = -1.73$$

oder $E = 0.24$ wie oben; es stimmen diese Einzelwerthe hier weniger gut mit den beobachteten, als bei ZnSO_4 .

Dass der Hauptgrund dieser Fehler wie schon erwähnt in der schwierigen, mit der freien Tropfelektrode ausgeführten Messung der Werthe $\text{I}|\text{III}$ zu suchen sei, das beweist die viel bessere Übereinstimmung in Fällen, wo die Werthe $F_1|F_2$ gegen die anderen verschwindend sind, wie aus den folgenden Zahlen erhellt, die sich auf die Lösungen II (8% SO_4) und III des MgSO_4 mit Mg-Elektroden beziehen.

In diesem Falle gab das offene Element direct 0.191 Volt, während die Berechnung aus den Zahlen des §. 8 dafür liefert:

$$\begin{array}{l} \text{Mg}|\text{II} = 2.32 \\ \text{II}|\text{III} = 0.00 \\ \text{III}|\text{Mg} = -2.12 \end{array}$$

oder $E = 0.20$.

Für das geschlossene Element wurde gefunden:

bei Ableitung in a -1.914 ,

bei Ableitung in b -1.716 .

Die Differenz ist 0.198 . Für die Einzelwerthe von a und b berechnet sich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{II} = 0.39 \\ \text{II}|\text{Mg} = -2.32 \end{array} \right\} = -1.93$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{III} = 0.39 \\ \text{III}|\text{Mg} = -2.12 \end{array} \right\} = -1.73$$

und daraus der obige Werth $E = 0.20$.

3. **Zn in Na_2CO_3** (Fig. 3). Als dritten Typus endlich wähle ich Zn in verschieden concentrirten Lösungen von Na_2CO_3 ; hier stimmt die Richtung des eigentlichen Concentrationsstromes $F_1|F_2$ mit der des Gesamtstromes E überein, aber an

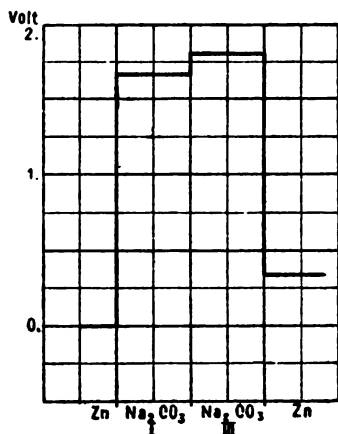


Fig. 3.

Grösse bleibt derselbe wesentlich hinter letzterem zurück. Die Lösungen I und III enthielten 5% , beziehungsweise 0.02% CO_3 . Das offene Element gab $E = 0.30$ Volt. Berechnet man E aus den Einzelwerthen, so erhält man:

$$\text{Zn}|\text{I} = 1.68$$

$$\text{I}|\text{III} = 0.12$$

$$\text{III}|\text{Zn} = -1.46$$

oder $E = 0.34$.

Als Einzelwerthe im geschlossenen Elemente wurde gefunden:

bei Ableitung in *a* -1.350

bei Ableitung in *b* -1.070 ,

was einen Werth $E = 0.28$ ergeben würde.

Die Berechnung obiger Einzelwerthe ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{I} = 0.27 \\ \text{I}|\text{Zn} = -1.68 \end{array} \right\} = -1.41$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cu}|\text{CuSO}_4|\text{H}_2\text{O}|\text{III} = 0.39 \\ \text{III}|\text{Zn} = -1.46 \end{array} \right\} = -1.07,$$

welche Werthe mit den direct beobachteten Potentialen bei Ableitung in *a* und *b* genügend übereinstimmen.

Aus dem Vorstehenden ersieht man, dass aus der Gesamtkraft eines Concentrationselementes durchaus kein Schluss, nicht einmal ein qualitativer, auf die Potentialdifferenz der beiden Flüssigkeiten gezogen werden kann.

§. 15. Über die Temperaturcoefficienten galvanischer Elemente.

In meinen Untersuchungen über die Natur der galvanischen Polarisation¹ habe ich den Nachweis geliefert, dass die elektromotorische Kraft der Polarisation sich mit der Wärmetönung des elektrolytischen Processes deckt, mit anderen Worten, dass dieselbe ihren Grund in der Wiedervereinigung der ausgeschiedenen Ionen hat; diese Ansicht, die der damals herrschenden von einer Änderung der Contactkraft an den Elektroden zuwiderlief, ist jetzt allgemein angenommen und es ergeben sich aus derselben einige Consequenzen, auf die im Folgenden noch kurz eingegangen werden soll.

Wenn die Polarisation durch die Wärmetönung des elektrolytischen Processes bestimmt und gemessen ist — wie dies bei allen glatt verlaufenden Reactionen zutrifft — so muss zur Zersetzung eines Elektrolyten auch eine bestimmte Kraft erforderlich sein; diese, das sogenannte Polarisationsmaximum, zeigt

¹ Diese Sitzungsber., Bd. 78 (1878).

sich im Allgemeinen veränderlich je nach den Versuchsbedingungen, schliesst man aber die secundären Vorgänge möglichst aus, so kommt man auf den gesuchten constanten Werth, wie ich dies speciell für die Polarisation von Platin in Schwefelsäure nachgewiesen habe.¹

In jüngster Zeit ist auch Le Blanc² durch ganz identische Versuche zu dem gleichen Resultate gekommen; er nennt den betreffenden Punkt den »Zersetzungspunkt«.

Es ist ferner unmittelbar klar, dass in einem Gemisch verschiedener Elektrolyte, z. B. Salzlösungen, durch eine bestimmte elektromotorische Kraft immer nur jene Salze zersetzt werden können, deren Wärmetönung unterhalb der verwendeten elektromotorischen Kraft liegen; dass es auf diese sehr einfache Weise möglich ist, durch Anwendung passender Kräfte elektrolytische Trennungen vorzunehmen, ist vor Kurzem durch eine Untersuchung von Freudenberg³ gezeigt worden.

Ferner ist klar, dass die Temperatur auf den Werth der Polarisation einen wesentlichen Einfluss haben muss; denn steigern wir dieselbe bis zur Dissociationstemperatur des Elektrolytes, so muss, da dann die Verbindungswärme desselben gleich Null wird, auch die Polarisation den Werth Null annehmen.

Auch diese Folgerung hat eine vollständige Bestätigung gefunden durch die Untersuchungen von Poincaré,⁴ welcher in geschmolzenen Salzen die Polarisation bei der Dissociationstemperatur in der That auf Null sinken sah.

Aber auch wenn wir mit der Temperatur nicht bis zum Dissociationspunkte gehen, werden wir stets eine Abnahme der Polarisation erwarten müssen — und die später folgenden Beobachtungen bestätigen dies — denn es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass die Stabilität einer chemischen Verbindung, wenn secundäre Einflüsse ausgeschlossen sind, mit steigender Temperatur abnehmen muss.

¹ Diese Sitzungsber., Bd. 77 (1878).

² Zeitschr. für phys. Chem., Bd. 8 (1891). Vergl. auch Nourisson, C. R. Bd. 118, S. 189 (1894).

³ Chem. Ber. Bd. 25 (1892).

⁴ C. R. Bd. 110 (1890).

Wenn wir ferner berücksichtigen, dass in den galvanischen Elementen die einzelnen Potentialdifferenzen an den Polen mit den dort sich abspielenden chemischen Processen in innigem Zusammenhange stehen, ja durch dieselben geradezu bedingt sind, so werden wir erwarten müssen, dass jeder Einfluss, der den Wärmewerth dieser Processe ändert, auch für die elektromotorische Kraft des Elementes massgebend sein wird; durch diesen Umstand scheinen mir die Temperaturcoefficienten der Elemente wenn nicht ausschliesslich, so doch in allererster Linie bestimmt.

Betrachten wir z. B. das Daniell'sche Element; die beiden in Betracht kommenden Reactionen sind hier die Bildung des ZnSO_4 und die Zersetzung des CuSO_4 ; erstere trägt im positiven, letztere im negativen Sinne zur Bildung der elektromotorischen Kraft des Elementes bei. Wären die Temperaturcoefficienten dieser beiden Reactionen gleich, d. h. wäre die Differenz der Bildungswärme (und Lösungswärme in Wasser) dieser beiden Salze bei allen Temperaturen constant, so wäre auch der Temperaturcoefficient des Elementes gleich Null; nun trifft diese Voraussetzung aber nicht allgemein zu, es hängt der Temperaturcoefficient dieser Reactionen sehr wesentlich von den Concentrationen der Lösungen ab und mit diesen variirt daher auch der Temperaturcoefficient des Elementes.

Eine Erwärmung des Daniell'schen Elementes als Ganzes hat unter allen Umständen eine Verminderung des Potentialgewinnes am Zn-Pol, und eine Verminderung des Potentialverlustes am Cu-Pol zur Folge; von dem Grössenverhältnisse beider hängt der Temperaturcoefficient des Elementes ab.

Speciell für das Daniell'sche Element ist der Einfluss der Concentrationen auf den Temperaturcoefficienten durch die Untersuchungen von Ebeling,¹ Meyer² und Gockel³ ausser Zweifel gesetzt und für eine Reihe von Concentrationen auch für die beiden Pole einzeln bestimmt.

¹ Wied. Ann. Bd. 30 (1887).

² Wied. Ann. Bd. 33 (1888).

³ Wied. Ann. Bd. 40 (1890).

Das Voller'sche Normaldaniell, charakterisirt durch eine ZnSO_4 -Lösung vom spec. Gew. $1\cdot20$ und eine CuSO_4 -Lösung vom spec. Gew. $1\cdot102$, zeichnet sich bekanntlich durch seine ausserordentliche Unempfindlichkeit gegen Temperaturschwankungen aus; nach dem Vorstehenden müsste man diese darauf zurückführen, dass bei den gewählten Concentrationen sich die beiden Temperaturcoëfficienten der Pole gerade compensiren. Da in den obcitirten Arbeiten sich die eben genannten Concentrationen nicht finden, so habe ich dieselben speciell untersucht; es wurde zu diesem Zwecke ein Daniell aus drei getrennten Gefässen *a*, *b*, *c* hergestellt, dieselben untereinander durch Heber verbunden, *a* und *b* mit ZnSO_4 und *c* mit CuSO_4 von den genannten Concentrationen gefüllt. In *a* tauchte eine Zn-, in *c* eine Cu-Elektrode; sowohl *a* als *c* konnten separat erwärmt, respective abgekühlt werden, während gleichzeitig die elektromotorische Kraft des Elementes an einem Elektrometer gemessen wurde. Es ergaben sich so die Resultate der folgenden Tabelle, in welcher Δ_c und Δ_z die Differenzen der bei T° des einen Polcs beobachteten Kraft des Elementes mit jener bei beiderseits 20° darstellen.

<i>T</i>	Zn ZnSO ₄ auf T° Cu CuSO ₄ auf 20°	Δ_z	Zn ZnSO ₄ auf 20° Cu CuSO ₄ auf T°	Δ_c
20	1·000		1·000	
95	0·937	—0·063	1·055	+0·055
90	0·943	—0·057	1·049	+0·049
85	0·949	—0·051	1·045	+0·045
80	0·954	—0·046	1·042	+0·042
75	0·958	—0·042	1·039	+0·039
70	0·962	—0·038	1·037	+0·037
65	0·966	—0·034	1·033	+0·033
60	0·969	—0·031	1·030	+0·030
55	0·972	—0·028	1·028	+0·028
50	0·976	—0·024	1·023	+0·023
45	0·980	—0·020	1·020	+0·020
40	0·984	—0·016	1·016	+0·016

T	Zn ZnSO ₄ auf T° Cu CuSO ₄ auf 20°	Δ_z	Zn ZnSO ₄ auf 20° Cu CuSO ₄ auf T°	Δ_c
35	0·989	—0·011	1·012	+0·012
30	0·993	—0·007	1·008	+0·008
25	0·997	—0·003	1·004	+0·004
20	1·000	$\pm 0\ 000$	1·000	$\pm 0\ 000$
15	1·004	+0·004	0·997	—0·003
10	1·008	+0·008	0·994	—0·006
5	1·012	+0·012	0·991	—0·009
0	1·015	+0·015	0·987	—0 013
—5	1·017	+0·017	0·984	—0·016

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die beiden Temperaturcoefficienten sich in dem Intervall von 20° — 70° in der That vollständig compensiren, obwohl jeder für sich eine Änderung der Kraft des Elements von fast 4% hervorbringen würde; selbst bei 95° ist der Unterschied beider noch gering und beträgt nur 0·008 D im Sinne einer Abnahme der Gesamtkraft.

Dem Vorstehenden entsprechend müssen alle Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Flüssigkeiten einen Temperaturcoefficienten aufweisen, der durch den Temperaturcoefficienten der zugehörigen Wärmetönung gegeben ist; beständen alle auftretenden Reactionen nur einfach in Verbindungen vorher isolirter Stoffe, so wären zweifellos sämtliche Coefficienten negativ. So einfache Reactionen kommen aber wohl nur in vereinzelt Fällen vor, im Allgemeinen sind die auftretenden Verbindungen von gleichzeitigen Zersetzungen, Lösungen, Absorptionen etc. begleitet, so dass der thatsächlich der Beobachtung zugängliche Temperaturcoefficient als die Summe mehrerer einzelner zu betrachten ist, die sich auf verschiedene, sehr oft nicht einmal der Art nach angebbare Reactionen beziehen.

Ich gebe im Folgenden die Änderungen der Potentialdifferenz zwischen Metallen und einigen Flüssigkeiten mit der Temperatur an. Dieselben wurden in der Weise erhalten, dass die Flüssigkeit in zwei durch einen Bügel verbundene Gefässe

gefüllt, in jeder derselben eine Elektrode aus dem zu untersuchenden Metall getaucht, die eine derselben zur Erde und die andere zum Elektrometer geleitet wurde. Bei gleicher Temperatur in beiden Gefäßen ist der Ausschlag Null, erwärmt man aber die Flüssigkeit in einem der beiden Gefäße — es war dies immer das mit dem Elektrometer verbundene, — so zeigt sich im Allgemeinen ein Ausschlag. Da die Metalle in den Flüssigkeiten negativ werden, so bedeutet ein positives Vorzeichen in den folgenden Tabellen, dass die Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit am erwärmten Pol kleiner ist als am kalten. Die Temperatur des letzteren war durchwegs 25°, die des ersteren 92° C.

Die der Untersuchung unterzogenen Flüssigkeiten waren die Säuren H_2SO_4 (1%), HNO_3 (0·6%), $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$ (0·6%) und $\text{C}_2\text{H}_2\text{O}_4$ (7%); ferner KOH (5%) und NaOH (0·3%).

Metalle in Säuren.

Metall	H_2SO_4	HNO_3	$\text{C}_2\text{H}_4\text{O}$	$\text{C}_2\text{H}_2\text{O}_4$
Mg	—0·11	—0·10	—0·16	—0·11
Al	—0·17	+0·06 ¹	—0·16	—0·20
Fe	—0·02	—0·05	—0·05	+0·03
Ni	—0·08	—0·10	—0·11	—0·05
Cu	+0·04	+0·04	+0·03	—0·01
Zn	+0·01	—0·05	+0·05	+0·03
Ag	+0·01	+0·04	+0·04	+0·02
Cd	+0·005	+0·05	+0·06	+0·005
Sn	—0·01	+0·02	+0·02	0
Pb	—0·02	—0·02	+0·05	0

¹ Zuerst — dann +.

Metalle in Basen.

Metall	KOH	Na OH
Mg	-0·15	-0·38
Al	+0·24	+0·35
Fe	-0·20	-0·18
Ni	-0·20	-0·24
Cu	-0·10	-0·20
Zn	-0·16	-0·10
Ag	-0·21	-0·13
Cd	-0·11	-0·10
Sn	-0·12	-0·30
Pb	-0·12	-0·13

Im Gang der Zahlen dieser beiden Tabellen lässt sich eine gewisse Regelmässigkeit nicht verkennen; gewisse Metalle, wie Mg, Al, Fe, Ni zeigen in den Säuren fast durchwegs einen negativen Temperaturcoefficienten, d. h. die Erwärmung wirkt in dem Sinne, dass die Summe der Wärmetönungen der Reactionen am erwärmten Pol grösser wird, als am kalten. Das umgekehrte Verhalten zeigen Cu, Zn, Ag und Cd, während Sn und Pb überhaupt nur sehr kleine und unbestimmte Änderungen erkennen lassen. In KOH und NaOH wurden sämtliche Metalle mit Ausnahme des Al bei höherer Temperatur stärker negativ als bei tiefer.

Während man bei der vorstehenden Anordnung über die Änderung der Reactionswärmen mit der Temperatur nicht viel aussagen kann, da die betreffenden Reactionen sich nicht übersehen lassen, gelingt dies besser bei Untersuchung der Polarisationen bei höherer Temperatur. Da die Polarisation quantitativ durch die Wärmetönung der auftretenden Reactionen bestimmt, diese Wärmetönung aber stets positiv ist, so lässt sich auch ohne strenge Kenntniss dieser Reactionen voraussagen, dass die Polarisation mit der Temperatur abnehmen muss; je näher diese dem Dissociationspunkte der zu zersetzenden Verbindung kommt, desto mehr wird sich die Polarisation

dem Werthe Null nähern und erreicht diesen, wie schon oben gezeigt wurde, bei der Dissociationstemperatur selbst.

Über den Einfluss der Temperatur auf die Polarisation liegen bisher nur einige vereinzelte Messungen vor; so hat für Platinelektroden in angesäuertem Wasser schon Beetz vor langer Zeit eine Abnahme der Polarisation mit steigender Temperatur constatirt; auch Bartoli¹ fand in concentrirter H_2SO_4 eine Abnahme der Polarisation von $2\cdot80$ bis $1\cdot13$ Volt zwischen 5° und 250° C. Um diese Verhältnisse genauer zu studiren, habe ich die im Folgenden mitgetheilten Messungen der Polarisation in Säuren, Basen und Salzlösungen bei verschiedenen Temperaturen ausgeführt; als Elektroden dienten Platinbleche bei allen Versuchen, nur bei den Chlorverbindungen wurden Kohlenplatten verwendet.

Der Strom eines Accumulators von der elektromotorischen Kraft E wurde durch einen grossen Widerstand W und die Zelle geschlossen; die Dimensionen der letzteren waren derartige, dass ihr Widerstand gegen den übrigen der Schliessung zu vernachlässigen war. Von den beiden Elektroden wurde dann der Strom durch ein Siemens'sches Torsionsgalvanometer mit 1000Ω Widerstand abgezweigt und an letzterem die Polarisation während des Durchganges des primären Stromes direct abgelesen. Die Grössen E und W , von denen ja bei grossen Elektroden die Polarisation zum Theile abhängt, sind im Folgenden bei jedem Versuche angegeben; die Ablesungen erfolgten von 10 zu 10 Graden sowohl bei Erwärmung, als bei Abkühlung der Zelle, um einen etwaigen Einfluss des Nachbleibens der Thermometer thunlichst zu eliminiren.

Die betreffenden Polarisationen P_E und P_A sind in Volts angegeben.

¹ Nuovo Cim. (3) Bd. 7 (1880).

1. Pt in H_2SO_4 (1:10) $E = 3.68$ Volt, $W = 1000 \Omega$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.82	1.82	1.820
30	1.80	1.80	1.800
40	1.78	1.77	1.775
50	1.73	1.71	1.720
60	1.70	1.66	1.680
70	1.61	1.62	1.615
80	1.56	1.55	1.555
90	1.41	1.42	1.415

2. C in HCl (12%) $E = 5.48$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.70	1.65	1.675
30	1.64	1.58	1.610
40	1.58	1.53	1.555
50	1.54	1.51	1.525
60	1.49	1.48	1.485
70	1.44	1.43	1.435
80	1.40	1.39	1.395
90	1.35	1.35	1.350

3. Pt in HNO_3 (20%) $E = 5.5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.16	1.18	1.170
30	1.10	1.12	1.110
40	1.08	1.08	1.080
50	1.02	1.03	1.025
60	0.99	0.98	0.985
70	0.95	0.94	0.945
80	0.92	0.92	0.920
90	0.90	0.90	0.900

4. Pt in $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$ (25%) $E = 5.5$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.98	2.04	2.010
30	1.92	2.00	1.960
40	1.87	1.95	1.910
50	1.81	1.90	1.855
60	1.77	1.86	1.815
70	1.70	1.80	1.750
80	1.60	1.69	1.645
90	1.54	1.54	1.540

5. Pt in NaOH (5%)

 $E = 5.6$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.92	1.93	1.925
30	1.86	1.88	1.870
40	1.82	1.83	1.825
50	1.77	1.77	1.770
60	1.73	1.72	1.725
70	1.67	1.66	1.665
80	1.64	1.63	1.635
90	1.60	1.60	1.600

6. Pt in KOH (0.3%)

 $E = 5.6$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.90	1.95	1.925
30	1.78	1.78	1.780
40	1.72	1.72	1.720
50	1.67	1.69	1.680
60	1.62	1.64	1.630
70	1.60	1.60	1.600
80	1.58	1.57	1.575
90	1.56	1.56	1.560

Bei den folgenden Salzlösungen bedeuten die Procente den Gehalt an wasserfreiem Salze.

7. Pt in CuSO_4 (concentrirt) $E = 3.70$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.42	1.43	1.425
30	1.40	1.40	1.400
40	1.35	1.34	1.345
50	1.30	1.30	1.300
60	1.25	1.24	1.245
70	1.18	1.18	1.180
80	1.13	1.15	1.140
90	1.10	1.10	1.100

Die folgende Beobachtung bezieht sich auf ein anderes E und W ; es ändern sich dadurch die Werthe von P etwas, der allgemeine Gang mit der Temperatur jedoch nicht.

8. Pt in CuSO_4 (concentrirt) $E = 1.90$, $W = 500$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1.22	1.22	1.220
30	1.20	1.20	1.200
40	1.19	1.19	1.190
50	1.14	1.14	1.140
60	1.10	1.10	1.100
70	1.08	1.08	1.070
80	1.02	1.03	1.025
90	1.00	1.00	1.000

9. Pt in ZnSO_4 (17%; spec.

Gew. 1.20)

 $E = 5.5$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2.42	2.43	2.425
30	2.40	2.41	2.405
40	2.38	2.39	2.385
50	2.33	2.32	2.325
60	2.30	2.30	2.300
70	2.27	2.28	2.275
80	2.25	2.02	2.135
90	2.21	1.95	2.080

10. Pt in NiSO_4 (8.4%) $E = 5.48$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2.12	2.08	2.100
30	2.08	1.98	2.030
40	2.00	1.92	1.960
50	1.86	1.87	1.865
60	1.78	1.80	1.790
70	1.72	1.74	1.730
80	1.66	1.68	1.670
90	1.61	1.62	1.615

11. C in CuCl_2 (18·8%) $E = 5\cdot48$, $W = 600$.

T	P_E
20	0·80
30	0·78
40	0·75
50	0·72
60	0·68
70	0·65
80	0·62
90	0·59

12. C in NiCl_2 (18·2%) $E = 5\cdot48$, $W = 600$.

T	P_E	P_A
20	1·35	1·83
30	1·32	1·68
40	1·30	1·58
50	1·28	1·51
60	1·28	1·51
70	1·28	1·50
80	1·27	1·48
90	1·28	1·37

13. C in ZnCl_2 (9·5%) $E = 5\cdot5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A
20	2·13 ¹	2·32
30	2·08	2·22
40	2·00	2·18
50	1·92	1·99
60	1·84	1·95
70	1·80	1·91
80	1·73	1·83
90	1·69	1·71

¹ Steigt allmählig von 0·9 bis zu obigem Werthe.

Der unregelmässige Gang in Nr. 11 bis 13, sowie die abnorm tiefen Werthe in Beobachtung 11 haben ihren Grund ohne Zweifel in dem Umstande, dass bei Anwendung von Kohlenplatten als Elektroden die Ausbildung der Polarisation geraume Zeit erfordert; in Nr. 12 und 13 bleiben daher die Werthe bei Erwärmung wesentlich hinter jenen bei Abkühlung zurück, da bei letzteren der Stromschluss schon ein länger-dauernder war.

Es geht daher auch nicht an, Mittelwerthe aus P_E und P_A zu bilden; jedenfalls sind die Werthe unter P_A die zuverlässigeren.

Bei den folgenden Messungen mit C-Elektroden wurde bei jeder Temperatur das Constantwerden der Einstellung abgewartet.

14. C in Fe_2Cl_6 (15.2%) $E = 5.5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	0.85	0.87	0.860
30	0.82	0.81	0.815
40	0.77	0.75	0.760
50	0.71	0.68	0.695
60	0.64	0.63	0.635
70	0.61	0.61	0.610
80	0.55	0.56	0.555
90	0.51	0.51	0.510

15. C in MgCl_2 (13.3%) $E = 5.5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2.32	2.30	2.310
30	2.24	2.20	2.220
40	2.16	2.12	2.140
50	2.08	2.04	2.060
60	1.97	1.95	1.960
70	1.89	1.88	1.885
80	1.83	1.83	1.830
90	1.78	1.78	1.780

16. Pt in $\text{Fe}_2(\text{NO}_3)_6$ (11·5%) $E = 5\cdot5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·40	1·36	1·380
30	1·30	1·28	1·290
40	1·20	1·18	1·190
50	1·13	1·12	1·125
60	1·09	1·04	1·065
70	1·02	0·98	1·000
80	0·96	0·93	0·945
90	0·92	0·90	0·910

17. Pt in $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ (13·3%) $E = 3\cdot68$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·50	1·51	1·505
30	1·50	1·51	1·505
40	1·45	1·42	1·435
50	1·42	1·38	1·400
60	1·40	1·32	1·340
70	1·35	1·27	1·310
80	1·30	1·24	1·270
90	1·24	1·22	1·230

18. Pt in $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$ (13·0%) $E = 3\cdot68$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·68	1·72	1·700
30	1·64	1·66	1·650
40	1·60	1·62	1·610
50	1·55	1·57	1·560
60	1·50	1·52	1·510
70	1·44	1·45	1·445
80	1·38	1·38	1·380
90	1·31	1·32	1·315

19. Pt in $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ (13·4%) $E = 5\cdot6$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·22	2·25	2·235
30	2·16	2·22	2·190
40	2·10	2·15	2·125
50	2·06	2·08	2·070
60	1·95	1·96	1·955
70	1·90	1·90	1·900
80	1·86	1·88	1·870
90	1·84	1·84	1·840

20. Pt in $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ (10·5%) $E = 5\cdot5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·20	2·38	2·290
30	2·10	2·28	2·190
40	2·01	2·13	2·070
50	1·78	1·98	1·880
60	1·68	1·75	1·715
70	1·51	1·62	1·565
80	1·40	1·53	1·465
90	1·35	1·38	1·365

21. Pt in $\text{Na}_2(\text{NO}_3)_2$ (12·1%) $E = 5\cdot5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·40	2·50	2·450
30	2·30	2·40	2·350
40	2·22	2·34	2·280
50	2·14	2·25	2·195
60	2·05	2·12	2·085
70	1·93	2·02	1·975
80	1·88	1·92	1·900
90	1·82	1·82	1·820

22. Pt in $\text{Cu}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$ (5%) $E = 3\cdot7$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·14	1·16	1·150
30	1·10	1·10	1·100
40	1·00	1·03	1·015
50	0·96	0·97	0·965
60	0·91	0·90	0·905
70	0·85	0·83	0·840
80	0·80	0·78	0·790
90	0·74	0·74	0·740

23. Pt in $\text{Ni}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$ (5·9%) $E = 5\cdot48$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·80	1·75	1·775
30	1·72	1·69	1·705
40	1·65	1·63	1·640
50	1·57	1·57	1·570
60	1·50	1·49	1·495
70	1·43	1·41	1·420
80	1·33	1·32	1·325
90	1·27	1·27	1·270

24. Pt in $\text{Zn}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$ (5%) $E = 5.5$, $W = 1000$.25. Pt in $\text{Mg}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$ (1%) $E = 5.5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2.33	2.35	2.340
30	2.27	2.32	2.295
40	2.21	2.28	2.245
50	2.15	2.22	2.185
60	2.08	2.16	2.120
70	1.98	2.07	2.025
80	1.86	1.92	1.890
90	1.81	1.81	1.810

T	P_E	P_A	Mittel
20	2.50	2.55	2.525
30	2.40	2.46	2.430
40	2.31	2.37	2.340
50	2.25	2.28	2.265
60	2.20	2.24	2.220
70	2.15	2.17	2.160
80	2.09	2.10	2.095
90	2.02	2.00	2.010

Wie aus den Zahlen der vorstehenden Tabellen erhellt, nimmt, ganz unserer Voraussetzung gemäss, der Wärmewerth aller untersuchten Verbindungen mit steigender Temperatur ab und zwar in den meisten Fällen sehr bedeutend; drückt man die Abnahme der Polarisation zwischen 20° und 90° in Procenten des Werthes bei 20° aus, so ergeben sich die folgenden Zahlen:

Zersetzte Verbindung	$100 \frac{P_{20} - P_{90}}{P_{20}}$
1. H_2SO_4	22.4%
2. HCl	19.4
3. HNO_3	23.1
4. $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	23.0
5. NaOH	16.6%
6. KOH	18.7
7. CuSO_4	22.5%
8. CuSO_4	18.0
9. ZnSO_4	14.0
10. NiSO_4	23.3

Zersetzte Verbindung	$100 \frac{P_{20} - P_{90}}{P_{20}}$
11. CuCl_2	$26 \cdot 2^0/0$
12. NiCl_2	$25 \cdot 1$
13. ZnCl_2	$26 \cdot 3$
14. Fe_2Cl_6	$40 \cdot 8$
15. MgCl_2	$23 \cdot 0$
16. $\text{Fe}_2(\text{NO}_3)_6$	$34 \cdot 0^0/0$
17. $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$	$18 \cdot 0$
18. $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$	$23 \cdot 0$
19. $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$	$17 \cdot 4$
20. $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	$40 \cdot 6$
21. NaNO_3	$25 \cdot 7$
22. $\text{Cu}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$	$35 \cdot 0^0/0$
23. $\text{Ni}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$	$28 \cdot 8$
24. $\text{Zn}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$	$22 \cdot 6$
25. $\text{Mg}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$	$20 \cdot 2$

Eine Gesetzmässigkeit innerhalb der einzelnen Gruppen lässt sich hier nicht erkennen, ist auch kaum zu erwarten, da man es hier nicht mit den einfachen Verbindungen, sondern auch mit den Lösungen der Producte zu thun hat; welchen Gang aber die Temperaturcoefficienten der Lösungswärmen einschlagen, das lässt sich vorläufig nicht übersehen.

Dass die Änderung der Polarisation von ZnSO_4 und CuSO_4 mit der Temperatur hier sehr viel grösser resultirt als bei der Untersuchung des Daniell, wo die Änderung an jedem Pol zwischen 20° und 90° nur circa $0 \cdot 06$ Volt betrug, dürfte seinen Grund darin haben, dass es sich hier um die Reactionen $(\text{Zn}, \text{O}, \text{SO}_3)$ und $(\text{Cu}, \text{O}, \text{SO}_3)$ handelt, im Daniell'schen Elemente dagegen aller Wahrscheinlichkeit nach um die Reactionen (Zn, SO_4) und (Cu, SO_4) . Dafür spricht auch der Umstand, dass den Polarisierungen die Werthe $2 \cdot 34$, respective $1 \cdot 43$ zukommen, den Potentialdifferenzen zwischen den Polen und den Flüssigkeiten im Daniell aber nur die Werthe $1 \cdot 34$, respective $0 \cdot 34$.

Wollte man die Temperaturcoefficienten chemischer Reactionen auf dem eingeschlagenen Wege in ihrer Reinheit unter-

suchen, so müsste man dafür sorgen, dass ausser der gewünschten Reaction kein weiterer Vorgang, wie z. B. Lösung des Productes, eintritt; das stösst aber auf erhebliche Schwierigkeiten, indem die Producte der Elektrolyse, sobald sie nicht gelöst werden, sondern sich an den Elektroden absetzen, zu Störungen Veranlassung geben. (Die Elektrolyse geschmolzener Salze würde vielleicht ein geeignetes Mittel sein.)

Hätte ein galvanisches Element nur einen einzigen Potentialsprung und dementsprechend auch nur eine Reaction, so würde der Temperaturcoëfficient eines solchen Elementes zugleich der Coëfficient der betreffenden Reaction sein, d. h. da letzterer immer negativ ist, so müsste ein solches Element auch stets einen negativen Temperaturcoëfficienten aufweisen. Ich habe nun solche Elemente mit nur einem Potentialsprung angegeben,¹ es sind das solche, die nur aus Grundstoffen bestehen und deren einer Pol durch Kohle gebildet wird, z. B. $C|Br|M$, wo M irgend ein durch Brom angreifbares Metall bezeichnet. Hier findet nur an der Stelle $Br|M$ ein Potentialsprung statt entsprechend dem Wärmewerth (Br, M), und wird ein derartiges Element erwärmt, so müsste seine elektromotorische Kraft sinken.

Leider sind derartige Messungen für die meisten Metalle sehr ungenau wegen der Unlöslichkeit der gebildeten Bromverbindung, doch liess sich bei allen untersuchten Combinationen entweder eine deutliche Abnahme der elektromotorischen Kraft mit der Temperatur oder ein Constantbleiben derselben innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler constatiren; in keinem Falle aber zeigte sich eine Zunahme. So zeigte z. B. das Element $Zn|Br|C$ bei den Temperaturen 2°, 20° und 50° die Werthe 1·57, 1·52 und 1·42 als Mittel mehrerer Versuche.

Bei Ag, Cd, Pb und Cu konnte ein deutlicher Effect nicht wahrgenommen werden, bei Ni dagegen sank der Werth zwischen 20° und 50° von 0·53 auf 0·45; ebenso bei Fe zwischen denselben Temperaturen von 0·51 auf 0·34.

Soweit somit gegenwärtig diesbezügliche Beobachtungen vorliegen, wird man sagen müssen, dass der Wärmewerth einer

¹ Diese Sitzungsber., Bd. 74 (1881).

chemischen Reaction mit steigender Temperatur abnimmt; die Temperaturcoefficienten der galvanischen Elemente aber können als der Ausdruck dieses Effectes angesehen werden.

§. 16. Über Verbindungswärmen.

In der Einleitung zur ersten Mittheilung¹ habe ich schon auf den Zusammenhang zwischen der elektrischen Energie einer Molekel und deren Bildungswärme im allgemeinen hingewiesen und den Satz ausgesprochen, »dass die bei der Bildung von HCl aus H und Cl resultirende Wärme nichts anderes ist, als das Äquivalent der Arbeit, welche von den elektrischen Ladungen der Ionen bei Annäherung derselben bis auf Moleculardistanz geleistet wird«.

Eine analoge Anschauungsweise ist theils gleichzeitig, theils später von Richarz² und von Ebert³ ausgesprochen worden mit dem Unterschiede, dass von diesen nicht die Bildungswärme der chemischen Verbindungen, sondern die der Moleküle eines Grundstoffes aus den Atomen der Rechnung unterzogen wird; die Dissociationswärme, die für H_2 und J_2 angenähert bekannt ist, soll danach identisch sein mit der elektrischen Energie der betreffenden Molekeln. Was die dieser Rechnung zu Grunde liegende Vorstellung anlangt, dass z. B. die beiden Atome einer Wasserstoff oder einer Chlormolekel entgegengesetzte Ladungen im Molekül besitzen, so kann ich mich derselben nicht anschliessen; es scheinen mir dagegen sowohl chemische als physikalische Bedenken obzuwalten, die bisher, wie mir scheint, zu wenig berücksichtigt wurden. So ist es z. B. schwer verständlich, dass die positiv und die negativ geladenen Atome desselben Stoffes sich chemisch vollkommen gleich verhalten sollen. Oder, dass in einer Verbindung wie HCl sich doch immer H positiv und Cl negativ geladen findet; erzeugt man HCl aus H_2 und Cl_2 , so müssten nach obiger Vorstellung HCl-Moleküle entstehen nach dem Schema H_+Cl_- .

¹ Diese Berichte. Bd. 100, Mai 1891.

² Sitzungsber. der Niederrh. Gesellsch. 1890 und 1891, Verh. der phys. Gesellsch. zu Berlin 1891 und Wied. Ann., Bd. 52 (1894).

³ Wied. Ann., Bd. 50 (1893).

und ebensoviele H-Cl_+ . Eine HCl -Lösung, der Elektrolyse unterworfen, müsste demnach an jedem Pol sowohl H als Cl liefern. Auch F. Braun¹ hat jüngst auf derartige Schwierigkeiten aufmerksam gemacht, die jedenfalls zu einer sehr vorsichtigen Anwendung dieser Vorstellungsweise mahnen.

Dass dagegen die Ionen eines Elektrolyten mit entgegengesetzten Ladungen behaftet sind, wird gegenwärtig kaum mehr in Zweifel gezogen werden; um nun die elektrische Arbeit zu berechnen, die bei der Bildung einer Molekel geleistet wird, ist die Kenntniss dreier Grössen erforderlich: erstens der Ladung die mit einem Atom verbunden ist, der sogenannten Valenzladung im Falle eines einwerthigen Atoms, zweitens der Moleculargrösse und drittens der Anzahl Moleküle in der Masseneinheit. Die erste Grösse folgt aus dem Faraday'schen Gesetze der Elektrolyse, die zweite und dritte aus der kinetischen Gastheorie. Besonders die dritte Grösse ist dabei mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet, indem die aus der Querschnittssumme resultirenden Werthe dafür um Hunderte von Procenten variiren. Ich habe darum zur Berechnung der letzteren einen anderen Weg eingeschlagen,² der sich aus der Bestimmung des wahren specifischen Gewichtes der Substanzen mit Hilfe der Dielektricitätsconstanten oder der Brechungsexponenten ergibt. Es hat dieses Verfahren auch den Vortheil, dass dadurch die fragliche, gewöhnlich mit N bezeichnete Zahl für jede Substanz unabhängig von den anderen bestimmt wird.

Ich gebe im Folgenden die Berechnung der Bildungswärme der HCl und des H_2O unter der Voraussetzung, dass nur die elektrischen Kräfte dabei thätig sind, welche von Atom zu Atom wirken. Die elektrische Energie des Systems ist dabei gegeben durch das Product der Atomladungen, dividirt durch die Moleculardistanz, und diese Energie müsste der Wärmestörung

¹ Zeitschr. für physikal. Chemie, Bd. 13 (1894).

² Diese Berichte, Bd. 91 (1885). Ich ergreife die erste Gelegenheit die sich bietet, um zu constatiren, dass die in dieser Arbeit durchgeführte Idee der Bestimmung molecularer Grössen aus den Dielektricitätsconstanten schon früher von Dorn (Wied. Ann. XIII, [1881]) ausgesprochen wurde; das Übersehen dieser Arbeit war dadurch bedingt, dass sich dieselbe in den »Beiblättern« nicht citirt findet.

quivalent sein. Als sicher kann angenommen werden, dassä 1 Cb. 0.01 mg H_2 ausscheidet, oder dass diese Menge H_2 mit $3 \cdot 10^9 \text{ E. E.}$ geladen ist.

H₂O. Zur Ermittlung der Zahl N Moleküle, welche in 0.01 mg H_2 enthalten sind oder welche die Ladung $3 \cdot 10^9 \text{ E. E.}$ besitzen, dient, unter Voraussetzung kugelförmiger Moleküle, die Gleichung: $N \frac{4}{3} \pi \rho^3 \sigma = 0.01 \text{ mg} = 10^{-5} \text{ g.}$ Es ist ferner:¹ $\rho = 5 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$ und $\sigma = 1$, somit $N = 2 \cdot 10^{19}$. Ein H_2 Molekül erscheint somit geladen mit $\frac{3}{2} \cdot 10^{-10} \text{ E. E.}$ Die Energie einer H_2O Molekel wird demnach 10^{-12} Erg. und die von 0.01 mg H_2 in Form von $\text{H}_2\text{O} = 2 \cdot 10^7 \text{ Erg.}$ 1 g H_2 in dieser Form repräsentirt somit $2 \cdot 10^{12} \text{ Erg.} = 2 \cdot 10^9 \text{ g. cm} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg. m}$ oder 47 Calorien. Die thermochemischen Bestimmungen dagegen liefern für die Verbrennung von 1 g H_2 34 Calorien, also einen Werth, der mit obigem sehr nahe übereinstimmt.

Es sind bei dieser Berechnung die Moleculargrössen des H_2 zu Grunde gelegt, man könnte ebensogut auch von jenem des O_2 ausgehen; man hätte dann zu berücksichtigen, dass $3 \cdot 10^9 \text{ E. E.}$ an 0.08 mg O_2 haften und dass für $\rho = 8 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$ und $\sigma = 8$ zu setzen ist. Man erhält so die Ladung von 1 Atom $\text{O}_2 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ E. E.}$ und die Arbeit bei Annäherung von H_2 an O aus dem Unendlichen bis in Moleculardistanz gleich 90 Calorien statt der beobachteten 34. Unter Berücksichtigung der mannigfachen zweifelhaften Grössen und Voraussetzungen, welche in die Rechnung eingehen, wird man eine derartige Übereinstimmung immerhin befriedigend nennen müssen.

HCl. Für die Verbindungswärme der Salzsäure sind folgende Grössen massgebend: $3 \cdot 10^9 \text{ E. E.}$ haften an 0.35 mg Cl ; ferner ist für Cl $\rho = 10^{-8}$ und $\sigma = 6.2$ zu setzen; die mit $3 \cdot 10^9 \text{ E. E.}$ geladene Zahl Cl-Atome beträgt somit $N = 14 \cdot 10^{18}$, oder die Ladung eines Atoms $\text{Cl} = 2 \cdot 10^{-10}$. Daraus berechnet sich die Verbindungswärme von 1 g H_2 mit Cl zu 77 Calorien, statt 40 Calorien, wie die thermochemischen Untersuchungen liefern. Geht man bei der Berechnung nicht von Cl , sondern

¹ Diese Berichte, Bd. 91 (1885).

von H aus, so gelangt man zu dem Werthe 47 Calorien, also auch hier zeigt sich wieder eine gute Übereinstimmung.

Die Valenzladungen, welche sich für Cl, H und O auf von einander ganz unabhängigen Wegen ergeben, stimmen untereinander recht gut überein, sie sind für $H = \frac{3}{4} \cdot 10^{-10}$, für $O = 1.5 \cdot 10^{-10}$ und für $Cl = 2 \cdot 10^{-10}$; von Richarz¹ wurde auf ganz anderem Wege dafür der Werth $1.29 \cdot 10^{-10}$ erhalten.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass man, vorläufig für die gegebenen Beispiele, die chemische Energie ganz als den Effect elektrischer Kräfte ansehen kann, welche von den Ladungen der Ionen ausgehen.

Da alle einwerthigen Atome dieselben Ladungen besitzen, so wären auch die Verbindungswärmen aller binären Verbindungen gleich, wenn die Durchmesser der entstehenden Moleküle dieselben wären, und es ist vielleicht bezeichnend für die Richtigkeit dieser Anschauung, dass die Differenzen dieser Verbindungswärmen mit den Differenzen der Molecular-durchmesser von gleicher Grössenordnung sind. Die Fähigkeit, möglichst nahe aneinander zu gelangen, d. h. eine möglichst grosse Arbeit zu entwickeln, wird man im Allgemeinen den kleinsten Atomen im höchsten Maasse zuschreiben müssen, und damit mag es wohl in Einklang stehen, dass die Reactionsfähigkeit der Stoffe in so entschiedener Weise mit dem Atomgewichte abnimmt.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Vorstellung, als stammen die Verbindungswärmen vom Falle der Atome gegeneinander, sei also mechanischen Ursprungs, nicht haltbar ist, wenigstens nicht wenn das Gravitationsgesetz bis zu molecularen Distanzen als angenähert gültig vorausgesetzt wird. Die Gravitationsenergie bei der Verbrennung von 1 g H_2 würde nur $\frac{1}{2} \cdot 10^{-23}$ Cal. liefern, also eine absolut verschwindende Grösse.

¹ l. c.

Über die innere Reibung in Ölen und deren Änderung mit der Temperatur

von

J. G. Garvanoff.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

In Folgendem sind die Resultate einer Reihe von Versuchen mitgetheilt, die sich auf die innere Reibung in fetten und ätherischen Ölen beziehen. Die Methode, welche zur Anwendung kam, war die von Poiseuille, bei welcher die Ausflusszeit aus Capillaren gemessen wird.

Um bei höheren Temperaturen beobachten zu können, musste die Capillare in ein Wasserbad eingebaut werden. Da dieselbe in verticaler Stellung verwendet wurde, so wurde sie am unteren Ende vertical nach aufwärts gebogen und endigte sowohl am unteren, als oberen Ende in eine Glaskugel. Während des Versuches wurde die Flüssigkeit aus der oberen in die untere Kugel strömen gelassen und nach Beendigung des Versuches wieder in die obere zurückgesaugt. Selbstverständlich wurde auf die Reinigung der Capillare vor jedem Versuche besondere Sorgfalt verwendet. Auch war durch zwei Thermometer dafür gesorgt, dass in jedem Momente die Temperatur, sowohl des Bades, als der zu untersuchenden Flüssigkeit selbst abgelesen werden konnte. Zur Ermittlung der absoluten Werthe des Reibungscoefficienten wurde eine besondere geradlinige Capillare verwendet. Es wurde zunächst mit deren Hilfe der absolute Werth des Reibungscoefficienten des Wassers bei einer bestimmten Temperatur, nämlich 20.7°C. , ermittelt und gefunden, $\eta = 0.01045$. Dieser Werth stimmt sehr gut mit dem

von O. E. Meyer¹ gefundenen, aus dessen Zahlen sich durch Interpolation für dieselbe Temperatur der Werth $\eta_1 = 0.01041$ ergibt. Durch Beobachtung der Ausflusszeiten der Öle durch dieselbe Capillare konnten die absoluten Werthe der Reibungscoëfficienten der Öle durch Reduction auf den Wasserwerth ermittelt werden. (Im Folgenden wird der Reibungscoëfficient des Wassers bei 0° gleich 100 gesetzt). Um die Reibungscoëfficienten bei der höheren Temperatur zu bestimmen, musste Ausflusszeit und Dichte für diese letztere ermittelt werden; die Druckhöhe dagegen blieb bei allen Versuchen constant. Bezeichnet z die Ausflusszeit in Secunden und δ die Dichte der Flüssigkeit, so gelten für zwei Temperaturen t_1 und t_2 die Formeln $\eta_1 = a \cdot z_1 \delta_1$ und $\eta_2 = a z_2 \delta_2$; hier bedeutet a eine Constante der im Wasserbad verwendeten Capillare, die durch einmaligen Vergleich mit der geraden Capillare bei einer bestimmten Temperatur ermittelt wurde und so die Reduction aller Werthe auf absolutes Mass gestattet.

Die Beobachtungen erstreckten sich über ein Temperaturintervall von 20—80°; wird der Reibungscoëfficient des Wassers bei 0° gleich 100 gesetzt, so ergibt sich derselbe bei 20° im Mittel aus den verlässlichsten bisherigen Angaben zu 56.15 und auf diesen Werth sind auch die Resultate der folgenden Tabellen reducirt. In diesen bedeutet T die Temperatur der untersuchten Flüssigkeit und zwar ist jedesmal unter A und E die Temperatur am Anfang und Ende eines jeden Versuches angegeben. (Bei jeder Temperatur wurden drei Versuche ausgeführt). Unter Z findet sich die Ausflusszeit in Secunden; unter δ die jeweilig ermittelte Dichte angegeben. T' bedeutet das Mittel für eine jede Temperaturgruppe und η den zugehörigen, auf Wasser reducirten Reibungscoëfficienten. (Der letztere für 0° gleich 100 gesetzt). Es folgen nun die Beobachtungen, und zwar an fünf ätherischen und drei fetten Ölen.

¹ O. E. Meyer, Wied. Ann., Bd. 32 (1887).

Tabelle I.

Citronenöl.

T° C.		Z	δ	T'	η
A.	E.				
20·8	20·6	110			
20·5	20·5	110	0·8559	20°6 C.	66·77
20·5	20·5	110			
30·8	30·5	96·5			
30·5	30·3	97·5	0·8498	30·6	58·45
30·1	30·1	97·5			
40·2	40·5	85·5			
40·8	40·5	86	0·8422	40·2	51·72
40	39	88·5			
51	51	77			
50·2	50	78	0·835	50·3	46·19
50	49·9	79			
61	61	69·5			
60·5	60·2	71	0·8272	60·4	41·47
60	59·6	71·7			
71	71·2	63·5			
70·5	70·1	65	0 818	70·4	37·7
70	69·4	66·2			
80	79·8	61			
80·1	80·1	60	0·8101	80	34·64
80·1	80·1	60			

Tabelle II.

Bergamottenöl.

T°		Z	δ	T'	η
A.	E.				
20°5	21	151	0·8718	20°3 C.	94·21
20	20	156			
20·1	20·1	155			
31·1	31·1	125·5	0·864	30·5	77·36
30·5	30·2	128·5			
30	30	129			
40·6	40·8	107·5	0·8558	40·4	65·22
40·5	40·4	108·5			
40	40	110			
50·8	51	94	0·848	50·4	56·53
50·4	50·4	95·5			
50	49·8	95			
60·2	60·1	84·5	0·8398	60·2	49·3
60	59·8	84·5			
60·4	61	82			
71	71	75	0·831	70	44·37
70·1	69·8	76			
69·5	68·8	77·5			
80·6	80·6	86	0·8258	79·6	40·56
80·2	79·2	69			
79	78	73			

Tabelle III.

Terpentinöl.

T°		Z	δ	T'	η
A.	E.				
21° C.	20·8	126·5			
20·5	20·5	128	0·862	20°5 C.	77·11
20	20	130			
30·8	30·5	110			
30·4	30·2	110·5	0·8538	30·3	65·59
30·1	30	110			
40·8	40·4	97·5			
40·2	40	97·5	0·8462	40·2	57·79
40	39·8	98·5			
51°	51°	86·5			
50·5	50·1	88	0·8376	50·4	51·24
50	49·8	88·5			
60	60·2	78·5			
60	60	79·5	0·83	59·9	45·96
60	59·2	80			
71	70	72·5			
70·2	70	72·7	0·8214	70	41·7
70	69·1	73			
80·1	80	66·5			
79·8	79	66	0·8132	79·9	38·04
80·2	80·2	66·5			

Tabelle IV.

Nelkenöl.

T°		Z	δ	T'	η
A.	E.				
20	20	684			
20	20·1	671	1·53	20°	705·1
20	20·1	667			
31°	30·5	430			
30·5	30·3	434	1·45	30·4	430·3
30·2	30	438			
40·4	40·1	303			
40	39·6	310	1·363	39·9	285·5
39·5	39·8	306			
51	50	230			
51	51	221	1·25	50·5	194
50·5	50	230			
60·5	61	172			
61	60·1	177	1·19	60·2	144·8
60	59	185			
71·5	71	139			
70·5	69·5	144	1·106	69·9	108·9
69·1	68	148			
80	80·2	115			
80·2	79	119	1·04	79·8	83·2

Tabelle V.

Kümmelöl.

T°		Z	δ	T'	η
A.	E.				
21	21	120			
20·5	20·2	122	0·8972	20·3	75·12
20·1	20	124			
31°	31°	103			
30·4	30	105	0·891	30·2	63·96
29·9	29·8	106			
41°7	41°	91			
40·8	40·3	91·5	0·8834	40·5	55·42
40·1	40	91·5			
50·6	50·6	82			
50·5	50·1	82	0·876	50·3	49·36
50	49·8	82·5			
61	61	73·5			
60·2	60	73·5	0·8683	60·2	44·1
60	59·4	75			
70·5	70·5	68			
70	69·9	68	0·8618	69·9	40·52
69·6	69	69·5			
81·5	81·5	62			
80·5	79·5	63·5	0·8555	79·9	37·05
79·5	78·5	64			

Tabelle VI.

Olivenöl.

T°		Z	δ	T'	η
A.	E.				
20·5	20·6	771·5			
20·8	21·1	760·5	0·9139	20·3	4339
21·1	21·1	758·7			
31·4	31·2	495			
31·2	30·9	502	0·9057	31	2819
30·8	30·5	509·3			
41·1	41	340			
40·9	40·3	349·5	0·893	40·5	1931
40·2	39·8	357·5			
50	49·2	255			
50	50	244·5	0·889	50	1347
51·1	50	244·5			
60	60	185·5			
60	61·1	179·5	0·8859	60·3	1010
61	60	187			
69·5	70	143·5			
70	70	138·5	0·8828	70·1	766
71	70	138			
80	80·1	111			
80	79	116	0·8797	79·5	623·2
79	78·9	116			

Tabelle VII.

Mandelöl.

T°		Z	δ	T'	η
A.	E.				
21	20·4	665	0·9989	20 alt	3539·3
20	20	673			
20	20·1	671·5			
30·8	30·4	437·5	0·9129	30·2	2315
30·4	30·1	443			
30	30	449			
41	41	300	0·906	40·4	1592·3
40·5	40	308·5			
40	39·9	313			
51	51·5	215	0·8977	50·5	1142
51	50	225			
50	49·8	230·5			
61	60·5	170	0·893	60·4	865·2
60·6	60·5	169·5			
60	60	168·5			
71	69	136·5	0·888	70·3	680·9
71	70·8	130			
70·5	69·8	135			
80	80	105·5	0·883	79·2	547·2
79·7	79·5	108·5			
78	78	111			

Tabelle VIII.

Vaselinöl.

T°		Z	δ	T'	η
A.	E.				
20·6	20·6	981·5			
20·9	20·9	971	0·874	20·9	4685
21·2	21·2	960			
30·2	29·7	586·5			
30	29·9	576·5	0·870	30	2753
30	30	575			
40·2	40	345			
39·8	39·8	353	0·866	40	1663
39·8	39	363			
49·7	49·8	220			
49·7	49·3	227	0·8595	49·5	1074
49·6	49·6	222			
60·5	60	159·5			
59·5	59	163	0·853	60·4	753·4
60·3	60·3	159			
71	70·1	112			
70	69	118	0·8478	70·1	527·2
70·1	70·7	108			
80	80	81			
80	80	85	0·8402	79·9	389·6
79·9	79·4	87			

Tabelle IX.

T	Citronenöl		Bergamottenöl		Terpentinöl		Nelkenöl		Kümmelöl	
	η relativ	η absolut	η_r	η_a	η_r	η_a	η_r	η_a	η_r	η_a
20°	67·27	0·01264	94·69	0·01781	77·70	0·01461	705·1	0·13261	75·45	0·01429
30	58·94	0·01108	78·16	0·01470	66·18	0·01245	440·86	0·08292	64·18	0·01207
40	51·86	0·00975	65·71	0·01235	57·95	0·01088	284	0·05341	55·84	0·01050
50	46·35	0·00871	56·88	0·01067	51·5	0·00968	198·3	0·03729	49·55	0·00932
60	41·65	0·00783	49·45	0·00930	45·9	0·00863	145·8	0·02742	44·21	0·00831
70	37·85	0·00711	44·37	0·00834	41·7	0·00784	108·5	0·02040	40·48	0·00761
80	34·64	0·00651	40·32	0·00758	38·08	0·00716	82·6	0·01553	37·01	0·00696

Tabelle X.

T	Olivenöl		Mandelöl		Vaselinöl	
	η relativ	η absolut	η_r	η_a	η_r	η_a
20°	4296	0·80800	3539	0·66561	4844	0·91102
30	2961	0·55684	2339	0·43988	2753	0·51774
40	1977	0·37190	1620	0·30467	1663	0·31275
50	1347	0·25333	1164	0·21894	1038	0·19521
60	1019	0·19179	876	0·16482	765	0·14391
70	768	0·14452	686	0·12909	529	0·0995
80	615	0·11579	535	0·10065	388	0·07301

Die Tabellen I bis V umfassen die Beobachtungen mit ätherischen Ölen, die Tabellen VI bis VIII jene mit fetten Ölen.

Da es bei den einzelnen Beobachtungen nicht möglich war, vorgeschriebene Temperaturen genau einzuhalten, so wurden für die Temperaturen 20°, 30° u. s. w. die Werthe durch lineare Interpolation aus den Nachbarwerthen ermittelt. Dieselben finden sich für die ätherischen Öle in Tabelle IX, für

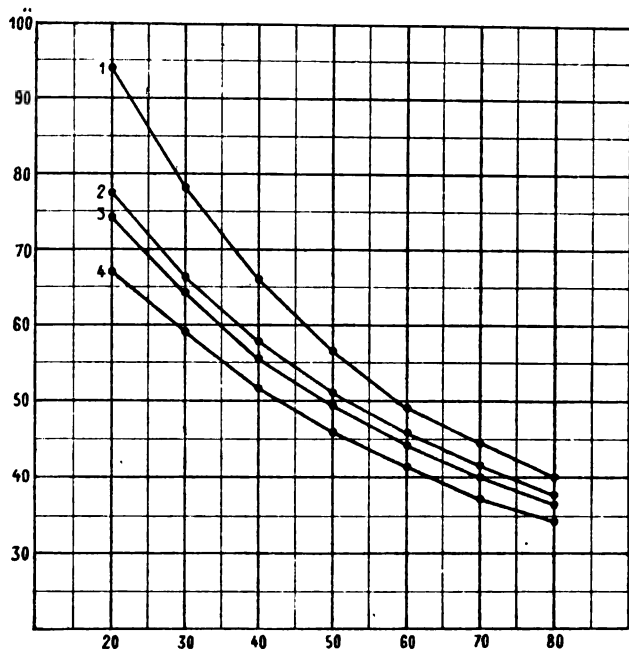


Fig. 1.

die fetten Öle in Tabelle X aufgeführt. In beiden Tabellen sind nebst den auf Wasser bezogenen relativen Reibungscoefficienten η_r auch die absoluten auf (cgs) bezogenen η_a angeführt.

Die Werthe η_r dieser beiden Tabellen sind in den Fig. 1 und 2 graphisch dargestellt. Abscissen sind dabei die Temperaturen, Ordinaten die η_r . In Fig. 1 bezieht sich die Curve 1 auf Bergamottenöl, 2 auf Terpentinöl, 3 auf Kümmelöl und 4 auf Citronenöl. In Fig. 2 bezieht sich die Curve 5 auf Vaselineöl, 6 auf Olivenöl, 7 auf Mandelöl und 8 auf Nelkenöl. Die Curven zeigen sämtlich einen vollkommen regelmässigen

Verlauf, der durch eine sehr bedeutende Abnahme des Reibungscoëfficienten mit der Temperatur charakterisirt ist.

In Tabelle XI ist diese Abnahme ersichtlich gemacht durch die percentuelle Änderung $\Delta\eta$ des Reibungscoëfficienten η_{120} bei

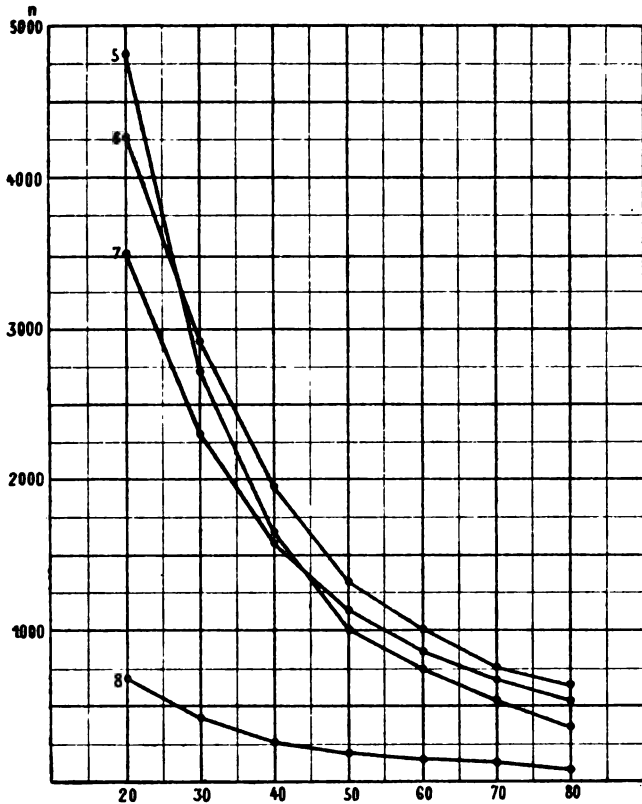


Fig. 2.

20° C. zwischen den Temperaturen 20° und 80°. Es ist demnach in Tabelle XI:

$$\Delta\eta = \frac{100(\eta_{120} - \eta_{180})}{\eta_{120}}$$

Bei den fetten Ölen ist diese Änderung im Allgemeinen viel stärker als bei den ätherischen und erreicht bis 92% des ursprünglichen Werthes. Es stehen diese Resultate in gutem Einklange mit den wenigen Beobachtungen, welche über diesen

Gegenstand vorliegen; es sind dies Messungen von Koller¹ an einigen Ölen, bei denen jedoch nicht die absoluten Werthe der Reibungscoefficienten ermittelt, sondern nur eine starke Abnahme derselben mit der Temperatur constatirt wurde.

Tabelle XI.

Substanz	$\Delta\eta$
Citronenöl	48·7
Terpentinöl	50·9
Kümmelöl	50 9
Bergamottenöl . . .	57·4
Nelkenöl	88·3
Mandelöl	84·8
Olivenöl	85·5
Vaselinöl	91·9

Über die Änderung des Reibungscoefficienten mit der Temperatur bei Walrathöl liegen Messungen von Perry, Graham und Heath vor,² welche eine Abnormität desselben bei der Temperatur 40° ergaben; eine Untersuchung der gleichzeitigen Änderung der Dichte liess bei derselben Temperatur gleichfalls einen Sprung erkennen; von derartigen Unregelmässigkeiten war bei den im Vorstehenden untersuchten Substanzen durchaus nichts zu bemerken.

¹ Diese Ber., Bd. 98 (1889).

² Phil. Mag. (5), 35 (1893).

Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung

von

Karl Bobek in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1894.)

Die allgemeine Fläche dritter Ordnung besitzt vier Invarianten. Dieselben bleiben bei den ∞^{15} Collineationen des Raumes erhalten. Haben zwei Flächen F^3 und F^3 dieselben Invarianten, dann gibt es eine und nur eine bestimmte Collineation, welche die Flächen in einander überführen; denn die allgemeine Fläche dritter Ordnung lässt keine collineare Umformung in sich zu. Im Folgenden ist eine geometrische Deutung der vier Invarianten gegeben.

Ist a eine Gerade der Fläche F^3 , so gehen durch dieselbe fünf Tritangentialebenen, $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5$, welche noch je ein Paar Geraden $b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, b_4c_4, b_5c_5$ von F^3 enthalten. Die Ebenen durch a schneiden F^3 in Kegelschnitten, welche auf a eine Punktinvolution ausscheiden, deren Deckpunkte D_1, D_2 seien und die Ebenen, welche die in D_1 respective D_2 die a berührenden Kegelschnitte von F^3 enthalten, seien mit $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ bezeichnet. D_1 und D_2 sind die parabolischen Punkte von F^3 , die auf a liegen, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ die Tangentialebenen von F^3 in diesen Punkten.

Bezeichnet man nun mit $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4)$ das Doppelverhältniss der vier Ebenen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4$, so sind die vier Doppelverhältnisse $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4), (\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_5), (\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{D}_1), (\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{D}_2)$ die vier Invarianten der Fläche dritter Ordnung.

Dass dieselben bei collinearer Umformung von F^3 erhalten bleiben ist klar, dass ihre Gleichheit aber auch genügt, um zwei Flächen durch Collineation in einander zu überführen, soll gezeigt werden.

Vorher möge ein Hilfssatz für die F^3 bewiesen werden.

Sind $E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$ die Schnittpunkte der Geradenpaare von F^3 in den durch a gehenden fünf Ebenen und projicirt man aus E_1 die Punktpaare $E_2 E_3$ und $E_4 E_5$ durch zwei Ebenen, so schneiden diese a in einem Punktpaare M, N , welches durch die Schnittpunkte des Geradenpaares $b_1 c_1$ harmonisch getrennt wird.

Man kann F^3 erzeugen durch ein Flächenbüschel zweiter Ordnung (F^2), an dessen Flächen man von E_1 die Berührungskegel legt. F^3 ist der Ort der Berührungskegelschnitte. Die Ebenen derselben gehen durch die Gerade a , in welcher sich die Polarebenen von E_1 für die F^2 des Büschels schneiden. Die Fläche F_0^2 , welche durch E_1 geht, schneidet die Ebene \mathcal{G}_1 in dem Geradenpaare $b_1 c_1$ von F^3 . Die Ecken $E_2 E_3 E_4 E_5$ des allen F^2 conjugirten Tetraeders sind die Schnittpunkte der noch übrigen vier Geradenpaare, die in den Ebenen durch a liegen. Da die Geraden $E_2 E_3$ und $E_4 E_5$ conjugirte Polaren für F_0^2 sind, so schneiden die sie aus E_1 projicirenden Ebenen, die \mathcal{G}_1 in einem Strahlenpaare, welches $b_1 c_1$ harmonisch trennt. Hiemit ist der Satz bewiesen.

Man erhält auf diese Art zehn Punkte auf a ausgeschnitten durch die zehn Ebenen, welche durch je drei der fünf Punkte E_i gehen. Durch jeden Punkt E_i gehen sechs der Ebenen, welche a in drei Paaren einer Involution schneiden, deren Deckpunkte aus E_i durch das Geradenpaar $b_i c_i$ projicirt werden. Die fünf so erhaltenen Involutionen haben alle das Paar D_1, D_2 gemeinschaftlich. Denn D_1, D_2 sind die Deckpunkte der Involution, welche die Kegelschnitte von F^3 auf a ausscheiden, zu denen auch die fünf Geradenpaare gehören.

Die Pole von a für die Kegelschnitte von F^3 liegen auf einer Curve dritter Ordnung c^3 , welche durch die fünf Punkte E_i und durch D_1, D_2 geht, in letzteren Punkten die F^3 , also auch \mathfrak{D}_1 respective \mathfrak{D}_2 berührt. Beachtet man, dass die c^3 aus E_1 etwa durch einen Kegel \mathfrak{K}^2 projicirt wird, welcher dem Kegelbüschel durch die vier Geraden $E_1 E_2, E_1 E_3, E_1 E_4, E_1 E_5$ angehört, so erkennt man, dass \mathfrak{K}^2 die Gerade a in einem Paare derjenigen Involution schneiden muss, welche durch die drei Ebenenpaare des obigen Kegelbüschels bestimmt ist. Hieraus ergibt sich wieder, dass D_1, D_2 ein Paar aller fünf Involutionen ist.

Es möge bemerkt werden, dass die Doppelverhältnisse $(E_1E_2E_3E_4)$, $(E_1E_2E_3E_5)$, $(E_1E_2E_3D_1)$, $(E_1E_2E_3D_2)$ auf der Raumcurve c^3 gleich sind den oben hingeschriebenen Doppelverhältnissen der entsprechenden Ebenen.

Es seien nun F^3 und $F^{3'}$ zwei Flächen dritter Ordnung, welche gleiche Invarianten für die Gerade a und a' besitzen.

Es existirt eine ganz bestimmte Raumcollineation, welche die Raumcurve c^3 in die entsprechende $c^{3'}$ für $F^{3'}$ in der Weise überführt, dass den Punkten E_1, E_2, E_3 die Punkte E'_1, E'_2, E'_3 entsprechen. Zu Folge der Beziehungen

$$\begin{aligned}(E_1E_2E_3E_4) &= (E'_1E'_2E'_3E'_4) & (E_1E_2E_3E_5) &= (E'_1E'_2E'_3E'_5), \\ (E_1E_2E_3D_1) &= (E'_1E'_2E'_3D'_1) & (E_1E_2E_3D_2) &= (E'_1E'_2E'_3D'_2)\end{aligned}$$

werden durch dieselbe Raumcollineation die Punkte E_4, E_5, D_1, D_2 von c^3 in die Punkte E'_4, E'_5, D'_1, D'_2 von $c^{3'}$ übergehen, so dass der Geraden $a = D_1D_2$ die Gerade $a' = D'_1D'_2$ entsprechen wird. Daher sind den fünf Ebenen \mathbb{E}_i durch a die fünf Ebenen \mathbb{E}'_i durch a' zugeordnet. Da ferner dem Ebenenpaare durch $E_1E_2E_3$ und $E_1E_4E_5$, welches a in MN trifft das Ebenenpaar durch $E'_1E'_2E'_3$ und $E'_1E'_4E'_5$ entspricht, welches a' in M', N' schneiden möge, so sind M, M' und N, N' homologe Punkte der collinearen Räume.

Zu Folge des Hilfssatzes trennt das Geradenpaar b_1c_1 die beiden Strahlenpaare E_1D_1, E_1D_2 und E_1M, E_1N harmonisch, und dasselbe thut auch $b'_1c'_1$ bezüglich der Strahlenpaare $E'_1D'_1, E'_1D'_2$ und E'_1M', E'_1N' , daher muss durch die Raumcollineation das Geradenpaar (b_1c_1) von F^3 in das Geradenpaar $b'_1c'_1$ von $F^{3'}$ übergehen. Da dasselbe von jedem der fünf Geradenpaare in den Ebenen \mathbb{E}_i und \mathbb{E}'_i gilt, so ist klar, dass die oben angegebene Raumcollineation F^3 in $F^{3'}$ überführt.

Die Gleichheit der eingangs hingeschriebenen vier Doppelverhältnisse für zwei Flächen dritter Ordnung ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Flächen durch eine Raumcollineation in einander überführbar sind.

Sind die vier Invarianten einer Fläche dritter Ordnung gegeben, so kann man noch 15 Constanten zur Bestimmung

der Fläche willkürlich annehmen. Zur Construction der nothwendigen Elemente der Fläche kann man folgendermassen verfahren. Man nehme eine Gerade a willkürlich an (vier Bedingungen für die durchgehende F^3) durch diese drei beliebige Ebenen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ (drei Constanten), dann sind zu Folge der vier gegebenen Invarianten auch $\mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5$ und $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ bestimmt. In $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ wähle man je einen Punkt E_1, E_2 (vier Constanten) und in $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ je eine Gerade t_1 respective t_2 (vier Constanten) beliebig aus, wodurch der Schnittpunkt der Geradenpaare b_1c_1 respective b_2c_2 und die parabolischen Punkte D_1 respective D_2 als Schnittpunkte der t_1 respective t_2 mit a gegeben sind. Durch diese Annahme ist F^3 eindeutig bestimmt. Denn durch E_1, E_2, D_1, D_2 geht eine Raumcurve dritter Ordnung c^3 , welche t_1 und t_2 berührt. Sie möge $\mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5$ in E_3, E_4, E_5 schneiden.

Es ist nun ein Kegel \mathfrak{R}_2^2 bestimmt, welcher E_2 zur Spitze hat, für den E_2E_3, E_2E_4, E_2E_5 ein Tripel conjugirter Strahlen ist, und dessen Polarebene von E_1 die Ebene \mathfrak{E}_2 ist. Desgleichen ist ein Kegel \mathfrak{R}_3^2 bestimmt, für den E_3E_2, E_3E_4, E_3E_5 ein Tripel conjugirter Strahlen und \mathfrak{E}_3 die Polarebene von E_1 ist. \mathfrak{R}_2^2 und \mathfrak{R}_3^2 bestimmen einen Flächenbüschel zweiter Ordnung für den E_2, E_3, E_4, E_5 das gemeinschaftliche Poltetraeder aller Flächen, und a die Schnittgerade der Polarebenen von E_1 für die Flächen des Büschels ist. Es erzeugt daher E_1 mit dem Flächenbüschel in der oben auseinandergesetzten Weise eine F^3 , welche den gestellten Bedingungen genügt. F^3 ist, wie man sieht, die einzige Fläche dritter Ordnung, da die fünf Geradenpaare in den \mathfrak{E}_i durch die fünf Punkte E_i zu Folge des Hilfssatzes bestimmt sind.

Auf Flächen mit conischen oder biplanaren Doppelpunkten, welche speciellen Werthen der Invarianten oder Gleichheiten zwischen denselben entsprechen, möge hier nicht weiter eingegangen werden.

Über die circulare Magnetisirung von Eisendrähten

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1894.)

In einem vom Strom durchflossenen Eisendrahte üben die einzelnen, der Drahtaxe parallelen Fäden, in welche man sich den Strom zerlegt denken kann, eine Richtkraft auf die Molecularmagnete aus, welche dieselben rings um die Axe des Drahtes kreisförmig anzuordnen strebt; sie sucht die Molecularmagnete transversal gegen die Stromfäden zu stellen. Ein solcher Draht befindet sich also in einem magnetischen Zustande, welchen man als circular oder transversal bezeichnet.¹ Das Entstehen und Verschwinden dieses Zustandes äussert sich in der gleichen Weise wie die gegenseitige Induction der Stromfäden; es werden also die beiden Extraströme in geraden Leitern aus magnetisirbaren Metallen viel stärker auftreten als in nicht magnetisirbaren Drähten. Ein Theil dieses magnetischen Zustandes kann auch remanent bleiben. Dieser Theil ist es, welcher die von Villari² entdeckten und als »mechanische oder Erschütterungsströme transversal magnetisirter Eisenstäbe« bezeichneten Erscheinungen liefert. Villari selbst und

¹ Nachfolgend soll für diese Art der Magnetisirung durchwegs die von Herwig eingeführte Bezeichnung »circular« gebraucht werden. Der Ausdruck »transversal magnetisirt« ist nicht eindeutig.

² Villari, Pogg. Ann., Bd. 126, S. 85, 1865 und Bd. 137, S. 569, 1869.

nach ihm H. Streintz¹ studirten die Erschütterungsströme an dicken Eisen- und Stahlstäben und untersuchten dieselben hauptsächlich in ihrer Abhängigkeit von der Intensität des Primärstromes, von der Stärke der Erschütterung und von der Zahl der vorausgegangenen Stösse. Während diese Untersuchungen nur den remanenten Theil betrafen, hat Herwig² mittelst der Wheatstone'schen Brückenordnung direct das Auftreten starker Schliessungs- und Öffnungsextraströme constatirt, wenn ein Zweig der Brücke aus einem dicken Eisen- oder Stahlstabe gebildet war. Später hat Lorenz³ mit Brücke und Telephon den Selbstinductionscoëfficienten zweier 31 m langer Eisendrähte gemessen und die Susceptibilität der Eisensorte zu ungefähr 10 bestimmt. Im Allgemeinen waren alle diese Versuche mehr qualitativer Natur und auch gar nicht so eingerichtet, um genauere Messungen über das Verhalten der Eisendrähte bei circularer Magnetisirung zu gestatten. Es sind vor Allem zwei Fragen, welche in dieser Hinsicht gestellt werden können. Die erste Frage ist dieselbe, welche auch bezüglich der axialen Magnetisirung immer gestellt wird, sie bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen Permeabilität und der Stärke der magnetisirenden Kraft. Die zweite Frage betrifft das Verhältniss der Permeabilität bei axialer und circularer Magnetisirung für ein und dasselbe Individuum. Bezüglich der ersten Frage kann man wohl vermuthen, dass sich der Verlauf der Magnetisirung auch in circularer Richtung ungefähr so abspielen dürfte wie in der axialen; allein hinsichtlich des zweiten Punktes hat man kaum Erfahrungsthatsachen oder theoretische Erwägungen, auf welche gestützt, man das Resultat des Versuches auch nur qualitativ angeben könnte.

Ein Umstand allerdings vereitelt die völlig exacte Beantwortung der beiden oben aufgeworfenen Fragen, und das ist die Thatsache, dass wir in einem vom Strom durchflossenen Drahte rings um die Axe magnetisirende Kräfte haben, welche in der Axe selbst gleich Null sind und gegen die Peripherie zu

¹ H. Streintz, diese Sitzungsber., Bd. 76, S. 946, 1877.

² Pogg. Ann., Bd. 153, S. 115, 1874.

³ Wied. Ann., Bd. VII, 1879.

stetig wachsen. Wir können daher nur von einem Mittelwerth der magnetisirenden Kräfte sprechen. Nun wächst insbesondere bei weichen Eisendrähten die Susceptibilität zum Theile viel rascher wie die magnetisirende Kraft; der beobachtete Werth der Susceptibilität entspricht daher, mit Ausnahme der magnetisch sehr harten Drähte, nicht ganz dem Mittelwerthe der magnetisirenden Kraft. Doch ist es immerhin möglich, aus dem Verlaufe der Magnetisierungscurven selbst beim weichen Eisen Schlüsse über den Unterschied in der axialen und circularen Richtung zu ziehen.

Mit der Frage bezüglich der Magnetisirbarkeit des Eisens nach verschiedenen Richtungen hat sich Herwig¹ ebenfalls schon beschäftigt. Er untersuchte Eisenröhren (Gasleitungsröhren aus weichem Walzeisen gezogen) sowohl in axialer, als auch circularer Richtung. Die Magnetisirung in axialer Richtung erfolgte durch einen in der Axe der Röhre gelegten vom Strom durchflossenen Draht, die Stärke der Magnetisirung wurde durch den in der Richtung der Axe inducirten Strom gemessen. Die Resultate dieser Versuche werden weiter unten besprochen.

Mit Rücksicht auf die genaue Berechnung der Werthe der Susceptibilität und der magnetisirenden Kräfte bietet die Röhrenform grosse Vortheile; die Verhältnisse liegen da nahezu wie bei einem gleichmässig bewickelten Ringe, und die Röhre stellt uns eigentlich einen Ring mit rechteckigem Querschnitt vor. Vom praktischen Standpunkte aber empfiehlt es sich, solche Untersuchungen an Drähten zu machen, und an solchen wurden die hier beschriebenen Messungen auch gemacht. Nach Erwägung mehrerer Umstände wurden folgende Drähte für die Untersuchung gewählt.

1. Ein gut ausgeglühter, weicher Eisendraht, 0·21 *cm* dick. Der Draht wurde in einer Eisenhandlung, schon ausgeglüht gekauft und wird nachfolgend als »Eisen weich« bezeichnet.

2. Ein 0·20 *cm* dicker Frischeisendraht, bezogen von der Drahtzieherei der Alpinen Montangesellschaft in Graz. Das

¹ Pogg. Ann., Bd. 156, S. 430, 1875.

Frischeisen ist das reinste Eisen,¹ welches fabrikmässig hergestellt wird. Dieser Draht wurde durch Zug gehärtet, und zwar wurde er ohne Ausglühen durch zwei Zuglöcher von 0·25 auf 0·20 *cm* gezogen. Diese Sorte wird unter »Eisen hart« angeführt.

3. Ein Bessemerstahldraht Nr. 4, 0·20 *cm* dick, ohne Ausglühen gezogen in drei Zügen von 0·28 *cm*, geliefert ebenfalls von der genannten Drahtzieherei. Dieser Draht wird kurzweg »Bessemerstahl« genannt.

Für die Wahl der Dicke war zum Theile der Umstand massgebend, dass zu dünne Drähte beim Durchgange der constanten Ströme zu stark erwärmt worden wären, anderseits war die Anwendung dickerer Drähte für die Untersuchung der axialen Magnetisirung wegen des Axenverhältnisses nicht günstig.

Die Versuchsanordnung.

Für die Beobachtung der circularen Magnetisirung, respective der Extraströme stehen zwei Methoden zur Verfügung, die mit dem Differentialgalvanometer und die mit der Wheatstone'schen Brücke. Die erste, bei welcher die Galvanometerrollen mit ihren verhältnissmässig hohen Selbstinductionscoëfficienten direct in den primären Stromkreis eingeschaltet werden, eignet sich weniger gut zu solchen Beobachtungen wie die zweite, welche ich gewählt habe. Die Brückenverzweigung war, wie folgt, hergestellt. Der zu untersuchende Eisendraht, ungefähr 1 *m* lang und in der Mitte stimmgabelförmig gebogen, bildete den einen Zweig *AC* (Fig. 1). Für die übrigen Zweige habe ich einen Messingdraht von entsprechender Dicke gewählt, dessen Widerstand pro Längeneinheit nahe mit jenem des Eisendrahtes übereinstimmte. Der Zweig *BC*, gleich lang wie *AC*, war also aus Messingdraht und so gebogen wie der Eisendraht. *AC* und *BC* waren an die beiden Seiten eines Brettes ganz symmetrisch befestigt und standen vertical in einem hohen, mit Wasser gefüllten Glasgefässe. An die beiden

¹ Auch die erste Drahtsorte war ein ziemlich reines Eisen, was ein Vergleich mit einem gut ausgeglühten Draht aus Frischeisen zeigte.

Punkte *A* und *B* wurde ein etwas über 2 *m* langer Draht (von derselben Dicke wie in *BC*) angelöthet und in der aus der Figur ersichtlichen Weise am Beobachtungstische horizontal festgelegt. Zwischen *A* und *B* kam das Galvanometer, mit langsam schwingender Magnetnadel (8 Sec.); ein ziemlich empfindliches Instrument von Hartmann und Braun, dessen Rollen parallel geschaltet waren.

Der Batteriezweig, enthaltend das Element *E* und einen Widerstandskasten *W*, war mit einem Ende an *C* angeschlossen; das andere wurde in bekannter Weise am Messingdrahte hin- und hergeschoben und der Punkt *D* aufgesucht, bei welchem das Galvanometer keinen Strom anzeigte; an diesem Punkte wurde es sodann angelöthet.

Da die Compensation nur bei einer bestimmten Temperatur vorhanden war, so musste für alle Fälle noch ein grösserer Nebenschlusswiderstand *w* zwischen *A* und *D*, respective *B* und *D* angebracht werden, um die Nadel in allen Fällen auf 0 zu bringen. Zur Messung der Stromstärke im Batteriezweige diente ein Gal-

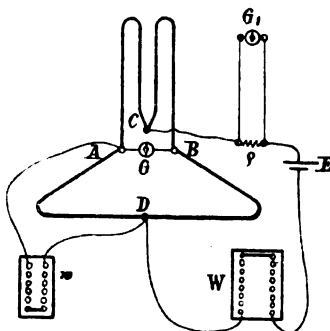


Fig. 1.

vanometer, dessen Enden an den kleinen Widerstand ρ (0.05 Ohm) gelegt waren. Die Angaben dieses Galvanometers wurden empirisch geacht. Die Zweige *AC* und *BC* befanden sich wie gesagt in Wasser und waren dadurch vor raschen Temperaturschwankungen geschützt. Für den Theil *ADB* war eine grössere Vorsicht nicht nothwendig, denn eine kleine gleichmässige Erwärmung des ganzen Theiles hatte durchaus keine Störung zur Folge; nur einseitige Temperaturänderungen, wie sie etwa durch Bestrahlung oder Luftströmungen bedingt sind, mussten vermieden werden. Um solche hintanzuhalten, habe ich diesen Theil mit Papier und Tüchern gut zugedeckt.

In den Batteriezweig war auch ein Commutator eingeschaltet, und es wurde immer so eingestellt, dass sich beim Commutiren keine Stellungsänderung der Nadel zeigte.

Die elektrodynamische Induction der einzelnen Brücken-
zweige auf sich selbst ist hier sehr klein und hebt sich in der
Wirkung auf die Galvanometernadel nahezu auf (ein eventueller
kleiner Überschuss in der einen Richtung wurde in Rechnung
gezogen); nur der Eisendraht *AC* liefert infolge der circularen
Magnetisirung einen starken Extrastrom, und wir bekommen
beim Commutiren, insbesondere bei intensiveren Strömen, sehr
kräftige Ausschläge der Galvanometernadel. Die Widerstände
in den Brückenzweigen sind gegenüber dem Galvanometer-
widerstande ziemlich klein, und mit Rücksicht darauf wäre es
besser gewesen, längere Eisendrähte zu nehmen; doch wären,
dann wieder Schwierigkeiten wegen der Constanthaltung der
Temperatur entstanden; aus gleichen Gründen habe ich es ver-
mieden, dem Eisendrahte gegenüber wieder einen Eisendraht
als Brückenzweig anzubringen, wodurch der Ausschlag ver-
doppelt worden wäre.

Zur Bestimmung der axialen Magnetisirung wurde der
gerade, ebenfalls ungefähr 1 *m* lange Draht¹ in eine 121·5 *cm*
lange Magnetisirungsspule (äusserer Durchmesser 3·5 *cm*)
gebracht und nach der ballistischen Methode untersucht. Die
Spule hatte zwei Lagen und 11·34 Windungen pro Längen-
einheit. Die secundäre Rolle war auf ein Glasrohr gewickelt
und hatte 150 Windungen. Sie befand sich in der Mitte der
Magnetisirungsspule und ober der Mitte des zu untersuchenden
Drahtes. Ein in die Leitung des Primärstromes geschalteter
Widerstandskasten gestattete die Anwendung verschiedener
Stromstärken. Als Galvanometer diente dasselbe Instrument
wie bei der Untersuchung der circularen Magnetisirung, nur
waren die Rollen diesmal hinter einander geschaltet.

Wegen des sogenannten Kriechens eignet sich die balli-
stische Methode weniger gut zur Bestimmung von Magneti-
sirungscurven weicher Eisendrähte wie die magnetometrische.²
Für die Beantwortung der ersten Frage wäre das in Betracht

¹ Ging die axiale der circularen Magnetisirung voraus, so wurde der
wirksame Theil des Drahtes durch das Anlöthen an die Punkte *A* und *C* ein
wenig verkürzt.

² Ewing, J. A., Magnetische Induction in Eisen und verwandten
Metallen, S. 120 der deutschen Ausgabe.

zu ziehen, für die zweite ist es kaum von Belang, weil die Schwingungsdauer der Galvanometernadel dieselbe ist sowohl bei der Beobachtung der axialen, als auch der circularen Magnetisirung und daher der gemachte Fehler in beiden Fällen gleich gross ausfällt.¹

Die Beobachtungsergebnisse.

1. Circular.

Das magnetische Verhalten eines Drahtes ist durch die Curve, welche man bei einem vollen Magnetisirungscyclus erhält, vollständig charakterisirt. Die Beobachtungen werden in solchen Fällen bekanntlich so gemacht, dass man die magnetisierende Kraft in kleinen Sprüngen wachsen, respective abnehmen lässt, und zwar im positiven und negativen Sinne. Bei jedem Sprung wird der Zuwachs der Magnetisirungsintensität nach der ballistischen oder magnetometrischen Methode bestimmt. Diese Beobachtungsmethode ist nun allerdings auch bei der circularen Magnetisirung nicht ausgeschlossen; allein sie würde bedeutende Vorkehrungen erfordern, um die Widerstände in den Brückenweigen während der Dauer eines ganzen Cyclus constant zu erhalten. Bei der hier gewählten Anordnung musste man von der cyclischen Beobachtung absehen, und ich habe daher immer den Ausschlag beim Commutiren beobachtet. Vor jeder Messung musste die Compensation der Zweigwiderstände durch Veränderungen am Nebenschlusswiderstande hergestellt werden. Die Beobachtungen waren ausserordentlich mühsam, da eine kleine Störung in der Temperaturvertheilung der Drähte gleich eine Änderung der Ruhelage der Nadel zur Folge hatte. Auch die Thermoströme bildeten ein Hinderniss, welches sich manchmal recht bemerkbar machte. Bei grösseren

¹ Bezüglich der axialen Magnetisirung des weichen Eisendrahtes in schwachen Feldern habe ich Versuche mit einem Thomson-Carpentier-Galvanometer bei zwei verschiedenen Schwingungsdauern (3 und 12 Sec.) gemacht, und es hat sich herausgestellt, dass die Magnetisirung bei »Eisen weich« in einer Zeit ablaufen muss, welche auch gegen 3 Secunden kurz ist. Die der Magnetisirung entsprechenden Ausschläge wurden mit denen, welche eine bestimmte Condensatorentladung ergab, verglichen.

Stromstärken wurden in den Zweigdrähten schon ziemlich beträchtliche Wärmemengen degagirt, und man musste jedesmal nach Einsetzen des stärkeren Stromes einige Zeit warten, bis sich ein stationärer Zustand einstellte. Die stärksten Ströme, welche bei der circularen Magnetisirung in Anwendung kamen, hatten ungefähr 6.5 Amp. im Batteriezweig. Es schien mir nicht angezeigt, noch kräftigere anzuwenden.

Aus dem beim Commutiren erhaltenen halben Ausschlag des Galvanometers $\frac{\alpha}{2}$ wurde zunächst der Integralwerth der im Eisen inducirten elektromotorischen Kraft nach der Formel

$$\int edt = A \frac{RT}{\pi} \frac{\alpha}{2} e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lambda}} \quad 1)$$

berechnet. Dabei ist

$$A = \frac{(w_3 + w_4)(w_1 + w_2) + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\rho}{w_3 + w_4}.$$

Der Widerstand des Eisens ist hiebei mit w_1 , der des benachbarten im Wasser befindlichen Messingdrahtes mit w_2 bezeichnet. R , T , λ , ρ bedeuten bekanntlich den Reductions-factor, die Schwingungsdauer, das log. Decrement und den Widerstand des Galvanometers. Der Reductions-factor wurde mit Hilfe eines Clark'schen Elementes und eines bekannten Widerstandes bestimmt. Das Auftreten oder Verschwinden der circularen Magnetisirung wirkt so wie eine Selbstinduction in dem betreffenden Zweige. Bezeichne ich mit S den Coëfficienten dieser Selbstinduction, so bestimmt sich dessen Werth aus der Gleichung

$$Si_1 = \int edt, \quad 2)$$

wo

$$i_1 = \frac{w_2 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} \cdot i.$$

i bedeutet die Stromstärke im Batterie-, i_1 die im Eisendrahtzweige.

Der weitaus grösste Theil des beim Commutiren erhaltenen Ausschlages entspricht der Induction durch die circulare Magnetisirung. Wären alle Batteriezweige gleich lang und

gleich dick, so würden sich die elektrodynamischen Inductionen gegenseitig aufheben. In unserem Falle traf dies nicht ganz zu, und es musste mit Rücksicht auf die nicht ganz gleiche Länge der Brückenweige und auf die Stromstärkeverhältnisse in denselben an S eine kleine Correctur (insbesondere bei Bessemerstahl und Frischeisen) angebracht werden, deren Berechnung die theoretische Formel für den Selbstinductionscoëfficienten s eines geradlinig gespannten Drahtes

$$s = 2l \left(\log \frac{2l}{rc} - \frac{1}{4} \right)$$

zu Grunde gelegt wurde. l ist dabei die Länge, r der Radius des Drahtes; $c = e^{3/2}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen. Die so corrigirten Werthe von S sind in den Tabellen unter \bar{S} eingetragen. Aus diesem Werthe lässt sich nun die Susceptibilität κ berechnen, und zwar mit Hilfe einer Formel, welche von Kirchhoff¹ entwickelt wurde. Kirchhoff zeigte, dass durch die circulare Magnetisirung der Selbstinductionscoëfficient des Drahtes um $2\pi\kappa l$ vergrößert wird. Wir setzen also

$$\bar{S} = 2\pi\kappa l. \quad 3)$$

Berechnet man auf diese Weise κ , so findet man, dass es insbesondere für weiches Eisen mit der Stromstärke (innerhalb der Versuchsgrenzen) bedeutend ansteigt. Bei den Messungen über die Magnetisirung in axialer Richtung gibt man zu jedem Werthe der magnetisirenden Kraft oder Feldstärke den entsprechenden Werth von κ an. Um die circulare mit der axialen Magnetisirung zu vergleichen, müsste man auch hier das gleiche thun; allein hier bietet sich insofern eine Schwierigkeit dar, als die circular wirkende magnetisirende Kraft bei einem vom Strom durchflossenen Drahte nur in gleichen Abständen von der Axe constant ist; sie steigt von der Axe, wo sie den Werth 0 hat bis zur Peripherie, und ist hier ein Maximum, und zwar gleich $\frac{2i}{r}$, wo r den Radius des Drahtes und i die

¹ Pogg. Ann., Ergbd. V, S. 1. Später hat auch Lorenz (Wied. Ann., Bd. VII) diese Formel abgeleitet und zur Berechnung von κ benützt.

Stromstärke bedeutet. Bezeichnen wir mit H die magnetisirende Kraft an irgend einer Stelle des Drahtquerschnittes, mit a die Entfernung dieser Stelle von der Axe und mit u die Stromdichtigkeit, so ist

$$H = 2\pi a u. \quad 4)$$

Rechnet man nun aus der Formel 3) die Susceptibilität, so entspricht diese einer magnetisirenden Kraft, welche sicher zwischen 0 und $\frac{2i}{r}$ liegt; allein den genauen Werth von H , welcher zum berechneten κ gehört, kann man kaum angeben. Für hartes Eisen und für Stahl, bei welchen κ nur langsam ansteigt, wird der zum berechneten Werthe von κ gehörige Werth der magnetisirenden Kraft nahezu durch den Mittelwerth von H gegeben sein. Dieser Mittelwerth ergibt sich, wenn man alle H über den ganzen kreisförmigen Drahtquerschnitt summirt und durch den Querschnitt dividirt. In den Curven sind die Werthe von κ überall auf den Mittelwerth von H bezogen.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

i die Stromstärke im Batteriezweige } in abs. E.,
 i_1 » » » Eisendraht }

α den Galvanometerausschlag beim Commutiren,

β den Galvanometerausschlag beim Öffnen des Primärstromes,

H_{\max} und H_{mit} den maximalen und den mittleren Werth der circularen magnetisirenden Kraft. Es ist $H_{\text{mit}} = 0.666 H_{\max}$.

$\int edt$ den Integralwerth der elektromotorischen Kraft, entsprechend dem Galvanometerausschlag $\frac{\alpha}{2}$,

S und \bar{S} den nicht corrigirten und corrigirten Werth des Selbstinductionscoefficienten,

$\frac{\alpha}{2} - \beta$ entspricht dem remanenten Theil des circularen

Magnetismus,

$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$ das Verhältniss des remanenten zum temporären

Magnetismus.

Jeder der unter α eingetragenen Werthe ist das Mittel aus vier Beobachtungen; dasselbe gilt von β ; in die Tabellen wurde jedoch nur der Mittelwerth eingetragen. Unter jeder Tabelle sind die Widerstände der Brückenzeige und die Galvanometerconstanten angegeben. Den Beobachtungen bei niederen Stromstärken (insbesondere für Bessemerstahl) darf kein grosses Gewicht beigelegt werden, da die Ausschläge sehr klein waren. Ich glaubte jedoch, diese Werthe nicht unberücksichtigt lassen zu müssen, da sie sich den weiteren Messungen ziemlich gut anschliessen.

Tabelle I und II beziehen sich auf »Eisen weich«. Von dieser Sorte wurden zwei Proben untersucht, welche derselben Drahtrolle entstammten. Die erste Probe wurde zuerst circular, dann axial untersucht. Bei der zweiten Probe war die Reihenfolge axial, circular und wieder axial.

Tabelle III und IV geben die Resultate für »Eisen hart«. Es waren ebenfalls zwei Proben und die Reihenfolge hinsichtlich der axialen und circularen Magnetisirung dieselbe wie oben.

Tabelle V gilt für den Bessemerstahldraht. Nur eine Probe. Die circular Magnetisirung ging der axialen voraus.

Zu den Beobachtungen ist noch Folgendes zu bemerken. Die Messungen wurden mit der niedersten Stromstärke angefangen und bis zur höchsten fortgesetzt; bei dieser wurde der Draht hierauf mehrmals (hundertmal und darüber) ummagnetisirt, dann durch Stromschwächung und Wechsel entmagnetisirt und schliesslich die zweite und dritte Beobachtungsreihe gemacht. Die Mittelwerthe $\frac{\alpha}{2}$ sind in allen diesen Fällen den zwei letzten Reihen entnommen. Nur bei den Messungen in Tabelle I wurde die Probe gleich zu Beginn bei der höchsten Stromstärke mehrmals ummagnetisirt.

0.230	0.126	120.0	63.6	30.4	2.40	1.60	3873	30710	30450	46.8	33.2	0.52
		126.5										
	0.145	135.0	95.4	38.6	2.77	1.85	5810	40000	39740	61.2	56.8	0.59
0.265		191.0										
		191.5										
	0.239	190.0	264.5	69.2	4.56	3.04	16110	67300	67040	103.5	195.3	0.70
0.436		517.4										
		533.2										
		535.8										
		890										
		866										
0.659	0.362	862	436.5	98.5	6.90	4.60	26580	73370	73110	112.9	338.0	0.77

$w_1 = 0.0387$; $w_2 = 0.0464$; $w_3 = 0.0533$; $w_4 = 0.0455 \times 10^9$
 $R = 0.409 \times 10^7$; $\rho = 0.187 \times 10^9$; $\tau = 8.21 \text{ Sec.}$; $\lambda = 0.277$.

Tabelle II.

Eisen, weich — 2. Probe, Länge = 104 cm.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{\max}	H_{mit}	$\int \epsilon_{\text{el}} dt$	S	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0.024	0.012	5.1	2.7	2.5	0.23	0.16	134	10890	16.3	0.2	0.08
		5.3									
		5.3									
		9.4									
0.041	0.021	11.5	5.6	4.3	0.40	0.27	283	13480	20.2	1.3	0.24
		10.8									
		24.3									
		26.4									
0.084	0.043	25.3	12.9	10.2	0.81	0.54	655	15340	23.0	2.7	0.21
		54.8									
		66.3									
		66.0									
0.155	0.079		33.1	21.3	1.50	1.00	1678	21290	31.9	11.8	0.36

0.229	0.116	126.8 146.0 145.5	72.9	37.0	2.22	1.48	3696	31760	47.5	35.9	0.49
0.264	0.134	180.5 202.5 198.2	100.1	44.0	2.56	1.71	5072	37770	56.5	56.1	0.56
0.428	0.218	598.0 607.5 630.3	309.4	86.3	4.15	2.76	15690	72090	107.9	223.1	0.72
0.633	0.322	1029 1006 1004	502.5	123.9	6.14	4.09	25480	79060	118.3	378.6	0.75

$$w_1 = 0.0388; w_2 = 0.0402; w_3 = 0.0653; w_4 = 0.0640 \times 10^9$$

$$R = 0.409 \times 10^{-7}; \rho = 187 \times 10^9; \tau = 8.21 \text{ Sec.}; \lambda = 0.277.$$

Tabelle III.

Eisen, hart — 1. Probe — Länge = 104 cm.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{\max}	H_{mit}	$\int cat$	S	\bar{S}	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0.022	0.012	2.2 2.6 2.5	1.2	0.9	0.24	0.16	73	6140	5860	9.0	0.3	0.25
0.040	0.022	4.1 5.4 5.6	2.5	1.6	0.44	0.29	152	6920	6041	10.2	0.9	0.36
0.081	0.045	10.8 15.0 11.5	6.2	4.1	0.90	0.60	375	8340	8060	12.3	2.1	0.34
0.151	0.084	25.4 31.8 27.7	14.1	8.9	1.67	1.11	852	10200	9920	15.2	5.2	0.37

0.225	0.124	52.0	27.4	15.9	2.48	1.65	1655	13340	13060	20.0	11.5	0.42
		57.0										
		55.2										
		62.0										
		73.5										
0.260	0.143	72.2	34.6	19.3	2.86	1.91	2090	14020	14340	22.0	15.3	0.44
		237.0										
		260.0										
0.427	0.236	251.0	124.7	49.2	4.72	3.15	7530	31910	31630	48.4	75.5	0.61
		585.6										
		582.9										
0.641	0.354	545.3	285.5	76.2	7.08	4.72	17240	48710	48430	74.2	209.0	0.73

$$w_1 = 0.0385; w_2 = 0.0476; w_3 = 0.0525; w_4 = 0.0425 \times 10^9$$

$$R = 0.423 \times 10^{-7}; \rho = 0.187 \times 10^9; \tau = 7.87 \text{ Sec.}; \lambda = 0.267.$$

Tabelle IV.

Eisen, hart. — 2. Probe. Länge = 106 cm.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{\max}	H_{mit}	\int_{eat}	S	\bar{S}	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0.024	0.013	2.4 2.8 2.7	1.4	1.0	0.26	0.17	70	5470	5330	8.0	0.4	0.26
0.041	0.022	4.3 5.5 5.2	2.7	1.9	0.44	0.29	138	6270	6140	9.2	0.8	0.29
0.084	0.044	13.1 14.5 14.7	7.3	5.0	0.90	0.60	376	8470	8340	12.5	2.3	0.32
0.155	0.082	26.2 30.8 31.6	15.6	10.5	1.65	1.10	803	9820	9690	14.4	5.1	0.33

0.229	0.121	52.4	28.1	17.7	2.44	1.63	1447	11970	11840	17.8	10.4	0.37
		56.5										
		56.1										
		60.4										
		70.0										
0.264	0.139	69.4	34.8	21.2	2.82	1.88	1792	12860	12730	19.1	13.6	0.39
		184.7										
		209.5										
0.427	0.226	210.0	104.9	48.0	4.56	3.04	5402	23940	23810	35.8	58.9	0.54
		538.6										
		519.6										
0.632	0.334	517.2	259.2	83.8	6.74	4.49	13350	40000	39870	59.9	175.4	0.67

$w_1 = 0.0384$; $w_2 = 0.0430$; $w_3 = 0.0675$; $w_4 = 0.0603 \times 10^9$
 $R = 0.432 \times 10^{-7}$; $\rho = 0.171 \times 10^3$; $\tau = 8.01$ Sec.; $\lambda = 0.276$.

Tabelle V.

Bessemerstahl. — Länge = 99·3 cm.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{\max}	H_{mit}	$\int cat$	S	\bar{S}	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0·021	0·011	1·2 1·4 1·4	0·7	0·6	0·23	0·15	50	4420	4320	6·9	0·1	0·14
0·039	0·021	2·8 2·7 3·1	1·4	1·3	0·42	0·28	100	4820	4720	7·6	0·1	0·07
0·078	0·042	5·3 5·9 6·0	2·9	2·5	0·85	0·57	207	4920	4820	7·7	0·4	0·14
0·142	0·077	11·2 11·2 11·2	5·6	4·4	1·55	1·03	400	5220	5120	8·2	1·2	0·21

0.205	0.111	16.9 17.6	8.6	7.3	2.23	1.49	614	5560	5460	8.7	1.3	0.15
0.236	0.127	19.2 18.8 20.2	9.7	7.5	2.57	1.71	693	5445	5345	8.6	2.2	0.23
0.372	0.201	31.5 36.3 34.5	17.0	14.2	4.05	2.70	1214	6070	5970	9.6	2.8	0.16
0.541	0.292	52.0 50.5 52.0	25.7	22.4	5.89	3.93	1835	6293	6193	9.9	3.3	0.12

$$w_1 = 0.0761; w_2 = 0.088; w_3 = 0.1016; w_4 = 0.0870 \times 10^9$$

$$R = 0.428 \times 10^{-7}; p = 0.184 \times 10^9; \tau = 8.00 \text{ Sec.}; \lambda = 0.267.$$

2. Axial.

Die Bedeutung der Buchstaben ist in diesen Tabellen dieselbe wie vorher, H bedeutet jetzt die Feldstärke überhaupt, J die Intensität der Magnetisirung. Der Reductionsfactor des Galvanometers, bestimmt wie vorher, war in diesem Falle $= 0.1072 \times 10^{-7}$ abs. E., $T = 7.89$ Sec. Der Widerstand des Galvanometers, der Zuleitung und der Secundärrolle $= 3.24 \times 10^9$; $\lambda = 0.272$ (brig.). Bei niederen Feldstärken, insbesondere für die Beobachtungen an Bessemerstahl habe ich statt des Hartmann-Galvanometers ein solches von Thomson-Carpentier benützt, welches ungefähr zehnmal grössere Ausschläge lieferte wie das erste. Die Beobachtungen wurden dann für die Verhältnisse des Hartmann-Galvanometers umgerechnet und in die Tabellen eingetragen.

Den Tabellen ist ein »vor circ.« oder »nach circ.« beigefügt. Dies bedeutet, dass die in der Tabelle angeführten Messungen vor oder nach der Untersuchung der circularen Magnetisirung gemacht wurden.

In den meisten Fällen sind zwei Reihen beobachtet worden: eine vor und die andere nach mehrmaliger Ummagnetisirung bei der höchsten Stromstärke; für den Vergleich wurden immer nur die letzteren benützt.

Für die Untersuchung der circularen Magnetisirung musste der Draht, wie erwähnt, stimmgabelförmig abgebogen werden. Der Bug kam gerade in die Mitte des Drahtes zu liegen. Zur Messung in der axialen Richtung ist der Draht wieder gerade gerichtet worden und die Secundärspule lag eben über der deformirten Stelle. Solche Deformationen ändern aber bei weichen Drähten die Susceptibilität ganz erheblich. Thatsächlich wurde diese in den, nach der circularen Magnetisirung ausgeführten Beobachtungen durchwegs kleiner gefunden wie vorher. Der Grund kann in der vorausgegangenen circularen Magnetisirung oder auch in den Deformationen, wahrscheinlich aber in beiden liegen.

Mit »Eisen weich« (zweite Probe) habe ich noch folgenden Versuch gemacht. Der Draht wurde in zwei, je 53 cm lange Hälften geschnitten und diese in der axialen Richtung untersucht.

Tabelle VI.

Eisen weich. — 1. Probe, Länge = 101·5 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	x	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0 00085	2·2	1·1	1·0	1·9	0 12	15·8	0·1	0·09
0·0022	6·5	3·2	2·9	5·6	0·31	17·9	0·3	0·11
0·0041	14·8	7·4	5·9	12·8	0·58	21·9	1·5	0·20
0·0067	30·1	15·0	11·0	25·9	0·95	27·1	4·0	0·27
0·0108	69·9	34·9	21·3	60·3	1·54	39·2	13·6	0·39
0·0128	105·7	52·8	28·0	91·2	1·82	50·0	24·0	0·45
0·0203	418 7	209 3	47·5	381·7	2·89	132	161·8	0·77
0·0311	761·9	380·9	63·3	658·2	4·43	149	317·6	0·83

Tabelle VII.

Eisen, weich. — 2. Probe, Länge = 109 cm (vor circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	x	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0·00083	2·8	1·4	1 3	2 7	0·12	22·7	0·1	0·07
	3·1	1·5	1·4				0·1	0·07
0·0022	8·2	4·1	3·7	8·1	0·31	26·0	0·4	0·10
	9·4	4·7	4·1				0·6	0·13
0·0044	18·7	9·4	8·1	19·9	0·63	31·6	1·3	0·14
	23·0	11·5	9·4				2·1	0 18
0·0067	34·6	17·3	13·8	37·0	0·95	38·9	3·5	0 20
	42·8	21·4	15·8				5·6	0·26
0·0108	86·5	43·2	27·0	93·1	1·54	60·6	16·2	0·37
	107·8	53·9	29·7				24·2	0·45
0·0130	149·3	74·7	36·1	156·6	1·85	84·8	38·6	0·52
	181·2	90·6	39·3				51·3	0·57
0·0204	577·2	288·6	63·8	504·2	2·91	173	225	0·78
	583·6	291·6	63·2				229	0·78
0·0312	930·6	465·3	82·4	787·1	4·45	177	383	0·82
	910·8	455·5	81·7				374	0·82

Tabelle VIII.

Eisen, weich. — 2. Probe, Länge = 106·5 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0·00084	2·2	1·1	1·1				0·0	0·03
	2·4	1·2	1·1	2·0	0·12	17·1	0·1	0·03
0·0022	6·6	3·3	3·0				0·3	0·09
	7·5	3·8	3·3	6·6	0·31	21·2	0·5	0·13
0·0044	15·7	7·9	6·6				1·3	0·17
	19·1	9·6	7·6	16·6	0·62	26·8	2·0	0·21
0·0067	28·6	14·3	11·2				3·1	0·22
	34·8	17·4	12·6	30·1	0·95	31·6	4·8	0·28
0·0108	67·2	33·6	21·6				12·0	0·36
	82·2	41·1	24·5	71·0	1·53	46·3	16·6	0·40
0·0129	103·6	51·8	29·0				22·8	0·44
	129·4	64·7	31·6	111·8	1·83	61·0	33·1	0·51
0·0202	463·3	231·6	51·8				179·8	0·78
	477·1	238·5	51·3	412·1	2·88	143	187·2	0·78
0·0308	807·7	403·8	67·4				336·4	0·83
	788·2	394·1	67·8	681·0	4·39	155	326·3	0·83

Tabelle IX.

Eisen, hart. — 1. Probe, Länge = 101·5 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0·00085	1·1			1·0	0·12	8·7		
0·0022	2·9	1·5	1·3	2·8	0·31	9·0	0·2	0·12
0·0041	6·9	3·5	2·8	6·6	0·58	11·3	0·7	0·20
0·0067	14·2	7·1	5·5	13·7	0·94	14·5	1·6	0·23
0·0108	30·8	15·4	10·6	29·8	1·55	19·3	4·8	0·31
0·0128	42·4	21·2	13·3	41·0	1·84	22·3	7·9	0·37
0·0203	118·7	59·3	25·2	114·7	2·90	39·6	34·1	0·57
0·0311	293·2	146·6	47·8	283·7	4·43	64·0	96·8	0·66

Tabelle X.

Eisen, hart. — 2. Probe, Länge = 110 cm (vor circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0.00087	0.90	0.45	0.43	0.9	0.12	7.4	0.02	0.04
	0.94	0.47	0.47				0.00	0.00
0.0022	2.7	1.3	1.2	2.7	0.31	8.8	0.09	0.07
	2.8	1.4	1.3				0.1	0.07
0.0044	6.0	3.0	2.7	6.4	0.62	10.3	0.3	0.10
	6.6	3.3	2.8				0.5	0.15
0.0067	10.8	5.4	4.4	11.2	0.96	11.7	1.0	0.19
	11.6	5.8	4.6				1.2	0.21
0.0108	21.8	10.9	8.2	22.5	1.54	14.6	2.7	0.25
	23.2	11.6	8.6				3.0	0.26
0.0129	28.7	14.4	10.7	30.1	1.83	16.4	3.7	0.26
	31.1	15.6	10.5				5.1	0.33
0.0204	69.4	34.7	20.7	71.9	2.91	24.7	14.0	0.40
	74.3	37.2	22.4				14.8	0.40
0.0312	197.4	98.7	37.2	180.0	4.44	40.5	61.5	0.62
	186.1	93.1	36.8				56.3	0.60

Tabelle XI.

Eisen, hart. — 2. Probe, Länge = 104.8 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	κ	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$
0.00081	0.93	0.46	0.44	0.9	0.12	7.8	0.02	0.04
	0.93	0.46	0.46				0.00	0.00
0.0022	2.7	1.35	1.25	2.6	0.31	8.6	0.09	0.07
	2.7	1.36	1.27				0.09	0.07
0.0043	6.2	3.1	2.8	6.1	0.61	10.0	0.3	0.10
	6.3	3.1	2.8				0.3	0.10
0.0066	11.2	5.6	4.5	11.0	0.94	11.8	1.1	0.20
	11.4	5.7	4.6				1.1	0.19
0.0107	22.6	11.3	8.8	22.2	1.52	14.6	2.5	0.22
	22.9	11.5	8.7				2.8	0.24
0.0128	30.0	15.0	11.0	29.8	1.82	16.4	4.0	0.27
	30.8	15.4	11.2				4.2	0.27
0.0201	71.7	35.8	22.2	72.6	2.87	25.3	13.6	0.37
	75.0	37.5	22.4				15.1	0.40
0.0307	217.5	108.7	39.8	196.2	4.37	44.9	68.9	0.63
	202.9	101.4	39.3				62.1	0.61

Tabelle XII.

Bessemerstahl. — Länge = 97 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	x	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{2}$
0·00085	0·78	0·39		0·75	0·12	6·2		
0·0022	1·9	0·95	0·95	1·84	0·31	5·9	0	0·00
0·0041	3·6	1·8	1·8	3·5	0·58	6·0	0	0·00
0·0067	6·1	3·05	2·9	5·9	0·94	6·2	0·15	0·05
0 0108	10·0	5·0	4·8	9·6	1·55	6·2	0·2	0 04
0·0128	12·0	6 0	5·7	11·6	1·84	6·3	0·3	0·05
0·0203	19·8	9·9	9·4	19·1	2·90	6·6	0·5	0·05
0·0311	32·7	16·4	14·7	31·6	4·43	7·1	1·7	0·10

Tabelle XIII.

Eisen, weich. — 2. Probe. — Die Hälften, je 53 cm lang.

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	x	$\frac{\alpha}{2} - \beta$	$\frac{\alpha - 2\beta}{2}$
0·00079	2·9	1·45	1·4	2 5		22·5	0·05	0·04
	2·4	1·20	1·1	2·1	0·11	18·6	0·1	0·08
0·0021	8·7	4·35	3·9	7·6		25·5	0·45	0·10
	7·3	3·65	3·3	6·4	0·30	21·3	0·35	0·10
0·0042	21·0	10 5	8·6	18·1		30 7	1·9	0·18
	17·6	8·8	7·4	15·2	0·59	25·7	1·4	0·16
0·0065	39·1	19·6	14·4	33·9		37·3	5·2	0·27
	32·4	16·2	12·2	28·0	0·91	30·7	4·0	0·24
0 0105	92·6	46·3	27·2	80·0		55·2	19·1	0·41
	73·8	36·9	23·0	63·8	1·45	43·8	13·9	0·38
0·0125	140·1	70·0	35·3	120 8		70·2	34·7	0·50
	107·7	54·3	30·0	93·8	1·72	54·1	24·3	0·44
0·0197	461·0	230·5	53·9	398·3		153·8	176·6	0·77
	375·0	187·5	52·6	324 0	2·61	123·2	135·6	0 72
0·0301	808·0	404·0	85·5	698·1		178·3	318·5	0·79
	697·5	348·7	74·2	602·6	3·95	152·0	274·5	0·79

Die Resultate sind in Tabelle XIII verzeichnet. Die Werthe von H sind mit Rücksicht auf die entmagnetisirende Wirkung der Enden corrigirt.¹ Vergleicht man die Werthe von Tabelle XIII mit jenen von Tabelle VIII, so findet man, dass eine Hälfte bedeutend grössere, die andere eine etwas kleinere Werthe der Susceptibilität ergibt als die Mitte. Der Draht war also wahrscheinlich schon von allem Anfang an magnetisch nicht ganz homogen. Für den Vergleich mit der circularen Magnetisirung habe ich die mit dem ungetheilten Drahte erhaltenen Zahlen benützt.

Discussion der Resultate.

Wir wollen zunächst den Extrastrom oder den Integralwerth der elektromotorischen Kraft $\int edt$, welche durch die circularre Magnetisirung inducirt wird, in Betracht ziehen. In Tabelle XIV sind die Werthe von $\int edt$ und die entsprechenden Stromstärken für die einzelnen Drahtsorten zusammengefasst und in der Curventafel Fig. 2 graphisch dargestellt. Die Werthe von $\int edt$ steigen insgesamt mit der Stromstärke, am stärksten beim weichen, dann weniger stark beim harten Eisen, sehr mässig und nahezu in einer geraden Linie beim Bessemerstahl. Der Verlauf von $\int edt$ ist zu vergleichen mit der Magnetisirungsintensität bei der axialen Magnetisirung; bei dieser Versuchsanordnung muss $\int edt$ bei zunehmender Stromstärke einem constanten Werthe zustreben. Die zwei Curven des weichen Eisens verlaufen ganz ähnlich, nur sind sie quantitativ ein wenig verschieden, was zum Theile in der nicht ganz gleichen materiellen Beschaffenheit, zum Theile aber auch in der etwas verschiedenen Länge der beiden Probestücke seinen Grund hat. Dasselbe gilt für die beiden Curven des harten Eisens.

Aus den Werthen von $\int edt$, respective den Selbstinductionscoefficienten sind die Werthe der Susceptibilität berechnet worden.

Der Verlauf ist ähnlich wie bei der axialen Magnetisirung, das Maximum der Susceptibilität scheint auch beim weichen

¹ Nach H. du Bois, Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung, S. 45.

Tabelle XIV.

Eisen, weich 1. Probe		Eisen, weich 2. Probe		Eisen, hart 1. Probe		Eisen, hart 2. Probe		Bessemer- stahl	
i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$
0·012	116	0·012	134	0·012	73	0·013	70	0·011	50
0·023	250	0·021	283	0·022	152	0·022	138	0·021	100
0·046	615	0·043	655	0·045	375	0·044	376	0·042	207
0·085	1608	0·079	1678	0·084	852	0·082	803	0·077	400
0·126	3873	0·116	3696	0·124	1655	0·121	1447	0·111	614
0·145	5810	0·134	5072	0·143	2090	0·139	1792	0·127	693
0·239	16110	0·218	15690	0·236	7532	0·226	5402	0·201	1214
0·362	26580	0·322	25480	0·354	17240	0·334	13350	0·292	1835

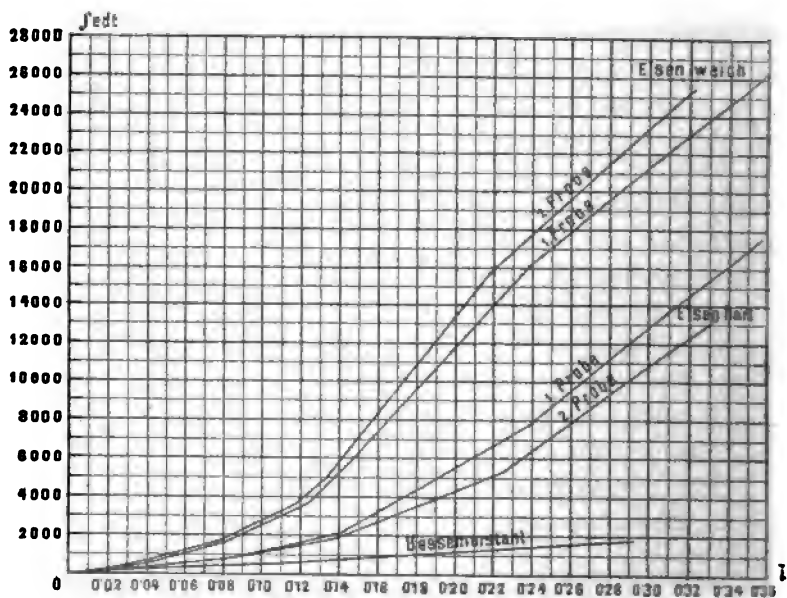


Fig. 2.

Eisen noch nicht erreicht zu sein; kräftigere Ströme, bei denen das Maximum erreicht und überschritten worden wäre, konnten

eben nicht angewendet werden. In den Curvenfiguren 3 und 4 sind die Werthe von α und die dazu gehörigen Feldstärken

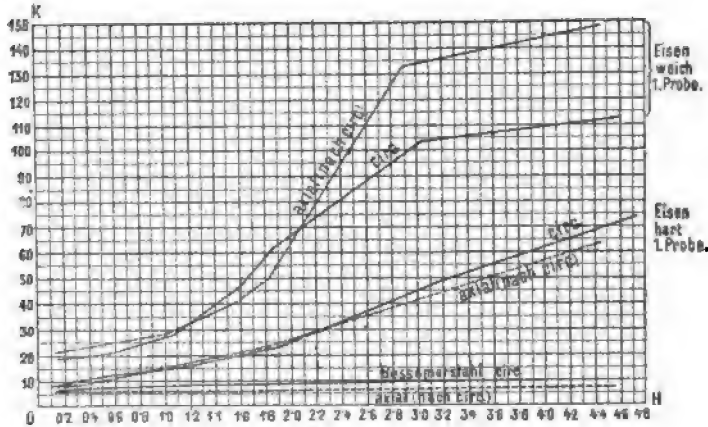


Fig. 3.

sowohl für die circulare, als auch axiale Magnetisirung eingetragen.

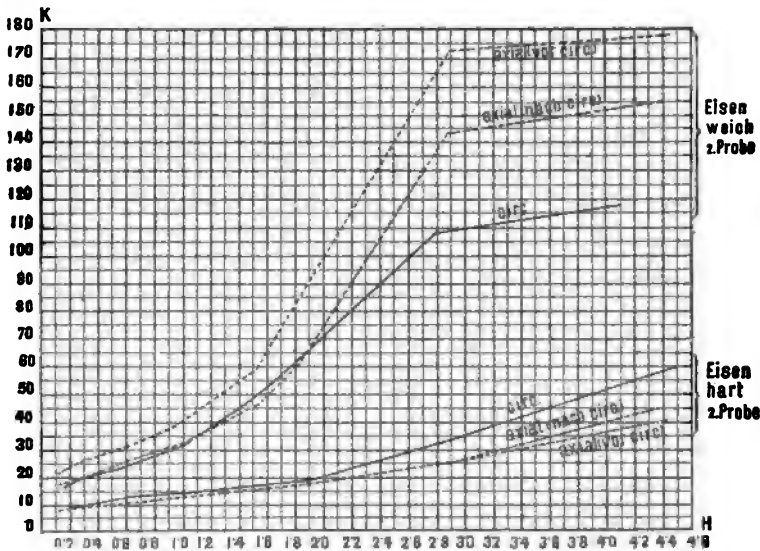


Fig. 4.

Nun kommen wir zur zweiten Frage, deren Lösung wir uns gestellt haben, und diese lautet: Wie ist das

Verhältniss der Permeabilität in axialer und circularer Richtung?

H. Herwig (l. c.) hat für Gasleitungsröhren gefunden, dass die Curve der circularen Magnetisirungsfunktionen von ungefähr demselben Anfangspunkt mit der Curve der axialen Functionen beginnend, später bedeutend steiler ansteigt. Herwig konnte bei den Versuchen über die circular Magnetisirung die zusammengehörigen Werthe der Feldstärke und der Susceptibilität ziemlich genau angeben; weniger gut war dies bei der axialen Magnetisirung möglich; wegen der Röhrenform und des kleinen Axenverhältnisses war die wirkliche Feldstärke kaum sicher zu ermitteln. Bei den vorliegenden Versuchen ist es umgekehrt. Wie schon oben erwähnt, ist die circular wirksame magnetisirende Kraft in einem vom Strom durchflossenen Drahte in der Axe $= 0$ und in der Peripherie ein Maximum; dem entsprechend wird auch die Susceptibilität an verschiedenen Stellen des Querschnittes verschieden sein, und der aus dem Extrastrom gerechnete setzt sich aus einer Summe von ungleichen Werthen zusammen. Für Drähte mit geringer, langsam ansteigender Susceptibilität wird das aus dem Extrastrom gerechnete ziemlich richtig dem Mittelwerth der magnetisirenden Kraft entsprechen. Für weiches Eisen, bei dem die Susceptibilität anfangs langsam, dann aber rasch ansteigt, bekommen wir jedoch auf diese Weise einen Werth von α , welcher für den Mittelwerth der magnetisirenden Kraft zu gross ist. Bei der Beantwortung der zweiten Frage muss man sich daher diese Erwägungen vor Augen halten.

Betrachten wir zunächst die auf das weiche Eisen bezüglichen Daten und Curven (Fig. 4 und 5). In den Curven sind die Werthe von α und die zugehörigen H (für die circular Magnetisirung die Mittelwerthe) eingetragen. Sieht man zunächst von der einen auf die axiale Magnetisirung bezüglichen Curve der Probe 2 ab, welche vor der circularen erhalten wurde, so zeigen beide Proben einen fast gleichen Verlauf. Die Axialcurve liegt bei kleinen Werthen der Feldstärken über der circularen, dann schneidet sie diese und erhebt sich schliesslich bei höheren magnetisirenden Kräften wieder ganz beträchlich über dieselbe. Die Axialcurve in Fig. 5, welche mit dem ganz frischen

weichen Eisendraht, vor den Messungen über die circularre Magnetisirung erhalten wurde, liegt jedoch ganz beträchtlich über der Circularcurve. Berücksichtigt man, dass die Werthe von χ für die circularre Magnetisirung gegenüber dem Mittelwerth von H sicher zu hoch sind, so folgt daraus, dass für weiches Eisen die Susceptibilität rings um die Axe durchwegs kleiner ist als in der Richtung der Axe.

Beim harten Eisen hat die Probe 1 für beide Magnetisirungsarten etwas grössere Werthe von χ geliefert als Probe 2. Letztere war magnetisch härter als erstere, obwohl beide derselben Drahtrolle entnommen wurden. Auch das Verhältniss der beiden Curven ist bei diesen zwei Proben etwas verschieden. Bei der härteren Probe 2 liegt die Axialcurve durchwegs unter der circularen. Bei Probe 1 verlaufen sie anfänglich zusammen, dann erst nehmen sie den Verlauf so wie bei Probe 2, ohne sich jedoch so weit von einander zu entfernen wie bei dieser. Die Versuche von Herwig mit gezogenen Gasleitungsröhren gehören in diese Rubrik und stimmen, wie man sieht, qualitativ mit den hier gemachten Beobachtungen überein. Ein Vergleich der für weiches und hartes Eisen erhaltenen Resultate lehrt also, dass durch den Zug die Susceptibilität sowohl in axialer, als auch circularer Richtung heruntersetzt wird, jedoch stärker in der axialen als in der circularen, so dass für Eisen, welches durch Zug gehärtet wird, die Susceptibilität in der axialen Richtung kleiner werden kann als in der circularen.

Beim Bessemerstahl liegt die Axialcurve ganz unter der circularen; hier ist die Susceptibilität rings um die Axe entschieden grösser als in der Richtung derselben.

Bei allen Versuchen wurden auch Messungen über den remanenten Magnetismus vorgenommen. Ich habe einige der Resultate in den Figuren 5 und 6 graphisch dargestellt. Es bezieht sich, wie vorher, die ausgezogene Curve auf die circularre, die gestrichelte aber auf die axiale Magnetisirung. Hiebei muss noch erwähnt werden, dass die Daten, welche sich auf den remanenten Magnetismus in schwachen Feldern (insbesondere bei circularer Magnetisirung) beziehen, ziemlich unsicher sind und daher den entsprechenden Curven in diesem Gebiete nur ein qualitativer Werth beizulegen ist. Die Curven geben einer-

seits den remanenten Magnetismus in Procenten des temporären, anderseits die Feldstärke. Beim weichen Eisen durchschlingen sich die beiden Curven, schliesslich bleibt die Axialcurve etwas ober der circularen. Der remanente Magnetismus beginnt bei beiden Arten der Magnetisirung mit niederen

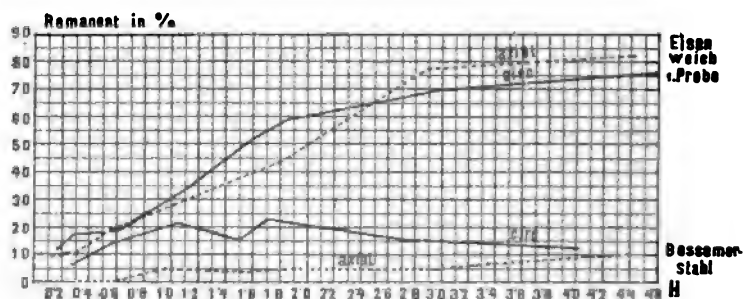


Fig. 5.

Werthen und erreicht bei den höchsten hier angewendeten Feldern circa 70% des temporären.

Für hartes Eisen und Bessemerstahl sind die Werthe des remanenten Magnetismus für die circular Magnetisirung durchwegs grösser als für die axiale. Der unregelmässige Verlauf der Circularcurve für Bessemerstahl ist jedenfalls Beobachtungs-

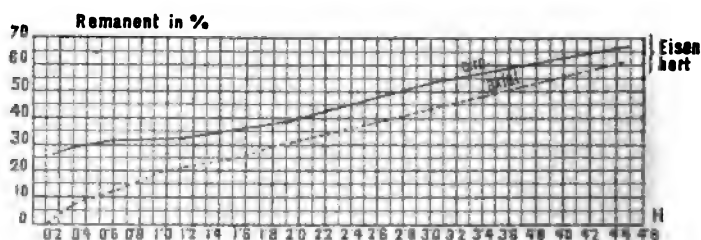


Fig. 6.

fehlern zuzuschreiben. Auffallend ist der Umstand, dass die Circularcurven bei diesen zwei Drähten schon ziemlich hohe Werthe anzeigen, wo die Axialcurven noch den Werth Null angeben. Auch Herwig hat bei den Eisenröhren gefunden, dass der remanente Magnetismus bei der circularen Magnetisirung durchwegs grösser ist als bei der circularen; bei seinen

Versuchen war jedoch dieses Ergebniss, wegen der beträchtlichen entmagnetisirenden Wirkung der Röhrenenden, vorauszusehen.

Schliesslich lässt sich den Beobachtungen noch Einiges über den Einfluss mehrmaliger Ummagnetisierung bei stärkeren Feldern auf die Susceptibilität in schwachen Feldern entnehmen.

Ein hundertmaliger Magnetisierungswechsel bei der höchsten hier angewendeten Feldstärke hatte beim weichen und harten Eisen in allen Fällen eine grössere Susceptibilität in niederen Feldern zur Folge. Bei der Maximalfeldstärke selbst, wurde die Susceptibilität durch diesen Wechsel jedoch herungesetzt. Mit 100 Wechseln war schon ein constanter Zustand erreicht, weitere 100 Ummagnetisierungen übten keine Veränderung mehr aus. Beim Bessemerstahl konnte jedoch ein solcher Einfluss in keinem Falle constatirt werden.

Die Frage, ob ein Einfluss der axialen auf die circular Magnetisierung und umgekehrt vorhanden ist, lässt sich aus diesen Beobachtungen schwer beantworten, weil die Messungen bei circularer und axialer Magnetisierung nicht hinter einander gemacht werden konnten, ohne den Draht zu deformiren. Der Unterschied in den Axialcurven für weiches Eisen, welche vor und nach der circularen Magnetisierung erhalten wurden (Fig. 4), kann sowohl der circularen Magnetisierung, als auch den Deformationen zugeschrieben werden.

Die Resultate dieser Untersuchung lassen sich, wie folgt, zusammenfassen:

Schickt man durch Eisendrähte einen Strom, so entstehen beim Schliessen und Öffnen des Stromes infolge der circularen Magnetisierung kräftige Extraströme, aus welchen man mit Hilfe einer von Kirchhoff entwickelten Formel die Susceptibilität der betreffenden Drahtsorte berechnen kann. Es wurden nun an demselben Drahte Bestimmungen der Susceptibilität in circularer und axialer Richtung vorgenommen. Die Beobachtungen ergaben bei den untersuchten Drahtsorten in qualitativer Beziehung einen gleichen Verlauf der Susceptibilität in beiden Richtungen; in quantitativer Hinsicht ist jedoch ein bemerkenswerther Unterschied zu constatiren.

Beim weichen, ausgeglühten Eisen ist die Susceptibilität rings um die Axe kleiner als in der Richtung derselben. Wird

der Eisendraht durch Zug gehärtet, so vermindert sich die Suszeptibilität in der Längsrichtung rascher als in der circularen und das für das weiche Eisen beobachtete Verhältniss kann sich sogar umkehren.

Beim Bessemerstahl ist die circulare Suszeptibilität entschieden grösser als die axiale.

Der remanente Magnetismus verläuft beim weichen Eisen ziemlich gleich in beiden Richtungen. Beim harten Eisen und Bessemerstahl ist er grösser bei der circularen Magnetisirung als bei der axialen und der Unterschied ist insbesondere in schwachen Feldern sehr gross.

Ein mehrmaliges Ummagnetisiren bei grösseren Feldstärken erhöht die Suszeptibilität in niedereren Feldern.

Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen

von

J. Sahulka.

(Mit 3 Textfiguren.)

Aus dem elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Erzeugt man einen Lichtbogen zwischen gleichartigen Elektroden durch Anwendung von Gleichstrom, so beobachtet man bekanntlich zwischen der positiven Elektrode und dem Lichtbogen einen grossen, zwischen dem Lichtbogen und der negativen Elektrode einen kleinen Spannungsunterschied. Diese Erscheinung lässt sich am einfachsten unter der Annahme von elektromotorischen Gegenkräften erklären. Erzeugt man den Lichtbogen mit Wechselstrom, so beobachtet man mit einem zur Messung alternirender Spannungsdifferenzen dienenden Voltmeter zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen einen gleich grossen Spannungsunterschied.

Im Folgenden sind in dem ersten Abschnitte einige Versuchsergebnisse mitgeteilt, welche an einem mit Wechselstrom zwischen Eisen und Kohle erzeugten Lichtbogen erhalten wurden. Der Lichtbogen verhält sich wie die Quelle einer gleichgerichteten elektromotorischen Kraft, doch konnte ich einige Erscheinungen weder unter der Annahme von elektromotorischen Gegenkräften, noch unter der Annahme von Übergangswiderständen erklären. Vielleicht sind diese Erscheinungen dadurch bedingt, dass der Lichtbogen eine disruptive Entladung ist, wie schon G. Wiedemann¹ annahm und E. Lecher² an

¹ G. Wiedemann, Elektrizität 1885, Bd. 4, S. 835 und 855.

² E. Lecher, Neue Versuche über den galvanischen Lichtbogen. Diese Sitzungsber., 1887, II, S. 1007.

dem mit Gleichstrom zwischen Eisenelektroden erzeugten Lichtbogen experimentell bewies. Der zweite Abschnitt handelt über den mit Wechselstrom zwischen zwei Kohlenelektroden erzeugten Lichtbogen. In diesem Falle besteht zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen eine gleichgerichtete Spannungsdifferenz. Im dritten Abschnitte sind einige Versuchsergebnisse mitgeteilt, welche an einem Gleichstromlichtbogen zwischen Kohlenelektroden erhalten wurden; aus diesen Versuchen ging nur hervor, dass die Aureole des Lichtbogens einen sehr grossen Widerstand hat.

Bei meinen Versuchen wurde ich von meinen Kollegen H. Eisler und Dr. M. Reithoffer, sowie von Herrn Oberingenieur Böhm-Raffay in sehr werkhätiger Weise unterstützt, wofür ich denselben an dieser Stelle bestens danke.

Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle.

Der zu den Versuchen verwendete Wechselstrom wurde aus dem Kabelnetze der Internationalen Elektrizitäts-Gesellschaft in Wien entnommen und mit Hilfe eines Transformators auf 100 Volt Spannungsdifferenz im secundären Kreise transformiert. Die Periodenzahl des verwendeten Wechselstromes ist 2500 pro Minute. Die eine Elektrode des Lichtbogens bestand aus einem 4 mm dicken Stäbchen aus weichem Eisen, die andere aus einer 10 mm dicken Dochkohle. Eine homogene Kohle erwies sich für die Versuche als ungeeignet, weil sich dann der Lichtbogen nur sehr schwer bilden liess und nur kurze Zeit andauerte. Die leichte Zerstäubbarkeit der Kohle schien eine nothwendige Bedingung zu sein, dass der Lichtbogen dauernd erhalten bleibe. Die Elektroden wurden in vertikaler Stellung verwendet, das Eisenstäbchen als obere Elektrode; an demselben bildet sich während der Dauer der Versuche ein Tropfen von flüssigem Eisen. Von demselben gehen Dämpfe in der Form eines blauen Kegels aus, welcher die Spitze an der Oberfläche des Eisentropfens hat. Der Kegel ist von rothen Dämpfen umgeben. Das Eisenstäbchen und die Kohle überziehen sich nach kurzer Zeit mit Rost, welcher jedoch nicht haftet. Legt man an die Elektroden ein Galvanometer an, so wird die Magnetnadel abgelenkt; eine in den

Stromkreis eingeschaltete Tangentenboussole zeigt ebenfalls an, dass im Stromkreise ein Gleichstrom oder gleichgerichteter Strom fließt, welcher eine Componente des gesamten Stromes bildet. Der Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle verhält sich daher wie die Quelle einer gleichgerichteten elektromotorischen Kraft, und zwar bildet die Kohle den positiven, das Eisen den negativen Pol, indem im Lichtbogen der Gleichstrom vom Eisen zur Kohle fließt. Verbindet man das Galvanometer mit den Secundärklemmen des Transformators, so bekommt man einen

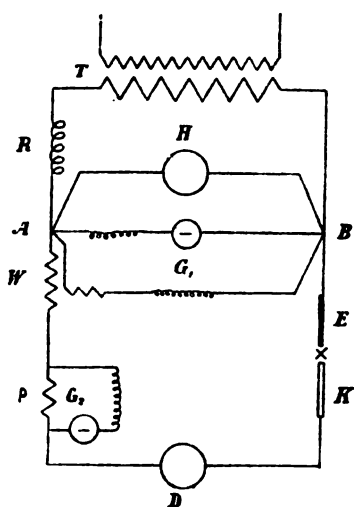


Fig. 1.

sehr kleinen Ausschlag, der nur dem Spannungsverluste des Gleichstromes in der Secundärwicklung entspricht. Für die in der Secundärwicklung des Transformators *T* (Fig. 1) erzeugte periodisch veränderliche elektromotorische Kraft bildet der Lichtbogen und der demselben vorgeschaltete Regulirwiderstand *R* den äusseren Kreis, während für die im Lichtbogen erzeugte elektromotorische Kraft von constantem Vorzeichen der Widerstand *R* und die Secundärwicklung des Transformators den äusseren Kreis bilden.

Das Schema der Versuchsanordnung ist aus der Figur ersichtlich: *EK* ist der Lichtbogen; *D* ist ein Torsions-Elektrodynamometer von Siemens & Halske zur Messung der

gesamten Stromstärke J ; ρ ist ein in den Stromkreis eingeschalteter inductionsloser Widerstand, an dessen Enden ein Torsionsgalvanometer G_2 von Siemens & Halske von 1Ω Widerstand nebst einem Vorschaltwiderstande von 9Ω angeschlossen war; W ist die dickdrahtige Spule eines Wattmeters von Ganz & Co., dessen dünn Drahtige Spule nebst einem vorgeschalteten, inductionslosen Widerstande von 1000Ω zwischen die Punkte AB geschaltet war; mit H ist ein Hitzdraht-Voltmeter von Hartmann & Braun bezeichnet, mit welchem die gesamte zwischen den Punkten AB herrschende Spannungsdifferenz Δ gemessen wurde; G_1 ist ein Torsionsgalvanometer von Siemens & Halske von 1Ω Widerstand, welchem ein inductionsloser Widerstand von 999Ω vorgeschaltet war. Die Spulen eines jeden der Galvanometer G_1 , G_2 haben nur circa 150 Windungen von kleiner Windungsfläche; bei diesen Instrumenten entspricht einer Drehung der Spiralfeder um 1° eine Stromstärke von $0.001 A$. Mit dem Galvanometer G_1 wird die zwischen den Punkten AB herrschende gleichgerichtete Spannungsdifferenz Δ_1 gemessen, welche eine Componente der gesamten Spannungsdifferenz Δ bildet. Aus den Angaben des Galvanometers G_2 findet man die Stärke J_1 des im Stromkreise fließenden gleichgerichteten Stromes, welcher eine Componente des Gesamtstromes J bildet.

Der Reductionsfactor des Elektrodynamometers war bei den in der folgenden Tabelle mit Nummer 1 bis 4 bezeichneten Versuchen 0.78 , bei den mit Nummer 5 bis 7 bezeichneten Versuchen 2.56 ; der Reductionsfactor des Wattmeters war 0.00344 .

Zwischen den Punkten AB besteht ausser Δ_1 noch eine periodisch veränderliche Spannungsdifferenz $\delta_2 \sin \omega t$; die resultirende Spannungsdifferenz ist

$$\delta = \Delta_1 + \delta_2 \sin \omega t.$$

Die Angaben des Voltmeters H hängen von dem mittleren Quadrate der Grösse δ ab:

$$\Delta^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta_1 + \delta_2 \sin \omega t)^2 dt = \Delta_1^2 + \frac{\delta_2^2}{2}.$$

Setzt man

$$\Delta_2^2 = \frac{\delta_2^2}{2},$$

so erhält man

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \quad 1)$$

Die Grösse Δ_2^2 ist das mittlere Quadrat der periodisch veränderlichen Spannungsdifferenz; die Formel bleibt auch richtig, wenn die periodisch veränderliche Componente nicht nach dem einfachen Sinusgesetze variirt.

Der Strom setzt sich in analoger Weise aus J_1 und einer periodisch veränderlichen Componente zusammen:

$$i = -J_1 + i_2 \sin(\omega t - \varphi).$$

Dem Werthe J_1 musste das Vorzeichen — gegeben werden, denn wenn die Componenten Δ_1 und $\delta_2 \sin \omega t$ gleiches Vorzeichen haben und sich addiren, so erzeugen sie entgegengesetzt gerichtete Ströme, weil die eine Componente der elektromotorischen Kraft im Transformator, die andere im Lichtbogen erzeugt wird. Die Phasendifferenz zwischen der periodisch veränderlichen Stromcomponente und der Spannungsdifferenz $\delta_2 \sin \omega t$ ist mit φ bezeichnet. Die Angaben des Elektrodynamometers D hängen vom mittleren Quadrate des resultirenden Stromes ab:

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [-J_1 + i_2 \sin(\omega t - \varphi)]^2 dt = J_1^2 + \frac{i_2^2}{2}.$$

Setzt man

$$J_2^2 = \frac{i_2^2}{2},$$

so erhält man

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2} \quad 2)$$

J_2^2 ist das mittlere Quadrat der periodisch veränderlichen Stromcomponente.

Die Angaben des Wattmeters hängen von dem Werthe ab:

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \delta i dt = J_2 \Delta_2 \cos \varphi - J_1 \Delta_1. \quad 3)$$

Die Grösse

$$W_2 = J_2 \Delta_2 \cos \varphi$$

stellt die Arbeit dar, welche dem Wechselstrom entspricht und zwischen den Punkten AB auf der Seite des Lichtbogens verbraucht wird, d. i. die Wechselstromarbeit im Lichtbogen.

Die Grösse

$$W_1 = J_1 \Delta_1$$

stellt die Arbeit vor, welche dem Gleichstrom J_1 entspricht und zwischen den Punkten AB auf Seite des Transformators verbraucht wird. Das Wattmeter gibt die Differenz dieser Grössen an:

$$W = W_2 - W_1. \quad 3)$$

Da nun die Arbeit W_1 auf Kosten der Arbeit W_2 entsteht, stellt diese Differenz den Arbeitsverlust im Lichtbogen dar.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe mitgetheilt, welche dadurch erhalten wurde, dass der Vorschaltwiderstand R und somit auch die Stromstärke geändert wurde. Die einzelnen Grössen sind in den Einheiten Ampère, Volt, Ohm, Watt ausgedrückt. Die Grössen J_2 , Δ_2 , W_2 sind entsprechend den Formeln 1), 2), 3) durch Rechnung gefunden. Jeder einzelne Werth ist ein Mittelwerth von 3 bis 5 Ablesungen. Die einzelnen Ablesungen haben gewöhnlich nur in den Zehnteln differirt. Bemerkenswerth ist, dass der Werth des Δ während der ganzen Versuchsreihe nur zwischen den Grenzen $74\cdot5$ und $75\cdot5$ schwankte. Nur dann, wenn man die Elektroden sehr weit von einander entfernte, so dass der Lichtbogen abbriss, dann stieg Δ bis 80 Volt, während Δ_1 bis 23 Volt sank. Bei sehr kurzer Lichtbogenlänge war Δ_1 etwas grösser als der in der Tabelle stehende Werth. Die Kohle war während der Versuche in einer Holzzwinge befestigt, welche ohne Anwendung einer Mikrometerschraube mit der Hand in die entsprechende Distanz gezogen wurde.

Nr.	Δ_1	Δ	Δ_2	J	J_1	J_2	W	W_1	W_2	$\cos \varphi$	r	E
1	28.8	75.0	69.3	5.64	2.76	4.92	91.5	79.5	171.0	0.501	2.89	36.8
2	28.9	75.0	69.2	6.38	3.12	5.56	117.7	90.2	207.9	0.540	2.89	37.9
3	28.6	75.3	69.7	9.08	4.64	7.80	168.2	132.7	300.9	0.554	2.04	38.1
4	28.3	75.5	70.0	9.50	4.93	8.12	183.7	139.5	323.2	0.569	2.04	38.4
5	28.7	75.2	69.5	10.78	5.45	9.30	190.2	156.4	346.6	0.536	1.64	37.6
6	27.5	75.8	70.6	11.65	5.71	10.15	222.9	157.1	380.0	0.530	1.64	38.9
7	29.9	74.5	68.2	13.67	6.94	11.78	214.3	207.5	421.8	0.525	1.15	37.9

Der im Stromkreise fließende Gleichstrom variierte, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, zwischen 2.76 und 6.94 A.; über diesen Werth konnte man nicht hinausgehen, weil sonst eine zu grosse Menge des Eisenstäbchens schmolz und abtropfte. Die beobachtete gleichgerichtete Spannungsdifferenz Δ_1 variierte innerhalb der Grenzen 27.5 bis 29.9 Volt. In der Tabelle ist noch der Werth für den Cosinus der Phasenverschiebung angegeben; derselbe ist berechnet entsprechend der Formel

$$\cos \varphi = \frac{W_2}{J_2 \Delta_2}.$$

Ausserdem ist der effective Widerstand r des Lichtbogens in der Weise gerechnet, dass der Arbeitsverlust W im Lichtbogen durch das Quadrat der gesammten Stromstärke J dividirt wurde. In dem Werthe r ist aber auch der Widerstand $\rho = 0.1 \Omega$, sowie der Widerstand des Elektrodynamometers D , der dicken Spule des Wattmeters W und der Zuleitungen enthalten; die letzteren Widerstände betragen zusammen auch circa 0.1Ω , so dass der effective Widerstand des Lichtbogens um circa 0.2Ω kleiner ist als der in der Tabelle stehende Werth. Endlich ist noch die Grösse E gerechnet entsprechend der Formel

$$E = \Delta_1 + rJ_1.$$

Die Grösse E könnte man als die im Lichtbogen erzeugte gleichgerichtete elektromotorische Kraft ansehen; wie aus der Tabelle ersichtlich ist, weichen die einzelnen Werthe nicht viel von dem Mittelwerthe 37.7 Volt ab.

Das Auftreten des gleichgerichteten Stromes J_1 und der gleichgerichteten Spannungsdifferenz Δ_1 könnte auch durch die Annahme von Widerstandsänderungen im Lichtbogen erklärt werden. Es wird nämlich während der einen halben Periode des Wechselstromes hauptsächlich das Eisen, während der nächsten halben Periode hauptsächlich die Kohle zerstäubt.

Dies kann zur Folge haben, dass der Widerstand des Lichtbogens in den aufeinanderfolgenden halben Perioden ungleich gross ist. In den halben Perioden, in welchen der Widerstand verkleinert wird, tritt ein Anwachsen der Stromstärke ein, so dass der gesammte Strom eine gleichgerichtete Stromcomponente enthalten muss. Erzeugt man den Lichtbogen zwischen Eisen und Kohle mit Gleichstrom, und wählt man einmal die Kohle, das anderemal das Eisen als Anode, so sieht man an dem mit einer Linse erzeugten Bilde des Lichtbogens, dass hauptsächlich die Kathode zerstäubt wird; ist das Eisen die Anode, so bläht sich der flüssige Eisentropfen häufig auf und platzt, welche Erscheinung wahrscheinlich durch die von den Kohlentheilchen mitgerissene Luft bedingt ist. Wird der Lichtbogen zwischen Eisen und Kohle mit Wechselstrom erzeugt, so müsste der Widerstand des Lichtbogens abnehmen, wenn die

Kohle die Kathode ist, damit der entstehende gleichgerichtete Strom die beobachtete Richtung hat.

An dem mit Wechselstrom erzeugten Lichtbogen wurden auch die Spannungsdifferenzen zwischen den Elektroden und dem Lichtbogen mit Hilfe eines aperiodischen Spiegelgalvanometers von Siemens & Halske gemessen, welchem ein Widerstand von $10^7 \Omega$ vorgeschaltet war; die Spulen des Galvanometers hatten circa 31000 Windungen. Das in den Lichtbogen eingeführte Stäbchen bestand aus Kohle und war 3 mm dick. Bei diesen Versuchen wurde der Lichtbogen als positiv elektrisch im Vergleiche zu beiden Elektroden gefunden. Bei einem Versuche (Fig. 2) waren die Spannungsdifferenzen in Volt ausgedrückt: $LE = 32.8$, $LK = 4.6$, $KE = 28.3$. Bei einem anderen Versuche mit sehr kurzem Lichtbogen war

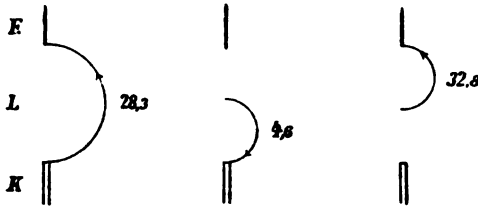


Fig. 2.

$LE = 34.5$, $LK = 3.9$, $KE = 30.6$. Wenn der Lichtbogen nicht sehr kurz war, hatte die Spannungsdifferenz KE immer die in der früheren Tabelle angegebenen Werthe. Die Ablesungen wurden nur gemacht, wenn das in den Lichtbogen eingeführte Stäbchen selbst weissglühend war. Wenn sich während der Dauer des Versuches die Lichtbogenlänge beträchtlich änderte, so war die Beziehung

$$KE = LE - LK$$

nicht ganz genau erfüllt.

Es mögen nun die Erscheinungen mitgeteilt werden, welche an dem mit Wechselstrom erzeugten Lichtbogen beobachtet wurden und weder durch die Annahme von elektromotorischen Kräften, noch durch die Annahme von Übergangswiderständen oder Widerstandsänderungen im Lichtbogen erklärt werden konnten.

1. Beobachtet man die Spannungsdifferenzen mit Hilfe der früher angeführten Torsionsgalvanometer von $1\ \Omega$ Widerstand, welchen ein Widerstand von $999\ \Omega$ vorgeschaltet ist, so findet man ganz andere Spannungsdifferenzen als in dem Falle, wenn der Galvanometerkreis einen Widerstand von $10^7\ \Omega$ hatte. Die bei einer Versuchsreihe erhaltenen Resultate sind in der Fig. 3 dargestellt.

Zu den Versuchen wurden drei Torsionsgalvanometer mit Vorschaltwiderständen verwendet. Es wurden, wie dies in der Figur angedeutet ist, entweder nur ein oder zwei oder alle drei Galvanometer eingeschaltet; die Richtungen der Spannungsdifferenzen und ihre Werthe, in Volt ausgedrückt, sind in der Figur angegeben. Werden die Spannungsdifferenzen KL und LE gleichzeitig gemessen, so ergibt sich die gesamte Spannungsdifferenz

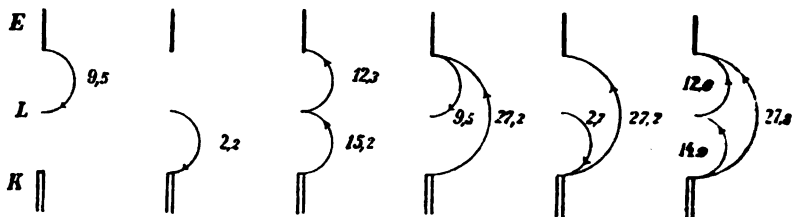


Fig. 3.

differenz KE als Summe der beiden Theile. Misst man aber eine der Spannungsdifferenzen EL oder LK allein oder eventuell gleichzeitig mit KE , so hat jede der beobachteten Spannungsdifferenzen EL oder LK das entgegengesetzte Zeichen im Vergleiche zur Spannungsdifferenz KE . Die Versuche wurden mehrfach wiederholt, doch wurde stets bezüglich der Richtung der gemessenen Spannungsdifferenzen das gleiche merkwürdige Resultat erhalten.

Die für die Spannungsdifferenz EL gefundenen Werthe variirten von $5,4$ bis $10,7$ Volt; die Werthe für LK variirten zwischen $2,2$ und $3,8$ Volt. Die Versuche wurden noch in der Weise ausgeführt, dass das Spiegelgalvanometer mit vorgeschaltetem Widerstande von $10^7\ \Omega$ und ein Torsionsgalvanometer mit vorgeschaltetem Widerstande von $999\ \Omega$ gleichzeitig zwischen die Eisenelektrode und den Lichtbogen geschaltet wurden; an LK war kein Galvanometer angelegt. Man konnte

nun sehen, dass beim Schliessen und Unterbrechen des Zweiges des Torsionsgalvanometers sich die Richtung des Ausschlages am Spiegelgalvanometer augenblicklich änderte. Die bei einem Versuche erhaltenen Resultate sind in der Tabelle A enthalten. Die Buchstaben *a*, *e* bedeuten, dass das Torsionsgalvanometer ausgeschaltet, respective eingeschaltet ist. Unter *TG* sind die Angaben des Torsionsgalvanometers, unter *SG* die des Spiegelgalvanometers, in Volt ausgedrückt, mitgetheilt; das Zeichen + ist beigesetzt, wenn die beobachtete Spannungsdifferenz dasselbe Vorzeichen hat wie die dem *KE* entsprechende. Es machte keinen Unterschied, wenn statt des Zweiges des Torsionsgalvanometers ein einfacher Widerstand von 1000 Ω ver-

Tabelle A.

	<i>TG</i>	<i>SG</i>
<i>a</i>	+32.7
<i>e</i>	-6	- 6.2
<i>a</i>	+32.3
<i>e</i>	-7.7	- 8.1
<i>a</i>	+31.1

wendet wurde. Die Angaben der beiden Galvanometer stimmen nicht genau überein, weil es schwer ist, am Torsionsgalvanometer sehr rasch abzulesen. Der Versuch wurde noch in der Weise abgeändert, dass das Spiegelgalvanometer zwischen *LK* geschaltet wurde, während das Torsionsgalvanometer zwischen *EL* geschaltet blieb. Beim raschen Einschalten und Ausschalten des Zweiges des Torsionsgalvanometers wurden die in der Tabelle B enthaltenen Werthe abgelesen; die Angaben des Torsionsgalvanometers wurden nicht beobachtet. Aus den Versuchen geht hervor, dass die zwischen den Elektroden und dem Lichtbogen gemessenen Potentialdifferenzen sich ändern, wenn man zu *KL* oder *LE* allein, oder zu beiden gleichzeitig Nebenschlüsse von 1000 Ω Widerstand anbringt, obwohl diese Wider-

stände beträchtlich gross sind im Vergleich zu dem scheinbaren Widerstände des Lichtbogens. Die Potentialdifferenzen ändern sogar das Vorzeichen, doch behält ihre Summe $EL + LK$ stets denselben Werth. Vielleicht ist die Änderung der Potentialdifferenzen durch elektromotorische Kräfte bewirkt, welche am Mittelstäbchen infolge der schwachen Messströme entstehen.

Tabelle B.

	SG
$a \dots \dots \dots$	$- 3 \cdot 1$
$e \dots \dots \dots$	$+34 \cdot 0$
$a \dots \dots \dots$	$- 2 \cdot 8$
$e \dots \dots \dots$	$+35 \cdot 2$

2. Ein merkwürdiges Verhalten zeigte der Lichtbogen, wenn der Versuch gemacht wurde, die in ihm entstehende gleichgerichtete elektromotorische Kraft zu compensiren, um dadurch ihren wahren Werth zu ermitteln. Zunächst wurde der Versuch mit einer Accumulatorenatterie gemacht, welche eine elektromotorische Kraft von circa 60 Volt hatte. Es war nicht möglich, die Compensation auszuführen. Je schwächer der gleichgerichtete Strom war, welchen die in den Stromkreis eingeschaltete Tangentenboussole anzeigte, desto kleiner wurde der Lichtbogen; derselbe verlöschte, bevor der gleichgerichtete Strom zum Verschwinden gebracht werden konnte. Auf Rath des Herrn Böhm-Raffay transformirte ich hierauf den Wechselstrom auf 200 Volt und schaltete in den Stromkreis zwei Lichtbögen Eisen—Kohle ein, damit sich ihre gleichgerichteten elektromotorischen Kräfte gegenseitig compensiren. Auch in dieser Weise konnte die Compensation nicht erreicht werden. Die Stärke des im Stromkreise fliessenden gleichgerichteten Stromes J_1 und die an einem Lichtbogen gemessene gleichgerichtete Spannungsdifferenz Δ_1 waren in einem labilen Zustande. Je schwächer J_1 war, desto kleiner wurde Δ_1 ; der kleinste beobachtete Werth war 9 Volt. Wenn die in einem der Lichtbögen erzeugte gleichgerichtete elektro-

motorische Kraft das Übergewicht erlangte, dann stieg Δ , rasch auf 20, 40, ja selbst 65 Volt, wobei dann der Versuch infolge Abtropfens der Eisenelektrode ein Ende hatte. Der Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle zeigt demnach das merkwürdige Verhalten, dass die beobachtete gleichgerichtete Spannungsdifferenz desto kleiner wird, je mehr der Gleichstrom zum Verschwinden gebracht wird. Wenn der gleichgerichtete Strom sehr schwach war, dann war auch die gesammte Spannungsdifferenz Δ an dem Lichtbogen beträchtlich kleiner als die in der ersten Tabelle angegebenen Werthe; der kleinste beobachtete Werth war 40 Volt.

3. An die Elektroden des Lichtbogens wurde ein Telephon angelegt, welchem ein Condensator von $2\frac{1}{2}$ Mikrofaraad vorgeschaltet war. Zieht man die Elektroden auseinander, so dass der Lichtbogen unterbrochen wird, so hört man im Telephon einen Ton, welcher der Periodenzahl des verwendeten Stromes entspricht. Wird der Lichtbogen gebildet, so hört man einen stärkeren und höheren Ton, der vielleicht durch eine discontinuirliche Entladung bedingt ist. Wenn man den Lichtbogen mit Gleichstrom erzeugt, so hört man im Telephon ein starkes Sausen.

Wechselstromlichtbogen zwischen Kohlenelektroden.

Die zu den Versuchen verwendeten Kohlen waren 7 mm dicke Dochkohlen, das in den Lichtbogen eingeführte Kohlenstäbchen war 3 mm dick. Wenn der Lichtbogen zwischen den vertical gestellten Elektroden erzeugt wurde, so war die obere Kohle negativ elektrisch im Vergleich zur unteren, gleichgiltig welche Kohle als obere Elektrode verwendet wurde. Der mit einem Torsionsgalvanometer beobachtete Spannungsunterschied war von der Stromstärke abhängig und stieg bis 2.8 Volt an. Wurden die beiden Kohlen horizontal angeordnet, so zeigte das Torsionsgalvanometer keinen Spannungsunterschied an. Um zu prüfen, ob das in den Lichtbogen eingeführte Kohlenstäbchen das Potential verändern könne, wurde dasselbe und eine der dicken Kohlen als Elektroden für den Lichtbogen verwendet. In diesem Falle war stets das dünne

Stäbchen positiv elektrisch im Vergleich zur dicken Kohle, doch betrug die gemessene Spannungsdifferenz im Maximum 3 Volt. Dieser Umstand kann die im Folgenden beschriebenen Erscheinungen nicht wesentlich beeinflusst haben. Bei den Versuchen waren die Elektroden horizontal gestellt, das Mittelstäbchen war von oben in den Lichtbogen eingeführt. Misst man mit einem Galvanometer die Spannungsdifferenzen, so findet man, dass zwischen dem Lichtbogen und den Elektroden eine gleichgerichtete Spannungsdifferenz besteht; dieselbe ist von der Stromstärke und Lichtbogenlänge abhängig und betrug bei den angestellten Versuchen im Maximum 7 Volt. Der Lichtbogen ist dabei negativ elektrisch im Vergleich zu den Kohlenelektroden. Das Vorhandensein einer solchen Spannungsdifferenz kann nicht überraschen. Während einer halben Periode des Wechselstromes ist die Kohlenelektrode die positive Elektrode, in der nächsten halben Periode ist sie die negative Elektrode; nun ist in der ersten halben Periode der Spannungsunterschied zwischen der Kohlenelektrode und dem Lichtbogen grösser als in der zweiten; daher muss sich eine resultierende gleichgerichtete Spannungsdifferenz ergeben. Ein merkwürdiges Verhalten zeigten die beobachteten Spannungsdifferenzen, wenn zwischen eine Elektrode und den Lichtbogen ein entsprechend grosser Widerstand ($1000\ \Omega$) eingeschaltet wurde und das Mittelstäbchen nicht bis in den Kern des Lichtbogens reichte. Eine Versuchsreihe ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Zwischen die linke Kohle und den Lichtbogen war ein Torsionsgalvanometer I nebst $999\ \Omega$ Vorschaltwiderstand geschaltet, zwischen den Lichtbogen und die rechte Kohle ein gleiches Torsionsgalvanometer II nebst Vorschaltwiderstand $999\ \Omega$. Zum Torsionsgalvanometer I war das aperiodische Spiegelgalvanometer nebst dem Vorschaltwiderstand von $10^7\ \Omega$ parallel geschaltet. Um nicht unter verschiedenen Verhältnissen zu beobachten, wurde der Lichtbogen gar nicht regulirt; auch das Mittelstäbchen, welches abbrannte, wurde nicht nachgeschoben. Der Lichtbogen, welcher anfangs sehr kurz war, verlängerte sich allmähig bis zu einer Länge von 14 mm , worauf er verlöschte. Das Mittelstäbchen, welches anfangs fast in den

Kern des Lichtbogens reichte, brannte dabei um mehr als 1 *cm* ab. Die Zweige der beiden Torsionsgalvanometer wurden rasch aus- und eingeschaltet, und die Ablesungen an den Instrumenten ausgeführt. In der Tabelle bedeutet der Buchstabe *a*, dass der Zweig des Torsionsgalvanometers ausgeschaltet war; unter *SG* stehen die Angaben des Spiegelgalvanometers. Alle Zahlen haben die Benennung Volt. Die Angaben der beiden

I	II	SG
5·4	4·9	5·5
<i>a</i>	10·7	11·5
10·8	<i>a</i>	10·8
<i>a</i>	<i>a</i>	5·7
4·3	3·3	4·4
<i>a</i>	10·9	11·7
11·1	<i>a</i>	11·1
<i>a</i>	<i>a</i>	4·3
3·8	3·5	3·9
<i>a</i>	11·7	12·0
12·7	<i>a</i>	12·4
<i>a</i>	12·3	12·9

Torsionsgalvanometer sollten eigentlich stets gleich gross sein, da zwischen den beiden Elektroden keine gleichgerichtete Spannungsdifferenz bestand. Die Zahlwerthe stimmen nicht genau überein, weil nicht ganz gleichzeitig und sehr rasch abgelesen wurde, damit sich der Zustand des Lichtbogens nicht zu sehr verändere; auch waren bei den kleinen Spannungsdifferenzen die Torsionswinkel sehr klein, da einem Torsionswinkel von 1° eine Spannungsdifferenz von 1 Volt entspricht. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, ergeben sich ungefähr die gleichen Spannungsdifferenzen, ob beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet oder ausgeschaltet waren. Dagegen sieht man das merkwürdige Resultat, dass die zwischen den Kohlenelektroden und dem Lichtbogen gemessene Spannungsdifferenz beträchtlich anwächst, wenn

zwischen eine der Kohlen und den Lichtbogen ein Widerstand von 1000 Ω eingeschaltet wird und das Mittelstäbchen nicht bis in den Kern des Lichtbogens reicht. Kurz nach Stromschluss waren die beobachteten Spannungsdifferenzen sehr klein oder hatten sogar anfangs das entgegengesetzte Zeichen; dieselben wuchsen aber rasch zu dem Werthe von einigen Volt an. Die anfänglichen Beobachtungen sind in der Tabelle nicht aufgenommen. Bei dem Versuche sank die Stromstärke von 8·4 A. successive bis 4·5 A. Das Mittelstäbchen befand sich immer in guter Berührung mit dem Lichtbogen, weil dieser durch die Luftströmung nach aufwärts bewegt wurde. Bei einigen anderen Versuchen brannte das Mittelstäbchen stärker ab; dann sank die mit den Torsionsgalvanometern gemessene Spannungsdifferenz bis auf 1 Volt herab, stieg jedoch trotzdem bis circa 10 Volt an, wenn nur ein Torsionsgalvanometer eingeschaltet war. Wenn das Mittelstäbchen, nachdem der Lichtbogen schon eine Länge von 10 *mm* erreicht hatte und die Stromstärke auf 5·5 A. gesunken war, wieder so weit gesenkt wurde, dass es fast in den Kern des Lichtbogens reichte, so stieg die Spannungsdifferenz zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen auf 5·5 Volt, wenn beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet oder ausgeschaltet waren; wurde jedoch nur ein Torsionsgalvanometer eingeschaltet, so stieg die Spannungsdifferenz wieder auf 12·5 Volt an. Wenn das Mittelstäbchen bis in den Kern des Lichtbogens eintauchte, dann wurde stets dieselbe Spannungsdifferenz abgelesen, gleichgiltig ob nur das eine oder beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet waren. Aus den Versuchen scheint hervorzugehen, dass sowohl an den Elektroden, als auch am Mittelstäbchen elektromotorische Kräfte auftreten.

Zum Schlusse wurde noch zwischen die linke Kohle und den Lichtbogen ein Regulirwiderstand und eine Tangentenboussole eingeschaltet. Die Boussole zeigt einen gleichgerichteten Strom an, dessen Stärke durch Änderung des Regulirwiderstandes verändert werden kann. Solange der Gleichstrom nur einige Zehntel oder 1 Ampère betrug, hatte er stets die Richtung von der Kohle zum Lichtbogen, wie auch zu erwarten

war. Wenn aber der Widerstand des Zweiges, in welchen die Tangentenboussole eingeschaltet war, sehr verkleinert wurde, so ereignete es sich häufig, dass der gesammte Strom von der linken Kohle durch den Regulirwiderstand zum Mittelstäbchen und von diesem zur rechten Kohle floss. In diesem Falle wurde das Mittelstäbchen zur Elektrode, und da dasselbe, wie früher erwähnt wurde, im Vergleich zur anderen Kohle schwach positiv elektrisch ist, so änderte der von der Tangentenboussole angezeigte gleichgerichtete Strom die Richtung. Wenn bei den Versuchen das Mittelstäbchen vom Kerne des Lichtbogens weit entfernt war, so verhielt sich die Aureole wie ein grosser Widerstand.

Gleichstrom-Lichtbogen zwischen Kohlenelektroden.

Zum Schlusse wurde am Gleichstrom-Lichtbogen zwischen Kohlenelektroden untersucht, ob sich die Vertheilung des Potentials im Lichtbogen ändert, wenn man zwischen die Elektroden und den Lichtbogen Widerstände von $1000\ \Omega$ schaltet. Wenn das Mittelstäbchen in den Lichtbogen gut eingeführt ist, macht es keinen Unterschied, ob die beiden Torsionsgalvanometer ($1000\ \Omega$) zugleich oder einzeln eingeschaltet oder ausgeschaltet werden; es wurde stets dieselbe Spannungsdifferenz erhalten. Wenn man jedoch das Mittelstäbchen aus dem eigentlichen Lichtbogen in die denselben umgebende Aureole schob, änderten sich die mit den Torsionsgalvanometern gemessenen Spannungsdifferenzen, wenn diese Instrumente eingeschaltet oder ausgeschaltet wurden. Die Ergebnisse lassen sich aber leicht erklären, wenn man annimmt, dass die Aureole einen beträchtlichen Widerstand hat. Wenn das Stäbchen aus dem Lichtbogen weit herausgeschoben war, so zeigten die beiden Torsionsgalvanometer, wenn sie gleichzeitig eingeschaltet waren, fast gleiche Spannungsdifferenzen an; wurde das eine Torsionsgalvanometer ausgeschaltet, so zeigte das andere eine sehr kleine Spannungsdifferenz an, etc. Der Widerstand der Aureole hatte desto mehr Einfluss, je weiter das Stäbchen aus dem Lichtbogen herausgeschoben wurde. Wurde zur Messung der Spannungsdifferenzen das aperiodische Spiegelgalvanometer verwendet, so hatte der Widerstand der Aureole einen

geringen Einfluss. In der Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe angegeben. Zwischen die positive Kohle und den Lichtbogen war ein Widerstand $I = 1000 \Omega$ geschaltet, zwischen die negative Kohle und den Lichtbogen ein gleicher Widerstand $II = 1000 \Omega$. Zum Widerstande I war das aperiodische Spiegelgalvanometer nebst einem Vorschaltwiderstande von $10^7 \Omega$ parallel geschaltet. Das Mittelstäbchen reichte in die Aureole. Während der Dauer des Versuches änderte sich die

I	II	SG
<i>a</i>	<i>a</i>	38·0
<i>e</i>	<i>a</i>	36·8
<i>a</i>	<i>e</i>	48·8
<i>e</i>	<i>e</i>	39·3
<i>e</i>	<i>a</i>	38·9
<i>a</i>	<i>e</i>	51·7
<i>a</i>	<i>a</i>	42·3
<i>e</i>	<i>e</i>	40·5
<i>e</i>	<i>a</i>	39·2
<i>a</i>	<i>e</i>	56·9
<i>e</i>	<i>e</i>	42·0
<i>a</i>	<i>a</i>	46·5

gesamte Spannungsdifferenz am Lichtbogen, welcher nicht regulirt wurde, von 45 bis 58 Volt, die Stromstärke von 4·7 bis 3·5 A. Das Mittelstäbchen brannte während der Dauer des Versuches allmähig ab. Wenn die Widerstände I, II ein- und ausgeschaltet wurden, ergaben sich am Spiegelgalvanometer die in der Tabelle angegebenen Ablesungen, welche in Volt ausgedrückt sind. Die bei dem Versuche verwendeten Kohlen waren Homogenkohlen von 8 und 13 *mm* Dicke.

Experimentelle Darstellung von Magnetfeldern

von

Joh. Zuchristian.

(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institut der k. k. Universität in Innsbruck.

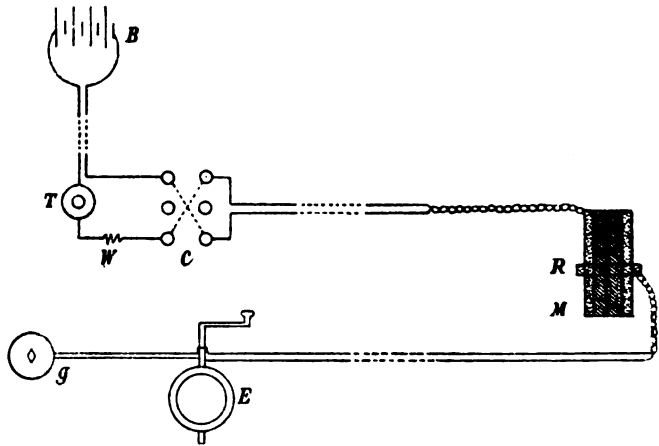
(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Im Folgenden ist ein Verfahren angegeben, welches den Verlauf von Magnet-Kraftlinien sowohl ihrer Richtung als auch ihrer Anzahl nach rasch zu bestimmen gestattet. Durch Streuen von Eisenpulver auf ein Cartonblatt ist die Richtung der Kraftlinien, und gleichzeitig durch die Bestimmung der gewöhnlichen Inductionswirkung die Anzahl derselben gegeben. Ein eingeschalteter Erdinductor ermöglicht die Reduction auf absolutes Mass. Diese Combination längst bekannter Methoden dürfte, wie aus Folgendem ersichtlich ist, vielleicht einiges Interesse gewähren, indem die von mir gewählten Beispiele zeigen werden, dass die in vielen unserer Lehrbücher gegebenen Darstellungen der Kraftlinien in Bezug auf deren Anzahl und Dichtigkeit an bestimmten Stellen eines Magnets nicht immer der Wahrheit entsprechen und daher diese einfache Methode zur Klärung der Vorstellung über Kraftlinien oft nicht unwichtige Beiträge liefern könnte.

Bei den Versuchen, die ich hier schildern will habe ich zwei Eisencylinder verwendet, von denen jeder 14 *cm* lang war und einen Durchmesser von 3·6 *cm* hatte. Dieselben wurden mit 2 *mm* dickem Kupferdraht in drei Lagen umwickelt. Die Zahl der auf jedem Cylinder vorhandenen Windungen, welche einen mittleren Durchmesser von 4·28 *cm* besaßen, war 163.

Auf diesen Cylindern verschiebbar war ein Inductionsring, der in zwei Lagen übereinander sieben Windungen eines 0.86 mm starken Kupferdrahtes hatte; der mittlere Durchmesser dieser Windungen war 5.8 cm .

Die Versuchsanordnung war nun folgende: Eine Batterie B von 3—4 Bunsen-Elementen schickte den primären Strom durch eine Tangenten-Bussole T , einen Rheostaten W und einen Commutator C in den zu untersuchenden Elektromagneten M , beziehungsweise in die zu untersuchende Elektromagneten-Combination; der secundäre Strom ging vom Inductionsring R aus durch einen Erdinductor E zum Spiegel-Galvanometer g .



Aus der Windungsfläche F des Erdinductors und der Verticalcomponente des Erdmagnetismus V , d. i. der Anzahl derjenigen Kraftlinien des magnetischen Feldes der Erde, die durch eine horizontale Fläche von 1 cm^2 hindurchgehen, einerseits und der Anzahl der Windungen des Inductionsringes andererseits erhält man die Zahl der Kraftlinien in absolutem Masse, da die Galvanometer-Constanten und der Widerstand der Inductionsleitung immer gleich bleiben.

Der Ausschlag Δ , den das Galvanometer bei einmaliger Umdrehung des Erdinductors um 180° gibt, ist proportional

$2VF$. Daraus ergibt sich die Anzahl der geschnittenen Kraftlinien

$$2VF = \kappa \cdot \Delta.$$

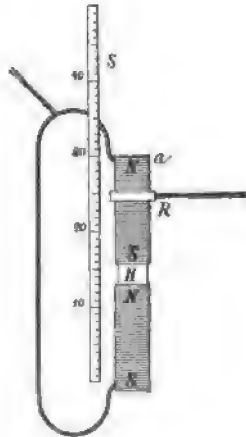
An der Stelle wo sich der Induktionsring befindet, werden nun durch Commutiren des primären Stromes die vorhandenen z Kraftlinien verschwinden und gleichzeitig die nämliche Anzahl der entgegengesetzt gerichteten entstehen, und der Ausschlag δ , den der Induktionsstrom hervorruft, entspricht daher $2z$, d. i. der doppelten Anzahl der bei Erregung des Magnetfeldes auftretenden Kraftlinien. Wir erhalten in Folge dessen, wenn n die Zahl der Windungen des Induktionsringes ist

$$z = \kappa \cdot \frac{\delta}{2n}.$$

Daraus ergibt sich schliesslich

$$z = \frac{VF}{n} \cdot \frac{\delta}{\Delta}.$$

Die Durchführung der Versuche ist nun sehr einfach. Der Induktionsring R wird an eine bestimmte Stelle des aufrechtstehenden Elektromagnetes M geschoben, welche man mittels eines daneben befindlichen Massstabes ablesen kann. Darauf schliesst man den Primärstrom und ertheilt ihm mit Hilfe des Rheostaten W eine gewisse Stromstärke, bestimmt den Nullpunkt des Galvanometers, commutirt den Primärstrom und erhält einen Ausschlag δ . Dabei ist noch zu bemerken, dass man bei grösseren Stromstärken das Galvanometer mit einem Shunt versehen muss, um allzu grosse Ausschläge zu vermeiden. Dann wird noch Δ bestimmt durch Umdrehen des Erdinductors.



Ich werde nun als Beispiel jenen Versuch hier ausführlicher darstellen, wo zwei Elektromagnete mit den ungleichen Polen

einander zugekehrt waren; zwischen denselben war ein Holzcylinder H von 28 mm Höhe.

Für V habe ich den von Liznar im Jahre 1890 für Innsbruck ermittelten Werth von 0.40381 ($cm^{-1/2} g^{1/2} sec^{-1}$) zu Grunde gelegt; das F des Erdinductors war $133017.6 cm^2$ und n die Windungszahl des Inductionsringes 7.

Ich benützte somit die Formel

$$z = 7673 \frac{\delta}{\Delta}.$$

Der verwendete Primärstrom hatte vier Ampère, der Erdinductor gab bei wiederholten Messungen während des Versuches stets den Ausschlag $\Delta = 7.65 cm$. Wegen der Symmetrie der Zusammenstellung habe ich bloss die obere Hälfte untersucht. Der Massstab S war so aufgestellt, dass die oberste Fläche a bei 30 stand.

In der folgenden Tabelle ist in der ersten Rubrik die Lage des Inductionsringes, in der zweiten der aus mehreren Messungen erhaltene mittlere Ausschlag δ angegeben; die dritte Rubrik enthält die wirkliche Anzahl der Kraftlinien, die vierte die in der Abbildung 948 auf einer Seite eingezeichneten.

Ind.-Ring cm	δ cm	z	N	Ind.-Ring cm	δ cm	z	N
33	0.85	852	1	26	9.69	9720	11 12
32	1.32	1324	2	25	10.34	10372	13
31	2.00	2006	3	24	10.90	10933	14
30	3.53	3541	4	23	11.26	11295	14
29	5.45	5467	5	22	11.23	11264	14
			6	21	11.08	11114	13
			7	20	10.10	10131	12
28	7.20	7222	8	19	9.45	9479	11
			9	18	8.45	8476	
27	8.66	8686	10				

Ind.-Ring <i>cm</i>	δ <i>cm</i>	z	N	Ind.-Ring <i>cm</i>	δ <i>cm</i>	z	N
			10				6
17	7·15	7172	9	15	3·93	3942	5
			8				
16	4·90	4915	7	14	4·04	4052	5

Nach der Berechnung dieser Tabelle habe ich dann in bekannter Weise, und wie aus den Abbildungen der folgenden Tafel ersichtlich ist, durch Streuen von Eisenfeile auf weissen Carton die Richtung der Kraftlinien bestimmt und für je 800 berechnete Kraftlinien auf beiden Seiten des Magnetes eine eingezeichnet, und zwar in der Weise, dass in der Entfernung 4 *cm* vom oberen N noch keine Kraftlinie den Inductionsring schneidet, in 3 *cm* Abstand auf jeder Seite eine, in ungefähr 2 *cm* Entfernung auf beiden Seiten noch eine zweite mehr u. s. w. Zur leichteren Verkleinerung des so erhaltenen Bildes wurde dann eine photographische Aufnahme gemacht, welche nun im Lichtdruck als Fig. 7 folgt.

Analog erhielt ich auch die folgenden Resultate (siehe beiliegende Tafel):

Die Figuren 1 und 2 geben die Intensitätsverhältnisse bei einem Elektromagnet für 2, beziehungsweise 4 Ampère.

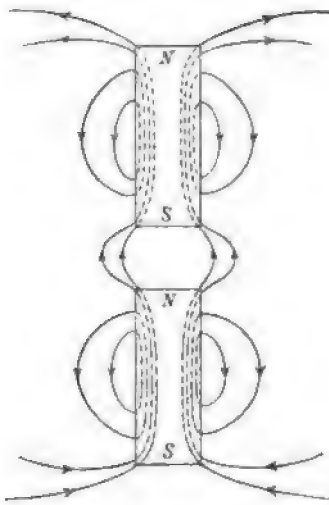
Die Figuren 3, 4 und 5 stellen zwei Elektromagnete dar, die mit den gleichen Polen einander zugewendet sind, in den Entfernungen 0·28 und 41 *mm* bei 4 Ampère Stromstärke.

Die Figuren 6, 7 und 8 zwei Elektromagnete mit den ungleichen Polen einander zugekehrt, in den Abständen 0·28 und 41 *mm* und gleichfalls 4 Ampère.

Die Figuren 9 und 10 zeigen einen Elektromagneten über einem Parallelepiped aus Eisen von den Dimensionen 5, 6 und 17 *cm* in den Entfernungen 0 und 41 *mm* (4 Ampère).

Für die Nützlichkeit solcher Messungen glaube ich die Fälle, dargestellt in den Figuren 6, 7 und 8, besonders erwähnen zu dürfen, die über den Verlauf der Kraftlinien nicht uninteressante Aufschlüsse geben. Sind die beiden Elektro-

magnete zur Berührung gebracht, so verhalten sie sich nahezu wie ein einziger von doppelter Länge. Zieht man dieselben etwas auseinander, so reissen einige der inneren Kraftlinien ab, und jede derselben theilt sich in zwei für jeden der beiden Magnete in sich geschlossene Linien; der Rest dagegen ist noch beiden Magneten gemeinschaftlich. Dabei tritt eine eigenthümliche Ausbuchtung der Kraftlinien an der Unterbrechungsstelle



auf, wie es nebenstehendes Schema zur Darstellung bringt. Jener Theil der Kraftlinien, welcher durch die Mitte der Magnete geht, ist weggelassen, um die Figur nicht übervoll zu machen.

Für diesen Verlauf der Kraftlinien spricht sowohl das Bild, welches das gestreute Eisenpulver gibt, als auch die Messung. Wie könnte es sonst wohl möglich sein, dass, wie in dem hier durchgeführten Beispiele, an der Trennungsstelle bloss 5×800 Kraftlinien berechnet werden können, während doch nach der Fig. 7 8×800 beiden Magneten

gemeinsam sind und den Inductionsring bei ihrem Entstehen durchschneiden müssen. Es wird eben letzterer von einigen Kraftlinien zweimal geschnitten, und zwar in verschiedenen Richtungen, so dass sich ihre Wirkungen gegenseitig aufheben.

Es wäre wohl sehr wünschenswerth, wenn Zeichnungen von Kraftlinien immer in der angegebenen Weise in Bezug auf alle ihre Verhältnisse richtig wiedergegeben würden.

7.

Fig. 1.

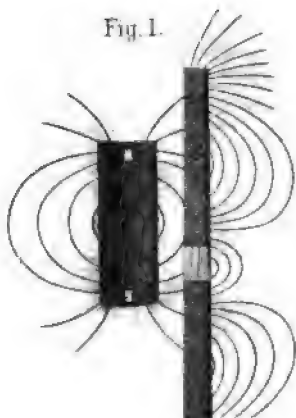


Fig. 8.

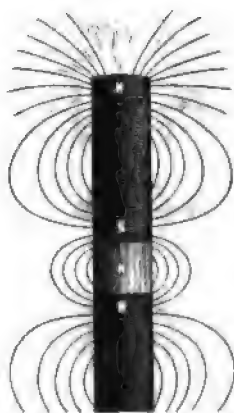


Fig. 3.

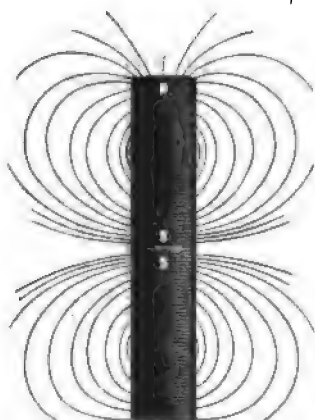
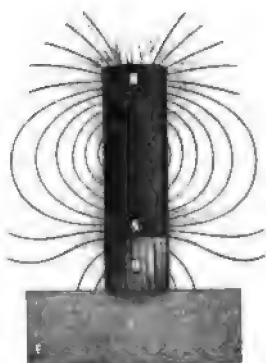


Fig. 10.



Eine Studie über unipolare Induction

von

Prof. Dr. Ernst Lecher.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 17 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Die folgende Abhandlung sucht die Entscheidung der Frage, ob bei einem um seine Axe rotirenden, cylindrischen Magneten die Kraftlinien feststehen oder mitrotiren.

Die erste Abtheilung enthält allgemeine und historische Bemerkungen und zeigt, dass weder die bisher angestellten Versuche, noch einige neue Abänderungen derselben diese Frage entscheiden können. Dabei stellt sich heraus, dass die Biot-Savart'sche Vorstellung über die Einwirkung eines geradlinigen Leiters auf einen Magnetpol den experimentellen That-sachen nicht immer entspricht.

Die zweite Abtheilung enthält einen gedrängten Bericht über elektrometrische Versuche, deren Schlussresultat aber nicht einwurfsfrei ist.

Die dritte Abtheilung enthält das Experimentum crucis und die Entscheidung der angeregten Frage.

I. Allgemeine Bemerkungen.

Faraday. Faraday ging bei Entdeckung jener Inductionserscheinungen, welche W. Weber¹ später unipolare Induction nannte, von der Vorstellung seiner Kraftlinien aus; die späteren Forscher aber führten die Erklärung mit Hilfe des Begriffes der

¹ Pogg. Ann., 52, 1841.

magnetischen Pole durch, und so entstand eine nicht immer glückliche Mischung der Anschauungen.

Als man in neuerer Zeit wieder den Begriff der Kraftlinie in Verwendung zog, wurde oft die ursprüngliche Anschauung Faraday's über die unipolare Induction unrichtig dargestellt. Faraday ist nämlich der Meinung, dass ein rotirender Magnet sein Feld nicht mitrotiren lasse, dass die Kraftlinien feststehen, während in vielen unserer besten Lehrbücher angegeben ist, dass Faraday der entgegengesetzten Ansicht gewesen sei. Faraday sagt:¹

»Wenn von Kraftlinien gesprochen wird, insofern sie einen leitenden Kreis schneiden, so muss man sich dies durch die Fortbewegung eines Magneten bewirkt denken. Eine blosse Rotation eines Magnetstabes um seine eigene Axe bewirkt keine Induction in äusseren Kreisen, da in diesem Falle die oben angegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind. Das den Magnet umgebende Kräftesystem braucht man sich nicht nothwendig mit dem Magneten rotiren zu denken, so wenig wie man annimmt, dass die Lichtstrahlen, welche von der Sonne ausgehen, mit dieser rotiren. Man kann sich sogar in gewissen Fällen denken, dass der Magnet zwischen seinen eigenen Kräften rotire, während er dennoch einen am Galvanometer nachweisbaren vollen elektrischen Effect hervorbringt«. In den folgenden Paragraphen begünstigt Faraday auch stets den Standpunkt, dass bei einem um seine Längsaxe rotirenden Magneten das magnetische Feld feststeht.²

Translatorische und rotatorische Bewegung. Der Unterschied zwischen dem Fortbewegen der Kraftlinien bei translatorisch bewegten Magneten und dem Feststehen der Kraftlinien eines rotirenden Magneten ist Faraday auffallend: »a singular independence of the magnetism and the bar in which it resides«.

Dieser befremdende Unterschied dürfte aber nur ein scheinbarer sein. Das Kraftfeld besteht in irgend einem Energie-

¹ Exp. Untersuchungen über Electricität, deutsch von Kalischer, Bd. III, S. 3090.

² Plücker, Pogg. Ann., 87, S. 353, 1852 vertritt ähnliche Anschauungen, aber ohne Verwendung des Begriffes der Kraftlinien.

zustand des Äthers, veranlasst durch den Magneten. Es erscheint nun wohl nicht nothwendig, anzunehmen, dass jeder Magnet bei einer Bewegung seinen Äther soweit mitschleppt, als seine Kraftwirkung reicht. Wir können uns auch die Idee bilden, dass der Äther feststeht, und dass bei einer Bewegung des Magneten jene Veränderung des Äthers, deren Richtung und Grösse wir durch den Begriff der Kraftlinien symbolisiren, verschiedene Partien des Äthers ergreift. Bei einer translatorischen Bewegung des Magneten kann man nun selbstverständlich von einem Bewegen der Kraftlinien nur im figürlichen Sinne sprechen. Wenn man einen Lichtpunkt bewegt, so gehen die Lichtstrahlen des Punktes auch nur im figürlichen Sinne mit, indem ja an den Orten, wo der Lichtpunkt im Laufe seiner Bewegung hinkommt, immer wieder neue Strahlen entstehen, während die alten verschwinden.

Wenn ein symmetrischer Magnet um seine eigene Axe rotirt, so ändert sich das äussere Feld gar nicht, es ist daher a priori absolut kein zwingender Grund vorhanden, sich dieses Feld als rotirend zu denken.

Preston. Mit dieser Überlegung fällt einer der Hauptgründe von Tolwer Preston,¹ welcher wohl zuerst gegen Faraday die Ansicht ausgesprochen, dass bei einem rotirenden Magneten das magnetische Feld mitrotire; indirect (ohne Rücksicht auf die Begriffe »magnetisches Feld« oder »Kraftlinien«) hat diese Frage natürlich schon bei allen früheren Versuchen mitgespielt. Da sowohl W. Weber, als Lord Rayleigh in zwei Briefen, die Preston am Schlusse der citirten Arbeit gibt, sich vollständig auf Seite Preston's stellen,² so dürfte es vielleicht nicht überflüssig sein, zu zeigen, dass die Überlegungen Preston's für unsere Frage absolut keine Entscheidung treffen. Der eine Einwand Preston's ist eben widerlegt; ein weiterer

¹ On some Electromagnetic Experiments of Faraday and Plücker. Phil. Mag. (5), 19, S. 131, 1885. Einen ähnlichen Schluss macht A. Föppl in der eben erschienenen Einleitung in die Maxwell'sche Theorie, Teubner 1894, S. 328.

² Weber schreibt: Ich habe die Arbeit mit grösstem Interesse gelesen und mich gefreut, dass die Frage über unipolare Induction dadurch endlich zur definitiven Entscheidung gelangen werde.

ist folgender: Nach Faraday muss ein Leiter, der gleich schnell mit dem Magneten rotirt, statisch geladen werden. Das erscheint nun Preston aus dem Grunde unmöglich, weil wir hier keine relative Bewegung der rotirenden Massen hätten. Dieser Schluss ist unrichtig. Nach Faraday steht ja das Feld still, die Bewegung ist relativ gegen die feststehenden Kraftlinien.¹

Nur in einem Punkte hat Preston recht, dass es nämlich Faraday nicht gelungen sei, für seine Anschauung einen experimentellen Beweis zu erbringen. Eine Entscheidung zwischen den beiden Fragen ist überhaupt durch einfache galvanometrische Messungen an einem einzigen rotirenden Magneten nicht möglich, wie sich durch folgende Beispiele zeigen lässt.

Unmöglichkeit der galvanometrischen Entscheidung mit Einem Magneten. Es sei NS ein Magnet, den wir uns in der Mitte durch eine schmale Luftschichte unter-

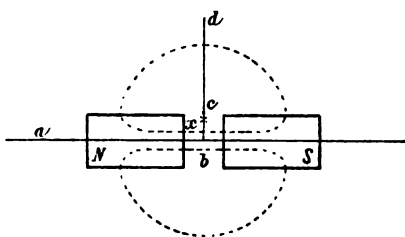


Fig. 1.

brochen denken wollen (wie dies auch Faraday, §. 3098 thut), die punktierten Linien stellen typisch den Gang zweier Kraftlinien dar.

$abxcd$ sei die zum Galvanometer führende Leitung (Fig. 1).

abx rotire mit dem Magneten, während xd feststehe, x sei der Schleifcontact.

Nehmen wir zuerst an, der Punkt x falle mit d zusammen, d. h. es rotire der ganze Draht bcd mit. Nach der Anschauung Preston's, die heute wohl die allgemein beliebtere sein dürfte, rotiren die Kraftlinien mit dem Magneten: wir haben also keinen Strom zu erwarten, da der Draht cd mit den Kraftlinien mitrotirt. Nach der Anschauung Faraday's aber bekommen wir zwei

¹ Ähnliche Schlüsse macht z. B. Clausius, Pogg. Ann., 156, S. 657, 1875. »Wenn man von der Vorstellung ausgeht, dass die elektrodynamische Einwirkung zweier Elektrizitätstheilchen auf einander durch einen zwischen ihnen befindlichen Stoff vermittelt werde, so braucht man von ihr nicht anzunehmen, dass sie nur von der relativen Bewegung der Theilchen abhängt, sondern kann auch den absoluten Bewegungen der beiden Theilchen einen Einfluss auf sie zuschreiben.«

elektromotorische Kräfte, nämlich die Wirkung von bc , sie sei $E_i(bc)$, und von cd , sie sei $E_a(cd)$. Jede Kraftlinie, die aussen geht, muss durch den Magneten selbst geschlossen sein; wir haben daher aussen ebensoviel Kraftlinien wie innen. Das Schneiden aller Kraftlinien aussen und innen hebt sich auf, weil die Richtung der Kraftlinien durch bc die umgekehrte ist, wie durch cd . Der Effect nach Faraday ist $E_i(bc) - E_a(cd) = 0$.

Würde die Linie bd feststehen, während aber der Magnet rotirt, so kehrt sich diese Betrachtung für die beiden Theorien um. Wir erhalten keinen Strom, weil nach Faraday keine elektromotorische Kraft auftritt, oder weil, nach Preston, zwei einander gleichgerichtete elektromotorische Kräfte sich aufheben.

Rücken wir nun mit x an den in der Zeichnung fixirten Punkt, so rotirt bx mit dem Magneten, xd steht aber fest. Es gibt jetzt die Theorie Faraday's eine elektromotorische Kraft $E_i(bx)$, da ja bx , mit dem Magneten rotirend, die feststehenden Kraftlinien schneidet. Die Theorie Preston's aber liefert als elektromotorische Kraft $E_a(cd) - E_i(cx)$, da cd und cx feststehen und durch die mit dem Magneten rotirenden Kraftlinien geschnitten werden. Die beiden Werthe müssen subtrahirt werden, weil die Richtung der Kraftlinien im Innern des Magneten (xc) die entgegengesetzte Richtung haben, wie aussen (cd). Nun ist

$$E_i(bx) + E_i(xc) = E_i(bc) = E_a(cd),$$

woraus folgt, dass $E_i(bx) = E_a(cd) - E_i(cx)$.

Wir erhalten somit nach beiden Anschauungen, wo immer der Punkt x auch liegen möge, stets das gleiche galvanometrische Resultat, wiewohl die erzeugten elektromotorischen Kräfte an ganz verschiedenen Stellen ihren Sitz haben.

Ebensowenig kann man durch Zweigschaltung, durch Einschaltung von Condensatoren und ähnlichen Kunstgriffen an einem einzigen rotirenden Magneten galvanometrisch eine Entscheidung treffen. Damit sind alle Versuche pro und contra gemeint und die Ergebnisse von Plücker,¹ Edlund,² Exner

¹ Pogg. Ann., 87, S. 352, 1852.

² Ann. de chim. et de phys. (5), 16, S. 49, 1879.

und Czermak,¹ Budde,² Hoppe³ u. s. w. können meines Erachtens alle nach beiden Theorien gleich befriedigend erklärt werden.

Versuche von Hoppe. Ich will dies an den Experimenten von Hoppe zeigen, da dieselben zu Gunsten einer Mitrotation der Kraftlinien gedeutet wurden. Ich habe diese Versuche in etwas veränderter Gestalt wiederholt und will die Deutung der Resultate unter consequenter Beibehaltung des Begriffes der Kraftlinien besprechen.

Hoppe arbeitet mit einer Eisenröhre, die durch eine feststehende Drahtspule magnetisirt wurde. Da aber ein grosser Theil der Kraftlinien durch den inneren Hohlraum einer solchen

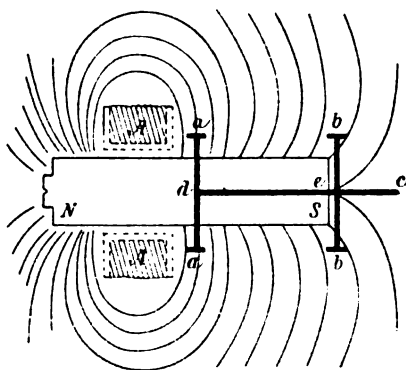


Fig. 2.

Eisenröhre geht,⁴ änderte ich den Versuch dahin ab, dass ich mit einem möglichst massiven Magneten arbeitete.

Fig. 2 stellt schematisch die Anordnung meiner Versuche in etwa $\frac{1}{3}$ natürlicher Grösse dar. NS ist ein um eine Horizontalaxe drehbarer Eisenkern, welcher, wie bei Hoppe, durch die feststehende Spule A

magnetisirt wurde. Zur einen Hälfte geht in die Axe des Magneten der Kupferdraht dc , vom Magneten gut isolirt; a und b sind zwei Cylinderflächen, welche mit dc leitend verbunden, vom Magneten aber vollständig isolirt sind. a, b, cd sind fix mit dem Magneten verbunden und rotiren mit demselben pro Secunde $13 \cdot 5$ mal. Es sind diese für die unipolare Induction dienenden und vom Magneten gut isolirten Leitungen

¹ Diese Sitzungsberichte, 94, S. 357, 1886.

² Wied. Ann., 30, S. 358, 1887.

³ Wied. Ann., 28, S. 483, 1886.

⁴ So verstärkt Faraday die Drehung der Polarisationssebene des Lichtes dadurch, dass er eine Eisenröhre in das Innere des Solenoides (um den drehenden Körper herum) einschob. L. c. §. 2209.

in der Fig. 2 dick gezeichnet. Die Enden einer Galvanometerleitung schleifen auf *a*, *b* oder *c*. Der unipolare Ausschlag wird erzeugt durch Commutiren des magnetisirenden Stromes in der Spule *A*, um den Effect des Thermostromes zu eliminiren.

Die angegebenen Resultate sind Mittel aus je 10 Beobachtungen. Schleifen die Galvanometerdrahtenden auf *ac*, *bc*, respective *ab*, so ist der unipolare Strom $12\cdot8$, $2\cdot5$, $10\cdot3$.¹ Fig. 2 stellt auch den wirklichen Verlauf der Kraftlinien (in willkürlichem Masssystem) dar.² Es ist selbstverständlich, dass die Kraftlinien im Innern des Eisens wieder in sich zurückkehren müssen.

Die Übereinstimmung der Werthe der unipolaren Induction mit der Anzahl der geschnittenen Kraftlinien ist eine sehr schöne, wobei aber natürlich wieder nicht ein Unterschied zwischen der Theorie Faraday's und Preston's getroffen werden kann.

Nach Preston schneidet die feststehende Galvanometerverbindung *ab* ausserhalb des Magneten 7 rotirende Kraftlinien, *bc* aber 2 und *ac* schliesslich 9. Nach Faraday schneidet, wenn *ac* zum Galvanometer führt, das rotirende Leiterstück *ad* 9 feststehende Kraftlinien, die ja im Innern des Magneten (in der Figur nicht gezeichnet) in sich zurückkehren müssen; schleift aber die Galvanometerleitung in *b* und *c*, so schneidet *eb* 2 Kraftlinien, während bei Ableitung von *a* und *b* 2 entgegengesetzte elektromotorische Kräfte in *da* ($= 9$) und *eb* ($= 2$) in Wirkung treten. Die Verhältnisse von 9, 7, 2 entsprechen aber innerhalb der Versuchsgrenzen den Verhältnissen der gefundenen Galvanometerausschläge $12\cdot8$, $10\cdot3$, $2\cdot5$.

¹ Um die Arbeit nicht zu umfangreich zu machen, gebe ich hier und später immer nur die Mittel, wie ich auch aus dem gleichen Grunde meine Zeichnungen nur schematisch mache.

² Diese Zeichnung wurde dadurch gewonnen, dass eine mit einem Galvanometer verbundene Drahtschleife an bestimmten Stellen des Feldes sich befand und durch Commutiren des magnetisirenden Stromes Inductionswirkung gemessen wurde. Hat man vorher mittelst Eisenfeile die Richtung der Kraftlinien fixirt, so genügen einige solche Messungen, um quantitativ die Zahl der Kraftlinien an einzelnen Stellen des Feldes zu bestimmen. Siehe darüber Näheres in der gleichzeitig (in diesen Sitzungsberichten) erscheinenden Arbeit von J. Zuchristian, der einige solche Bestimmungen im absoluten Masse ausgeführt hat.

Es wurde schliesslich, um auch in diesem Punkte die Versuchsanlage Hoppe's zu imitiren, a und b durch eine aufgelöthete Kupferlamelle leitend verbunden. Die Resultate waren, wie es nach beiden Theorien zu erwarten war, mit den vorausgehenden identisch, nämlich es gaben die Schleifcontacte ac $12 \cdot 7$, bc $2 \cdot 4$, ab $10 \cdot 9$.

Auf die elektrometrischen Versuche Hoppe's einzugehen, erscheint mir überflüssig, da ihre Auslegung nichts für unseren Fall Entscheidendes bringen würde.¹

Rotationsversuch von J. Weber. Ebenso wenig lässt sich eine Entscheidung treffen durch Einleitung von Rotationen durch einen Strom. Auch hier sind eine Reihe von Trugschlüssen in der Literatur anzutreffen, von denen ich wieder als typisches Beispiel einen herausgreifen will, den von J. Weber.²

NS ist der Magnet, der an seinem Äquator die Quecksilberrinne g trägt. Der bewegende Strom geht durch das Quecksilbernäpfchen h in den Magneten zum Quecksilbernäpfchen a , durch den Bügel abc zur Quecksilberrinne g , welche vom Magneten isolirt ist und durch den feststehenden Draht ed zurück. Wird der Magnet festgehalten (Versuch 1), so rotirt der Bügel abc , weil er (nach beiden Theorien) einen Druck gegen die Kraftlinien, wovon eine punktirt gezeichnet ist, erfährt. Wird jetzt der Magnet mit dem Bügel mechanisch verbunden und an einem Faden aufgehängt (Versuch 2), so dass beide rotiren können, so rotirt Magnet und Bügel. Nach der Theorie Fara-

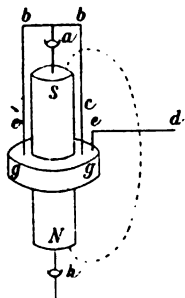


Fig. 3.

¹ Wied. Ann., 29, S. 544, 1866; 32, S. 297, 1887. Nicht unerwähnt möchte ich lassen, dass meine Vorstellung über Verwendung des Elektrometers bei Messungen an ungeschlossenen Leitungen von denen Hoppe's stark abweicht. Er sagt in der letzteren Arbeit z. B. S. 298: »Für die $2\frac{1}{2}$ m lange feste Leitung bis zum Elektrometer tritt wegen des höheren Widerstandes eine erhebliche Einbusse auf«; S. 304: »Da der Draht sehr lang, wird eine Verzögerung in der Ladung eintreten«. Oder, Hoppe will durch eine Kugel von 15 mm Durchmesser, die isolirt aufgehängt, zuerst mit dem rotirenden Magneten und dann mit einem Elektrometer von Edlmann in Berührung gebracht wird, die eventuellen minimalen Ladungen des Magneten nachweisen u. s. w.

² Zeitschr. für Elektrotechnik, Kereis, Wien, VII, S. 445, 1889.

day's muss man jetzt sagen, da das Feld ja stillsteht, dass der rotirende Bügel den Magnet mitnimmt, nach der entgegengesetzten Anschauung aber, und das hat J. Weber übersehen, ist die bewegende Kraft in ed , dorten wird die Kraftlinie weggedrückt, und mit der rotirenden Kraftlinie muss der Magnet mitrotiren, da Kraftlinie und Magnet fix verbunden sind. Hätte aber Weber in Versuch 2 Magnet und Bügel, jeden für sich rotirbar gemacht, so müsste der Magnet nach beiden Theorien ruhig bleiben. Nach Faraday ist das unmittelbar ersichtlich. Nach Preston drücken aber bc und ed in entgegengesetzter Richtung auf die mit dem Magneten fest verbundenen Kraftlinien, und die Wirkung hebt sich auf, da, wie S. 961 gezeigt werden wird, ein rotirendes bc denselben Druck ausübt wie ruhendes bc .

Wirkung eines geraden Stromes auf einen sogenannten Pol. Auch mit nebenstehendem Apparat, der so oft zur Entscheidung in verschiedenen Modificationen herbeigezogen wurde, kommt man nicht weiter.¹ Ich erwähne diesen, in den meisten Lehrbüchern beschriebenen Versuch, weil fast immer eine, wenn auch naheliegende, so doch falsche Deutung desselben gegeben wird. Die Kraftlinie wird oft definirt als die Richtung, in der sich ein Nordpol bewegt. Die Ursache der Rotation in diesem Versuche soll darin bestehen, dass die Magnetpole N durch den stromdurchflossenen Leiter ab um diesen herumgedreht werden. Diese Biot-Savart'sche Vorstellungsweise

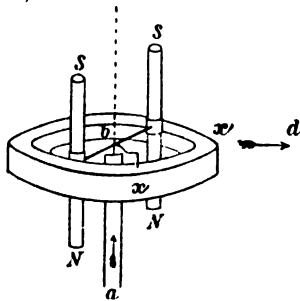


Fig. 4.

¹ Die diesbezügliche Arbeit von Plücker, Pogg. Ann., 87, S. 352, 1852, geht zwar, aber leider ohne Verwendung des Begriffes »Kraftlinien«, von jenen Anschauungen aus, welche ich die Faraday'schen nannte. Plücker gibt jedoch keinen Beweis für diese Prämisse, er stellt sie als selbstverständlich hin. Siehe z. B. S. 354, Abschnitt 4: »Wenn hiebei auch die Nachweisung dieser elektrischen Vertheilung am Elektrometer durch mich nicht versucht worden ist, so ist dieses doch in analogen Fällen, wie z. B. beim Arago'schen Rotations-Magnetismus geschehen und daher als unzweifelhaft anzusehen«. Dieser Arago'sche Rotations-Magnetismus ist aber doch ganz etwas anderes.

scheint mir aber ebenso unphysikalisch wie die Vorstellung eines einzigen Poles, der für sich allein nie existiren kann oder die Vorstellung eines isolirten Stromelementes. Ferner muss auch die Ampère'sche Regel erhalten; die in *ab* gedachte bekannte Figur weist dem Nordpol den Weg nach links. Um die Unrichtigkeit dieser Anschäuerung zu zeigen, braucht man nur *bx* sehr gross zu machen. Diesem Versuche gab ich, da dann die Reibung der grossen Quecksilberrinne zu bedeutend würde, folgende Form:

ab ist derselbe Leiter wie früher. Der Strom geht dann durch das Quecksilbernäpfchen *b* nach *x*, wo er sich theilt, durch den Rahmen *xdef* und schliesslich durch den Draht *fi* in die Quecksilberrinne *g*. Dieser ganze Rahmen hängt an einem Seidenfaden *ih* und ist daher sehr leicht beweglich. Die Zeichnung ist der Deutlichkeit halber nicht in den richtigen Dimensionen gezeichnet. Die Magnete sind zu gross und zu weit aus einander gezeichnet; sie sind in Wirklichkeit quadratische Stäbe von 12·5 *cm* Länge, die beiden Mittelpunkte *N* stehen nur 2·3 *cm* von einander. Der Rahmen war sehr gross, *xd* war 30 *cm* und *dc* war 28 *cm*. *g* hingegen war wieder möglichst klein.

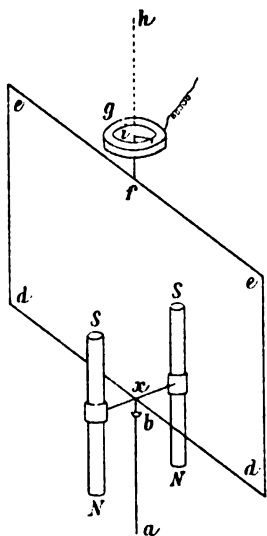


Fig. 5.

Trotz Anwendung starker Ströme von circa 15 Ampère konnte keine Spur einer drehenden Kraft entdeckt werden. Das Resultat war vielmehr, dass der Leiter *ab* die beiden Nordpole *N* nicht längs seiner kreisförmigen Kraftlinien dreht und dass auch die Ampère'sche Regel sich hier nicht in der einfachen, oft beliebten Form anwenden lässt. *xd* ist natürlich nach Biot-Savart ohne Einfluss, da ja um die Drehungsaxe *xd* keine Rotation möglich ist, da auch in den symmetrischen Theilen des Rahmens der Strom in entgegengesetzter Richtung fliesst und da überdies die beiden Pole *S* und *N* gleich weit entfernt sind: drei Gründe, von denen jeder einzelne allein schon

genügen würde. Ähnliche Gründe und in erster Linie die grosse Entfernung schliessen einen Einfluss von de und ef aus.

Der Sitz der bewegenden Kraft in dem Versuche Fig. 4 liegt im feststehenden Leiter xd . Dies zeigt folgender Versuch.

Die beiden Magnete (Fig. 6) hängen mittelst des Drahtbügels r an einem Seidenfadcn, währenddem der Strom abd fixirt ist, dann dreht sich das Magnetsystem bis zum Anstoss, weil die Fläche abd einen anziehenden Magneten vorstellt.

Umgekehrt habe ich bei dem Versuche Fig. 5 die mechanische Befestigung der Magneten von dem Rahmen $xdef$ weggegeben. Die Magnete sind an derselben Stelle wie in Fig. 5,

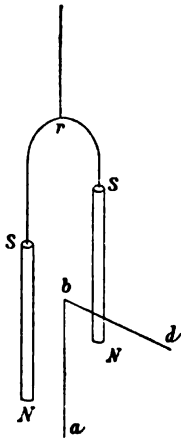


Fig. 6.

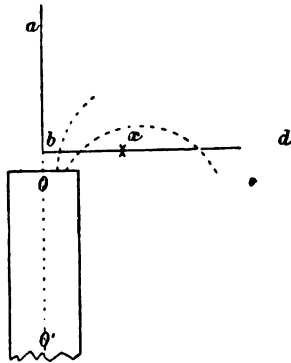


Fig. 7.

aber an einem Stativ befestigt, der dieselben verbindende Draht fehlt. ab und der Rahmen $xdef$ waren unverändert. Dann dreht sich dieser Rahmen gleichfalls bis zum Anstoss; wir haben jetzt die *reactio* der in Fig. 6 geschilderten *actio*.

Es ist die Versuchsanordnung Fig. 4, welche von Plücker, Edlund u. A. mit Vorliebe für die Erklärung der unipolaren Induction herbeigezogen wurde, zu diesem Zwecke sehr ungeeignet. Es hat aber Beer¹ diesem Versuche eine übersichtlichere Form gegeben, die (in etwas veränderter Weise) durch obenstehende Fig. 7 angedeutet ist. Es sei OO' ein sehr grosser

¹ Pogg. Ann., 94, S. 178, 1855.

Magnet, dessen unterer Pol in unendlicher Entfernung sich befindet. abx rotirt mit dem Magneten, xd steht fest. Ob wir nun für OO' einen Vollmagneten oder einen um die Axe symmetrischen Hohlmagneten nehmen, so wird bei Einleiten eines Stromes durch $abxd$ immer abx und der mit demselben fest verbundene Magnet rotiren, nach Faraday, weil die feststehenden Kraftlinien auf bx drücken, nach Preston, weil das feststehende xd auf die mit dem Magneten fest verbundenen Kraftlinien drückt. Wir haben hier eine Umkehrung der Betrachtungen von S. 952. In gleicher Weise hat auch Beer gezeigt, dass sowohl die Laplace'sche Ansicht, welche zur Plücker'schen Anschauung, von mir als die Faraday's bezeichnet, führt, als auch die Ampère'schen Ideen, welche zur Neumann'schen Theorie, respective mit Berücksichtigung des Begriffes Kraftlinien zur Vorstellung Preston's führen, in gleicher Weise diesen Versuch erklären.

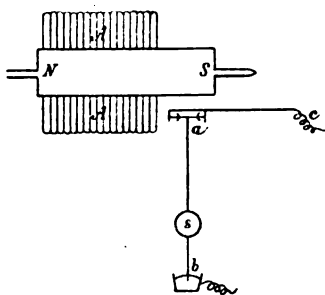


Fig. 8.

 $\frac{1}{4}$ natürl. Grösse.

Ponderomotorische Wirkung eines rotirenden Magneten. Im weiteren Verfolge dieser Ideen machte ich zwei neue Versuche, die vielleicht von einigem Interesse sein dürften. NS (Fig. 7) ist ein horizontal liegender Elektromagnet, AA die magnetisirende Spule, welche gleichzeitig mit dem Magneten um

eine horizontale Axe gedreht werden kann, die Stromzuführung geschieht durch nicht gezeichnete Schleifcontacte; ab ist ein kleines, 24 cm langes Pendelchen (in der Figur zu kurz gezeichnet), das in keinerlei mechanischer Verbindung mit dem Magneten steht. Das untere Ende des Pendelchen b taucht in Quecksilber und ein starker Hilfsstrom kann durch cab hindurchgeleitet werden. Geschieht dies, während der Elektromagnet magnetisch ist, so wird das Pendelchen aus der Ruhelage herausgedrückt und die Ablenkung kann mittelst des kleinen Spiegelchens s bestimmt werden. Diese Ablenkung war nun gleich gross, ob der Magnet in Ruhe war, oder etwa 80mal in der Secunde gedreht wurde. Durch Commutiren des magne-

tisirenden Stromes oder des Stromes im Pendelchen oder durch Änderung der Rotationsrichtung wurde dieser Versuch in mannigfacher Weise variirt, das Resultat blieb aber immer das gleiche.

Nach Faraday ist das selbstverständlich, denn die Kraftlinien stehen trotz der Rotation fest, das Feld bleibt physikalisch ganz unverändert. Nehmen wir aber an, dass die Kraftlinien mit dem Magneten rotiren, so haben wir schon eine gewisse Einschränkung, wonach der Druck eines stromdurchflossenen Leiters gegen magnetische Kraftlinien von einer Eigenbewegung dieser Kraftlinien ganz unabhängig ist.

Diese Differenz beider Anschauungen tritt vielleicht in folgendem Versuche noch klarer zu Tage. Es handelt sich um Beantwortung der Frage, ob das bekannte Faraday'sche Pendel,¹ das, wenn es stromführend ist, um einen Magneten herumrotirt, in seiner Rotationsgeschwindigkeit sich ändere, wenn man den Magneten selbst mechanisch in derselben Richtung oder in entgegengesetzter dreht. Aus technischen Gründen wurde dieser Versuch in folgender Form, gleichsam auf den Kopf gestellt, ausgeführt.

NS (Fig. 9) ist der Eisenkern mit der Spule; er steckt in einer verkehrt aufgestellten Centrifugalmaschine nach abwärts; der magnetisirende Strom wird durch Schleifcontacte zugeleitet, damit auch hier die magnetisirende Spule mitrotire. *ab* ist ein Metallständer mit einem Quecksilbernäpfchen *b*; *eg* sind zwei feststehende, concentrische, kreisförmige Quecksilberrinnen, die miteinander (durch Überbrückung von zahlreichen Eisendrähtchen) in leitender Verbindung stehen; der Draht *fh* ist fest mit dem Magneten verbunden und rotirt mit demselben; *r* sind Gegengewichte, damit das Drahtsystem *cde* auf der Spitze *c* stabil stehe. Der Strom, der durch das Faraday'sche Pendelchen *cde*

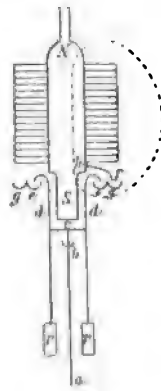


Fig. 9.
 $\frac{1}{4}$ natürl. Grösse.

¹ Siehe z. B. Pfaunder, Lehrbuch der Physik, III, S. 702—704, 1888 bis 1890 oder Wüllner, Lehrbuch der Physik, IV, S. 895, 1886.

geht, nimmt im Ganzen den Verlauf durch den Leiter ab , der fix ist, weiter durch cde , welcher durch elektromagnetische Einwirkung rotiren kann; der Strom geht dann aus der feststehenden Quecksilberrinne e in die feststehende Nachbarrinne g ; in diese taucht der mit dem Magneten verbundene Draht fh , durch welchen der Strom in den Magneten eintritt, um durch einen (nicht gezeichneten) Schleifcontact bei N wieder zur Batterie zurückzukehren.

Steht der Elektromagnet fest, so rotirt das Drahtsystem cde , ich kann aber auch den wirkenden Elektromagneten mechanisch in Rotation versetzen. Weil gleichzeitig mit dem Magneten fh rotirt, muss fh in eine zweite Quecksilberrinne tauchen, um nicht durch Reibung die Rotation des eigentlichen Pendelchens zu beeinflussen. Stand der Elektromagnet ruhig, so fanden etwa 60 Umdrehungen des Pendelchens in 30 Sekunden statt; genau dieselben Zahlenverhältnisse wurden aber auch gefunden, wenn man den Elektromagneten mit beliebigen Geschwindigkeiten in gleicher oder entgegengesetzter Richtung rotirte.

Steht der Magnet ruhig, so geben beide Theorien das gleiche Resultat. Sowie durch den Leiter im Felde Strom fließt, wird derselbe gegen die Kraftlinien gedrückt und rotirt immer rascher, bis seiner weiteren Beschleunigung durch die Reibung und Inductionsströme ein Ziel gesetzt wird. Die Energie dieser Rotation entsteht nach beiden Theorien durch den elektrischen Strom, der die durch die Rotation entstehende elektromotorische Gegenkraft überwinden muss.

Lassen wir nun durch mechanische Kraft den Magneten ebenso rasch rotiren, als es der Leiter unter dem Einflusse des Stromes thut, so verlangen wieder beide Theorien dasselbe, dass nämlich jetzt die Energie der Pendelrotation nicht mehr durch den Strom, sondern durch die mechanische Energie der Rotation des Magneten geliefert werde. Nur aus verschiedenen Gründen. — Nach Faraday stehen auch jetzt die Kraftlinien fest. Es entstehen sowohl einerseits in cde , als auch anderseits in der Strombahn im Magneten hN elektromotorische Gegenkräfte, die sich aber gegenseitig aufheben. (Das wird aus der Betrachtung der einen, in der Figur punktirt gezeichneten Kraft-

linie unmittelbar ersichtlich. hf kann nach Belieben klein gemacht werden, es ist daher seine Wirkung zu vernachlässigen.) Nach Preston bewegen sich Kraftlinien und Leiter gleich schnell, es findet also auch hier keine Schwächung des ursprünglichen Stromes statt, somit kommt die Rotationsenergie des Pendelchens von der Rotationsenergie des Magneten.

Nach Maxwell sucht ein vom Strome durchflossener Leiter im magnetischen Felde jene Lage einzunehmen, bei welcher er die möglichst grösste Anzahl von Kraftlinien umschliesst. Das gilt aber in unserem Falle nicht, weil hier der Magnet sich bewegt.¹

Somit liefert dieser Versuch auch keine Entscheidung.

Unipolare Induction in einem Eisenrahmen. Folgender Versuch wäre vom Standpunkte der Theorie Faraday's sehr leicht zu erklären, während er nach der Preston's eine eigenthümliche Schwierigkeit bietet. Diese Schwierigkeit tritt aber auch bei Beibehaltung der Idee Faraday's, wiewohl an anderer Stelle (siehe S. 979) auf.

Es wurde die Änderung der unipolaren Induction eines Magneten untersucht, wenn man die magnetischen Kraftlinien durch feststehende massive Eisenmassen gehen liess; der Magnet rotirte in einem Eisenrahmen oder aber ausserhalb desselben.

In nachstehender Fig. 10 sehen wir in *a* den verticalen Längsdurchschnitt, der die magnetische Axe enthält, in *b* eine perspectivische Ansicht des Eisenrahmens ohne Magneten und endlich in *c* einen auf die magnetische Axe senkrechten Verticalschnitt durch die Äquatorebene des Magneten. Es sei *NS* der Elektromagnet, der durch die Axenverlängerungen *e* und *i* in rasche Rotationen versetzt werden kann. Die Axe *ei*

¹ Ein analoger Fall auf mechanischem Gebiete wäre folgender: Es sei eine feststehende Kugel *a*, welche eine Kugel *b* mit der Newton'schen Gravitation anzieht. Die Kugel *b* fällt, indem sie von Orten minderen Potentials zu solchen höheren Potentials fortschreitet. Bewege ich aber die anziehende Kugel *a* mit einer Geschwindigkeit, welche ebenso gross ist und gleich gerichtet wie die von *b*, so ändert sich die Entfernung der beiden Kugeln nicht, die Kugel *b* bleibt stets auf Orten gleichen Potentials und die Bewegungsenergie des gesamten Systemes rührt her von jener Energie, welche von aussen her in die Kugel *a* hineingesteckt wird.

geht ohne Berührung durch die Löcher des Rahmens und die Dimensionen des Magneten sind so gewählt, dass der Rahmen (Fig. 10 a) sowohl von oben und unten, als auch von rechts und links möglichst dicht an den Magneten heranreicht. Die

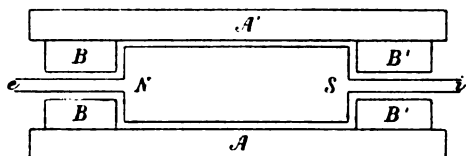


Fig. 10 a.

$\frac{1}{3}$ natürl. Grösse.

(nicht gezeichneten) Windungen des Elektromagneten rotiren mit demselben; der magnetisirende Strom wurde mittelst zweier

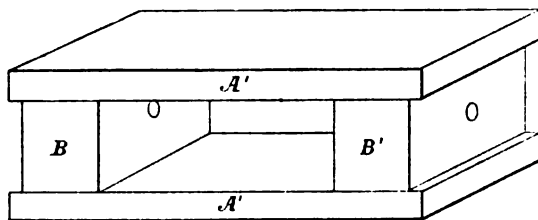


Fig. 10 b.

Schleifcontacte zugeführt und war auf das Sorgfältigste vom Magneten isolirt. Der Eisenrahmen, welchen man um diesen Magneten herum bauen konnte, bestand aus zwei Eisenplatten

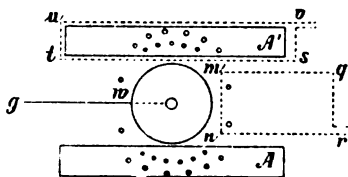


Fig. 10 c.

A und A' und aus zwei durchbohrten Eisenparallelepipeden B und B' .

Bevor ein Versuch über unipolare Induction gemacht wurde, untersuchte ich zuerst das Feld durch gewöhnliche Induction. Eine einfache, mit einem Galvanometer verbundene Drahtschlinge umgibt den Äquator des Magneten und man erhält, nach Anbringung aller Correctionen beim Commutiren des magnetisirenden Stromes einen Ausschlag von $2 \cdot 21$ ohne

Eisenrahmen und 7·37 mit Eisenrahmen, es ist somit die Gesamtanzahl aller Kraftlinien in Folge der Anwesenheit des Eisens 3·34mal so gross geworden. Die Mehrzahl der Kraftlinien wird aber im zweiten Falle durch das Eisen hindurchgehen. Um das zu constatiren, wurde eine zweite rechteckige Schlinge *stuv* um die Eisenplatte *A* gelegt (siehe Fig. 10 c). Die Induction in diesem Rechtecke war 3·01, somit gehen von 7·37 Kraftlinien $2 \times 3 \cdot 01$ oder 6·02 durchs Eisen. Ich füge noch hinzu, dass eine Rotation des Magneten während dieser Messung keinen Einfluss hatte, es gingen also die Kraftlinien vom rotirenden Magneten gerade so weg, wie vom ruhenden.

Des Späteren wegen erwähne ich noch folgende Inductionsmessung. Eine rechteckige Spule *qmnr* (Fig. 10 c) ist in dem Luftraume des Eisenrahmens in der Äquatorebene eingeschoben. Beim Commutiren des magnetisirenden Stromes erhält man ohne Eisenrahmen 0·99 und mit Eisenrahmen 0·21, d. h. es wurde das Feld an der Stelle des Äquators durch Anbringung des Eisenrahmens 4·75mal so schwach. Diese Zahl kann mit den vorigen nicht unmittelbar verglichen werden, weil diese Spule aus mehreren Windungen bestand und auch keine für die spätere Überlegung überflüssige Messungen der Dimensionen dieser Spule ausgeführt wurden.

Jetzt erst wurde zur Bestimmung der unipolaren Induction geschritten. Ein Schleifcontact *wg* (Fig. 10 c) und die Axe *e* (Fig. 10 a) führen zum Galvanometer; die unipolare Induction beträgt 12·6 im Eisenrahmen und 3·6 ohne Eisenrahmen. Es ist somit die unipolare Induction durch Anwendung des Eisens 3·5mal vergrössert worden. Nach Faraday's Theorie ist die Erklärung sehr einfach. Alle Kraftlinien gehen durch das Innere des Magneten. Der Sitz der elektromotorischen Kraft liegt in *ow* (Fig. 10 c), wo durch den rotirenden Magneten die im Innern des Magneten liegenden feststehenden Kraftlinien geschnitten werden. Alles was aussen im magnetischen Felde die Anzahl der Kraftlinien ändert, muss auch die Anzahl der Kraftlinien innerhalb des Magneten und daher auch den Betrag der unipolaren Induction um gleich viel verändern. Durch den Eisenrahmen erhielten wir eine 3·34fache Vermehrung der

Kraftlinien und eine 3·5fache Vergrösserung der unipolaren Induction. Diese beiden Zahlen sind mit Rücksicht auf die Fehlerquellen an den Schleifcontacten u. dgl. als gleich anzusehen.

Viel complicirter wird die Erklärung, wenn wir uns auf die Anschauungsweise stellen, dass die Kraftlinien mitrotiren. Der Sitz der elektromotorischen Kraft ist dann im feststehenden Draht *gn* zu suchen (Fig. 10 c). Wir haben aber früher gesehen, dass durch Anbringung des Eisenrahmens die Anzahl der Kraftlinien an der Stelle *gn* auf den etwa fünften Theil $\left(\frac{0\cdot99}{0\cdot21}\right)$

verkleinert wird und trotzdem ist die unipolare Induction an dieser Stelle 2·5mal so gross. Es stellen in Fig. 10 c die Punkte den Äquatorialdurchschnitt der Kraftlinien dar, von je 7·37 gehen nach den früheren Messungen 6·02 durch das Eisen, nur 20% gehen durch den Luftraum. Gleichwohl müssen bei einer Umdrehung alle Kraftlinien die Strecke *gn* passiren, da ja die unipolare Induction in *gn* ihrer Grösse nach dem Schneiden aller Kraftlinien entspricht. Daraus folgt, dass die Kraftlinien mit sehr grosser Geschwindigkeit rotiren; sie werden im oberen *A* längere Zeit verweilen und dann plötzlich mit einer Geschwindigkeit, die viel grösser ist, als die Rotationsgeschwindigkeit des Magneten, in das untere *A* hinunterspringen, um die versäumte Rotation nachzuholen. Nur so glaube ich vom Standpunkte Preston's aus meine Resultate erklären zu können.

Diese Rotationsversuche im Eisenrahmen lassen sich nach Faraday viel ungezwungener erklären; es wäre aber voreilig, dies zu Gunsten dieser Theorie deuten zu wollen, da wir eben dasselbe »Springen der Kraftlinien« bei Erklärung einer anderen Thatsache (S. 979) vom Standpunkte Faraday's nicht werden entbehren können.

Eine ähnliche Schwierigkeit wird auch von Ermacora¹ angegeben. Er kommt zur Ansicht, dass in solchen eisen-

¹ Ermacora, Ein fundamentaler Punkt der elektrodynamischen und Inductionstheorie und die wahrscheinliche Existenz eines vierten elektrischen Feldes. (Rend. della Soc. Ital. di Elettività pel progresso degli studi e delle applic. I. Mai 1891. Übersetzt in Zeitschr. für Elektrotechnik, Kareis, Wien, IX. S. 424, 1891.)

geschirmten Räumen die durch Schwingungen einer Magnetnadel und dergl. bestimmte Feldstärke für die durch das Schneiden derselben Kraftlinien hervorgebrachte Induction nicht massgebend sei. Ich werde auf diesen interessanten Fall am Schlusse der Arbeit noch einmal kurz zurückkommen.

II. Elektrometrische Versuche.

Die bis jetzt geschilderten Überlegungen haben keine Entscheidung geliefert. Nach der Ansicht Faraday's muss ein unipolar gedrehter Magnet elektrische Spannungen aufweisen, und es liegt daher die Idee nahe, diese Spannungen elektrometrisch nachzuweisen, wie dies wohl zuerst Beer verlangt hat.¹ Wiewohl ich auf diese Weise durchaus keine einwurfsfreien Resultate erhielt, möchte ich mir doch erlauben, einige Worte über meine diesbezüglichen, oft sehr complicirten Versuche zu sagen.

Die Schwierigkeit bei allen derlei Versuchen liegt natürlich darin, dass man an dem rotirenden Magneten keine Erdleitung anbringen kann und daher zu Tropfelektroden und ähnlichen Hilfsmitteln greifen muss.

Potentialverschiebung in einem ruhenden Leiter. Am einfachsten erschiene es, die eventuelle Ladung oder Nichtladung eines dem rotirenden Magneten benachbarten feststehenden Leiters zu constatiren. Es sei NS (Fig. 11) ein um eine verticale Axe rotirender Magnet, der in der Axenrichtung SO zur Erde abgeleitet sei, ab sei ein Leiter, der nach der Theorie Preston's Spannungsdifferenzen zwischen a und b aufweisen muss. Der obere Theil des Leiters sei durch E zum Elektrometer abgeleitet. Wegen der grossen Capacität des Elektrometers würde der ganze Potentialanstieg an dem Punkte b sitzen. Wir können nun aber durch einen Draht, der vom Punkte b zur Erde führt, keine Ableitung vornehmen, da ja dieser Draht durch dieselben Kraftlinien wie Eb , aber im entgegengesetzten Sinne

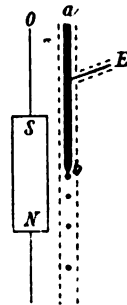


Fig. 11.

¹ Pogg. Ann. 94, S. 192, 1855.

geschnitten würde. Es liegt nun die Idee nahe, in *b* eine Tropfelektrode anzubringen. Die Potentialdifferenzen, mit welchen ich im günstigsten Falle arbeiten konnte, waren $\frac{1}{100}$ Volt; es wäre daher nothwendig, um die Elektrisirung der Tropfelektrode durch Reibung der Luft, und um die Influencirung der Tropfelektrode, welche nach der Faraday'schen Theorie vom rotirenden Magneten ausströmen würde, zu vermeiden, die Tropfelektrode mit einer zur Erde abgeleiteten Röhre (in der Figur punktirt gezeichnet) zu umgeben. Diese Röhre unterliegt aber nach der Theorie Preston's gleichfalls durch das Schneiden der rotirenden Kraftlinien einer magnetischen Induction, die Tropfelektrode tropft von allem Anfange an in einem Gehäuse, welches genau jenes Potentiale im Innern erzeugt, das die Tropfelektrode von allem Anfange an gehabt hat. Eine Ableitung findet daher nicht statt. Ich weiss nicht, durch welche Art von Kunstgriffen man dieses Hinderniss umgehen könnte.

Potentialverschiebung im rotirenden Magneten. Ich habe in Folge dessen die Spannung des rotirenden Magneten selbst nachzuweisen versucht, wobei ich zunächst die Idee verfolgte, die Tropfelektroden mitrotiren zu lassen. Ein grosser, isolirter Elektromagnet rotirte um eine horizontale Axe, ein Draht führte in der Richtung der Axe zum Elektrometer. Nach der anderen Richtung war die Axe hohl und stand mit einem isolirten Wasserreservoir in Verbindung, der Wasserkanal ging bis in die Mitte des Magneten und bog dort senkrecht gegen den Äquator des Magneten ab, wo das Wasser bei einer raschen Rotation des Magneten in Form eines feinen Sprühregens herausgeschleudert wurde. Der ganze Magnet befand sich in einem Metallkasten von 1.5 m im Gevierte, der zur Erde abgeleitet war. Ich dachte so eine Ableitung jener Elektricitäten, die am Äquator sich anhäuften, bewerkstelligen zu können. Bei raschen Rotationen war aber die Reibung des ausströmenden Wassers viel zu gross, der Magnet wurde so stark negativ elektrisch, dass das Elektrometer weit über die Scala hinausging.

Ich liess nun an derselben Axe zwei in der eben geschilderten Art construirte Magnete rotiren, der magnetisirende

Strom wurde aber in beiden Magneten nach entgegengesetzter Richtung herumgeführt. Die Axe des einen Magneten war mit dem einen Quadrantenpaar, die Axe des zweiten Magneten mit dem zweiten Quadrantenpaar des Elektrometers verbunden. Ich hatte so gehofft, dass die Elektrisirung durch die Reibung des ausspritzenden Wassers sich compensiren würde, während durch die Anwendung der zwei Magnete die Wirkung der unipolaren Induction beim Commutiren sich verdoppeln würde. Das Elektrometer blieb zwar innerhalb des Gesichtsfeldes, war aber so unruhig, dass die grosse Mühe, die ich mir mit diesem Versuche gegeben, leider resultatlos blieb. Gleichwohl glaube

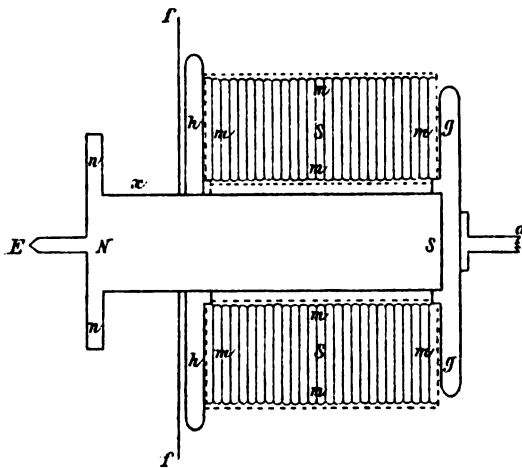


Fig. 12.

 $\frac{1}{2}$ natürl. Grösse.

ich, dass diese Anordnung bei Anwendung besserer Hilfsmittel noch am ehesten Aussicht auf Erfolg hätte. Ich habe mich nicht weiter mit derselben bemüht, weil mir inzwischen die auf S. 976 zu schildernden Versuche entscheidend zu sein schienen.

Nur noch einen elektrometrischen Versuch will ich beschreiben, der unter einer gewissen Annahme zu Gunsten der Faraday'schen Hypothese spricht und bei dessen Schilderung ich einige der Fehlerquellen, die auf diesem Gebiete auftreten, erwähnen kann. NS (Fig. 12) ist der Eisenkern eines Elektromagneten. Dieser Eisenkern hat nach links eine Polscheibe *mm*; die Axe *E* führt zum Elektrometer. *hh* und *gg* sind zwei Hartgummischeiben. Die Axe *a* ist durch die Hartgummischeibe *gg*

vom Magneten isolirt; $m \dots m$ ist eine zur Erde abgeleitete Metallhülle, in welcher die magnetisirende Spule s, s aufgewickelt ist. Diese Spule wird durch zwei nicht gezeichnete Schleifcontacte mit dem magnetisirenden Strom versehen. Die zur Erde abgeleitete Einhüllung m der Spule ist nothwendig, weil der magnetisirende Strom sonst durch statische Influenz auf den Eisenkern und das Elektrometer wirkt. Das Ganze befindet sich in einem grossen, zur Erde abgeleiteten Kasten von $1.5\ m$ im Gevierte. Die Verlängerung der Axe a führt durch die Wand des Kastens hindurch, der Schnurlauf zum Antrieb des Magneten befindet sich so natürlich ausserhalb des Kastens, da die Reibung der Schnur viel zu viel Elektrizität erzeugen würde. f ist eine dünne Eisenplatte, um den Punkt x , wo die Ableitung der Elektrizität stattfinden soll, vor dem Einflusse der Hartgummiplatte hh zu schützen. Dieses ganze, eben beschriebene und in der Figur dargestellte System rotirt circa 80mal in der Secunde.

Lässt man bei x einen zur Erde abgeleiteten Draht schleifen, so zeigt das Elektrometer beim Commutiren Spannungsänderungen von circa $\frac{1}{100}$ Volt. Die Frage ist jetzt natürlich, ob diese elektromotorische Kraft im Magneten oder in dem bei x schleifenden Drahte ihren Sitz hat. Um das zu entscheiden, muss an Stelle des schleifenden Drahtes eine andere discontinuirliche Ableitung ersonnen werden.

Auch hier versuchte ich es zunächst mit Tropfen, welche von oben her auf x auffielen; es waren aber die störenden Ursachen zu vorwiegend und selbst ein Doppelsystem mit Gegen-schaltung (analog dem oben geschilderten) hatte keinen Erfolg. Nun wurde um x ein Papierstreifen so gewickelt, dass, mit Hilfe zweier unterlegter Drahringe, zwischen dem Magneten und dem Papierstreifen etwa $1\ mm$ Luftschichte war. Die Oberfläche des Papiers war berusst und stand in leitender Verbindung mit dem Magneten. Wurden nun die Strahlen einer kräftigen Wechselstrombogenlampe mit Hilfe eines vergoldeten Hohlspiegels so auf x concentrirt, dass x den Brennpunkt des Lichtkegels bildete, so trat beim Rotiren und Commutiren ein Ausschlag von derselben Grössenordnung auf, wie wenn auf x ein zur Erde abgeleiteter Draht schleifte. Ich verhehle mir aber

nicht, dass ich mit diesem Versuche keine einwurfsfreie Stütze der Anschauung Faraday's geschaffen. Abgesehen von der Elektrisirung durch die Bestrahlung, welche bald —, bald + war, der Unruhe des Elektrometers und sonstiger Fehlerquellen geschieht hier die Ableitung durch Wärmewirkung, und man könnte immerhin annehmen, dass nach Preston eine Induction in dem aufsteigenden warmen Luftstrom stattgefunden habe.

Ich habe die Ergebnisse dieses Capitels, in welchem eine fast zweijährige, angestrengte experimentelle Arbeit steckt, nur desswegen kurz mitgetheilt, um die Schwierigkeiten einer Entscheidung der aufgeworfenen Frage mittelst elektrometrischer Messung darzuthun.

III. Entscheidende Versuche.

Folgende Versuche scheinen mir aber nur im Sinne einer Entscheidung der untersuchten Frage zu Gunsten der ursprünglich Faraday'schen Theorie gedeutet werden zu können. Ein

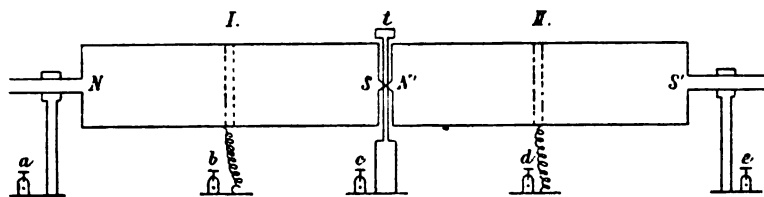


Fig. 13.

$\frac{1}{4}$ natürl. Grösse.

Magnet ist im Äquator durch einen zur Axe senkrechten Schnitt gleichsam in zwei Theile getheilt und es kann jetzt jeder dieser zwei Theile für sich allein gedreht werden. In Fig. 13 sind NS und N'S' zwei Elektromagnete, deren ungleichnamige Pole S und N' möglichst knapp aneinanderstossen. Die Entfernung der beiden Magnete betrug 9 mm, weil ja die Stütze t zwischen denselben eine gewisse Festigkeit haben musste; die Länge jedes Magnetes war 16 cm. Die (in der Figur nicht gezeichnete) Drahtwicklung war fest mit den Magneten verbunden und rotirte mit denselben. Jeder der Magnete besass zwei Schleifcontacte zur Zuführung des magnetisirenden Stromes, der aber von dem Eisenkerne selbst sehr sorgfältig isolirt war. Die beiden Magnete wurden stets in derselben Richtung erregt,

indem der magnetisierende Strom zuerst um I und dann in derselben Richtung um II herumfloss. Beim Commutiren kehrte sich die Richtung in beiden um, so dass immer zwei ungleichnamige Pole zusammenstiessen, das Ganze somit gleichsam einen einzigen Magneten darstellte. Fig. 14 gibt den experimentell gefundenen Verlauf der Kraftlinien in quantitativ richtiger Weise (willkürliches Masssystem).¹

Zur Untersuchung der Unipolar-Induction dienen die Klemmen *abcde* (Fig. 13); *b* und *d* führen zu zwei Schleifcontacten am Äquator der beiden Magnete, metallisch verbunden

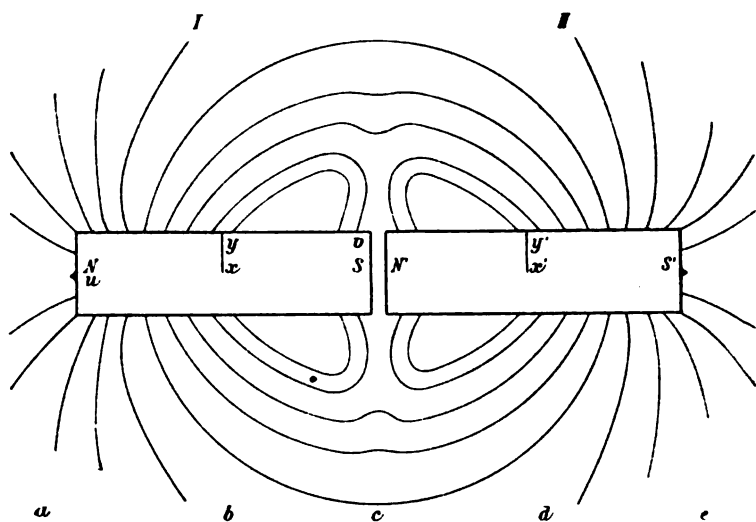


Fig. 14.

mit den Eisenkernen und wohl isolirt von der magnetisierenden Spule; die Klemme *c* ist in Verbindung mit der Axe *S* und *N'*, *a* mit der Axe *N*, *e* mit der Axe *S'*.

Es sei nun zunächst *c* und *d* mit dem Galvanometer verbunden, Magnet I steht fest, II rotirt einmal per Sekunde (directer Antrieb ohne Übersetzung). Wir erhalten nach Anbringung aller Correctionen im Mittel einen Ausschlag von 38. Ist hingegen *de* mit dem Galvanometer verbunden, so haben

¹ Siehe Anmerk. S. 955. In der citirten Arbeit von Zuchristian ist auch die eigenthümliche Knicung der Kraftlinien in der Mitte begründet. In Fig. 14 sind die Kraftlinien zwischen *S* und *N'* weggelassen, weil der Raum *SN'* für eine Beobachtung zu schmal war.

wir einen Ausschlag von 39, in beiden Fällen fliesst der Strom vom Äquator gegen die Axe (oder bei Rotations- respective Stromwechsel umgekehrt). Diese beiden Zahlen sind gleich, da ja der Magnet II in beiden Fällen ganz symmetrisch abgeleitet wird.

Nach Faraday sitzt die elektromotorische Kraft in beiden Fällen in der Strecke $x'y'$ (Fig. 14). Eine genaue Besichtigung dieser Zeichnung zeigt aber, dass diese beobachtete Gleichheit nach Preston schon schwer zu erklären wäre. Des Ferneren aber sollen die Kraftlinien an den Magneten festgebunden sein. Ich frage nun: an dem rotirenden Magneten II oder an den feststehendem I? Ja ich kann bei diesen beiden Versuchen, währenddem II gleichmässig fortrotirt, I in derselben oder in entgegengesetzter Richtung rotiren lassen, ohne dass das Resultat sich ändert.

Folgender Versuch ist nur eine Art von Wiederholung und Erweiterung des vorhergehenden. Es rotire I, Galvanometerleitung sei bc und II sei ruhig, so erhalte ich einen Strom von der Grösse 40. Diese Zahl ist etwas grösser als die oben gefundene analoge 38, weil die Schleifcontacte nicht absolut gleich aufsitzen u. s. w. Jetzt verbinde ich b und d mit dem Galvanometer. Rotire ich II, während I ruhig ist, erhalte ich einen Strom 38, rotirt hingegen I, und II ist ruhig, erhalte ich einen Strom von 40. Das ist wieder nur eine Wiederholung der bereits gemachten Versuche. Jetzt lasse ich aber beide Magnete entgegengesetzt rotiren und erhalte einen Ausschlag von 79 (fast gleich $38 + 40$). Dieser merkwürdige Versuch erklärt sich nach Faraday sehr einfach. Alle Kraftlinien, die wir aussen haben, gehen durch das Innere der Magneten so ziemlich parallel der Axe, die Kraftlinien stehen aber fest; durch das Drehen des Magneten II werden die Kraftlinien in $x'y'$ geschnitten, durch die entgegengesetzte Drehung des Magneten I die Kraftlinien in xy , und diese beiden gleichgerichteten Ströme können nun, wenn die beiden Magnete sich einzeln drehen, einzeln hervorgerufen werden; drehen sich jedoch beide Magnete gleichzeitig, aber entgegengesetzt, so summiren sie sich; drehen sich beide Magnete in gleichem Sinne, so heben sie sich auf.

Wollen wir diesen Versuch nach Preston erklären, so müssen wir zu einer ziemlich gezwungenen Annahme unsere Zuflucht nehmen. Sehen wir zunächst von der Zeichnung Fig. 14 ab, so wirken, nach den wirklichen Versuchsergebnissen beurtheilt, die Magnete I und II ungefähr so, wie wenn sie ganz weit von einander wären; die Kraftlinien des Magneten II drehen sich nach Preston mit diesem Magneten, ebenso sind die Kraftlinien des Magneten I an dem Magneten I fixirt. Nun sind aber in facto die Magnete ja nebeneinander; die in Fig. 14 wiedergegebenen experimentellen Resultate zeigen uns ja ein Ineinanderfliessen der Kraftlinien; wir müssen da folgerichtig, wollen wir die Preston'sche Anschauung beibehalten, dieses

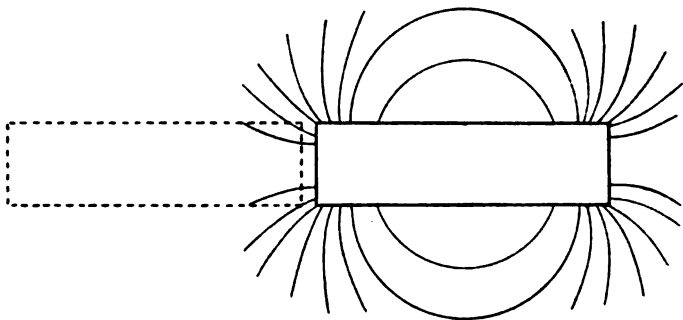


Fig. 15.

Ineinanderfliessen als eine secundäre Erscheinung auffassen und müssen etwa folgendermassen schliessen: Es seien die wirklichen Kraftlinien, deren Rotation die unipolare Induction verursacht, einerseits und jene Kraftlinien, welche die gewöhnliche Induction und das Ausrichten der Eisenfeile bewirken, anderseits, etwas Verschiedenes. Wir hätten es im letzteren Falle bereits mit einer resultirenden Wirkung beider Systeme zu thun, welche die Einzelwirkung des einzelnen Magneten verdeckt, während bei der Unipolarinduction gerade diese Einzelwirkung in Thätigkeit tritt.

Trotz diesem etwas gezwungenen Erklärungsversuche bleibt aber noch immer eine Schwierigkeit übrig. Wenn wir den einen Magneten in grosser Entfernung vom zweiten untersuchen, so gibt er für sich allein das in Fig. 15 dargestellte Feld.

Die Kraftlinien sind jetzt weniger geworden; es gibt auch die unipolare Induction dc statt 38 nur 33. Wenn wir nun auch annehmen, dass, was unipolare Wirkung anlangt, das Feld jedes Magneten so für sich bestünde, wie wenn der zweite Magnet nicht da wäre, so müssten wir auch noch ganz eigenthümliche Annahmen machen, weil durch Hinzufügen des zweiten Magneten ja die Anzahl der Kraftlinien vermehrt wurde und sich diese Vermehrung in der unipolaren Induction der nebeneinander rotirenden Magneten zeigte. Wir müssten also etwa so schliessen: Die Anwesenheit des zweiten Magneten vermehrt die Kraftlinien des ersten, welche Kraftlinien aber dann unabhängig vom zweiten Magneten mit dem ersten rotiren und vice versa.¹

Aber selbst dieser Rattenschwanz von Ausflüchten scheint mir folgendem Experimentum crucis nicht Stand zu halten.

Es wurde an dem Apparat Fig. 13 folgende Änderung vorgenommen. Fig. 16 stellt in $\frac{1}{2}$ der natürl. Grösse (doppelter Massstab der Fig. 13) jene Stelle dar, wo die Magnete I und II einander gegenüberstehen, es sind in S und N' die Hartgummispitzen r und r' eingedreht und die Magnete liegen jetzt auf der mittleren Stütze t mit Hilfe dieser isolirenden Spitzen auf. Ferner ist an diese beiden

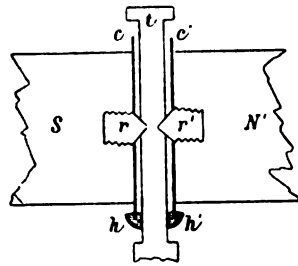


Fig. 16.

Endflächen S und N' der Magneten je eine Kupferplatte c , respective c' aufgelöthet, deren Durchmesser den des Eisen-cylinders und seiner Umwicklung um Weniges überragt, so dass die Platte c unten in eine Quecksilberrinne h eintauchen kann, respective c' in h' . Während also in den früheren Versuchen die Axen der beiden Magneten in leitender Verbindung waren, muss jetzt der inducirte Strom aus dem Magneten S durch c in das Quecksilbernäpfchen h gelangen; dies ist in

¹ Schaltet man die Magnete so, dass gleichnamige Pole einander gegenüberstehen, so lassen sich auch verschiedene interessante Combinationen der Ableitungen treffen, die aber dann, wo ja jedes Feld für sich existirt, zur Klärung obiger Frage nichts beitragen können.

metallischer Verbindung mit h' und von hier geht der Strom über c' nach N' , sonst ist der Apparat und die Bezeichnung der einzelnen Theile dieselbe wie früher; h und h' stehen in leitender Verbindung mit der Klemme c der Figuren 13 und 14.

Zur einleitenden Orientirung zunächst folgende Versuche: ab ist mit dem Galvanometer verbunden, wir erhalten einen Ausschlag 40, ob nun II mitrotirt oder ruhig ist, cb gibt einen Ausschlag von 7 nach entgegengesetzter Richtung, wobei es wieder gleichgiltig ist, ob II mitrotirt oder nicht. ac gibt uns die Differenz dieser beiden Werthe 32. Dass diese Ergebnisse jetzt anders aussehen müssen wie früher, zeigt eine einfache Überlegung der in Fig. 16 dargelegten Verhältnisse, da jetzt die Kupferplatte cc mitrotirt. Nach Faraday stammen diese elektromotorischen Kräfte von dem Durchschneiden der Kraftlinien entlang der Mantelfläche uy , respective uv . Ob wir das Schneiden durch die Mantelflächen oder durch Linien, welche senkrecht auf den Axen stehen, uns bewerkstelligt denken, ist gleichgiltig, da es ja immer nur auf die Endpunkte des Leiters u und y , respective y und v ankommt. yv wirkt in entgegengesetztem Sinne, weil hier die Kraftlinien zum grössten Theil wieder zurückgehen, während $u(y)v$ durch die Differenz dieser beiden Werthe bedingt ist. Selbst das Verhältniss 32 : 7 lässt sich innerhalb der Fehlergrenzen (der Schleifcontact bei x war so breit, dass er etwa zwei Kraftlinien umfasste) aus den Kraftlinien mit 8 : 2 wiederfinden. Ich will die Schwierigkeit, welche die Anschauung Preston's bei Erklärung dieser Resultate mit sich bringt, nicht auseinander setzen, da folgender analoge Hauptversuch noch geeigneter zu diesem Zwecke erscheint.

Ich verbinde nämlich a und e mit dem Galvanometer, die Galvanometerleitungen sind so geführt, dass sie die Verlängerungen der magnetischen Axen bilden. Rotirt jetzt I allein (Versuch 1), erhalte ich einen Strom von 33, rotirt II allein und in entgegengesetzter Richtung (Versuch 2) erhalte ich wieder einen Strom 33·5 von derselben Richtung. Rotiren aber beide Magnete gleichzeitig und nach entgegengesetzten Richtungen (Versuch 3), erhalte ich die Summe der beiden Ausschläge, nämlich 66. Findet die Rotation nach gleichen Richtungen statt, so tritt kein Strom auf.

Nach Faraday ist die Erklärung sehr einfach. Die Kraftlinien stehen fest, die Mantelfläche des einen Magneten schneidet sie in der einen Richtung, die Mantelfläche des zweiten Magneten in entgegengesetzter Richtung, und wir können wieder nach Belieben jede dieser elektromotorischen Kräfte einzeln oder auch ihre Summe oder ihre Differenz in Thätigkeit treten lassen.

Stellen wir uns aber auf den Standpunkt, dass jeder Magnet mit seinem eigenen Kräftesystem, trotz Fig. 14 rotire; es war dies das letzte Auskunftsmittel, unter dem wir die Preston'sche Theorie — und das nicht befriedigend — halten konnten. Die Kraftlinien des einen Magneten II ohne Anwesenheit von I stellt Fig. 15 dar. Denken wir uns nun, dass in Bezug auf die unipolare Wirkung die Anwesenheit von I das Feld II, wenigstens was die Richtung der Kraftlinien anbelangt, nicht ändere. Wenn nur II allein rotirt, haben wir einen Ausschlag von 33. Soll die Induction in einem feststehenden Leiter stattfinden, so steht uns nur die Mantelfläche *ab* zur Verfügung und die daselbst geschnittenen Kraftlinien sind viel zu wenig, um unsere Resultate erklären zu können. Statt 33 hätten wir etwa 5—10 bekommen müssen.

Um vollständig objectiv zu bleiben, wollen wir noch einen letzten Rettungsversuch der Theorien Preston's überlegen.

Aus den eben geschilderten Versuchen 1, 2 und 3 müssen wir folgern, dass die Kraftlinien trotz der Rotation der Magneten feststehen. Man könnte nun dieses Fixiren der Kraftlinien als ausnahmsweise und bedingt durch die Anwesenheit des zweiten Magneten hinstellen. In dem Falle z. B. wo beide Magnete mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Seite rotiren, erschien es ja ganz plausibel, anzunehmen, dass die Kraftlinien gleich grosse, aber entgegengesetzte Drehungsimpulse erführen und daher in Ruhe blieben. Da aber müsste, sowie wir den einen Magneten immer langsamer rotiren und schliesslich sogar stille stehen lassen, der Einfluss des rotirenden Magneten auf die Kraftlinien immer steigen, und dieselben, wenigstens theilweise, mit diesem rotiren. Dem widerspricht aber vollständig, dass Versuch 3 uns die Summe der Versuche 1 und 2 gibt.

Schlussbemerkung.

In consequenter Überlegung aller mitgetheilten Versuche erscheint mir die Thatsache kaum abzuweisen, dass bei unipolarer Induction das Kraftfeld eines rotirenden Magneten feststeht, dass die erste Anschauung Faraday's somit die richtige war.

Daraus ergeben sich aber einige Folgerungen, die ich noch kurz erwähnen will. Es muss, wie schon Plücker¹ behauptet, die Erde als ein Magnet, der durch die eigenen feststehenden Kraftlinien rotirt, am Nordpol positive und am Äquator negative Elektricität zeigen.

Ebenso hat jeder mit der Erde rotirende Leiter Potentialdifferenzen. Denken wir uns in irgend einem Punkte des mittleren Deutschland, senkrecht auf der Tangente der Erdrotation und senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien der Erde einen 1 m langen Draht in (gegen die Erde relativer) Ruhe, so wird derselbe Potentialdifferenzen von 0·013 Volt haben. Der Nachweis dieser Potentialdifferenzen ist aber in Folge derselben Schwierigkeiten, mit denen ich in Abschnitt II kämpfte, fast kaum zu erbringen. Abgesehen von der Kleinheit ist weder eine directe galvanometrische, noch eine elektrometrische Messung möglich; erstere weil jeder geschlossene Leitungsdraht von jeder (geschlossenen) Kraftlinie zweimal in entgegengesetztem Sinne geschnitten wird, letztere weil eine Ableitung des einen Potentials mittelst Tropfelektrode oder dergl. darum nicht zum Ziele führt, weil die Leiter, die gegen einen Punkt hingehen, alle an derselben Stelle dieselben Potentiale haben müssen, die Tropfelektrode also stets in einer Umgebung arbeitet, welche von allem Anfange an eben dasselbe Potentiale hat, welches sie ableiten soll.

Theoretisch möglich erschiene mir nur folgende Methode. Wir drehen einen Leiter um eine Axe, welche in der Richtung der Erdbewegung senkrecht steht auf den Kraftlinien. Dann werden an den beiden Drahtenden die Potentialdifferenzen bei jeder Umdrehung um 180° wechseln und wir haben in diesem ungeschlossenen Drahte einen minimalen Wechselstrom. Es ist

¹ Pogg. Ann. 87, S. 357, 1852.

unmöglich, die Capacitäten der Drahtenden durch condensatorische Wirkung gegenüberstehender Leiter zu verstärken, weil in Folge der Ableitung dieser feststehenden Leiter, welche ja auch von den Kraftlinien geschnitten werden, dieselben von allem Anfange an gleichen Potentiale haben, wie die gegenüberstehenden Drahtenden.

Schliesslich möchte ich noch einen nebensächlichen Punkt erörtern, auf den bereits S. 963 hingewiesen wurde. Es geschieht dies erst an dieser Stelle, weil kraft der gewonnenen Vorstellungen dieser Punkt jetzt rascher erörtert werden kann. Es sei d der Durchschnitt eines Leiters, der auf der Richtung der Erdbewegung e senkrecht steht. d ist auch senkrecht auf die

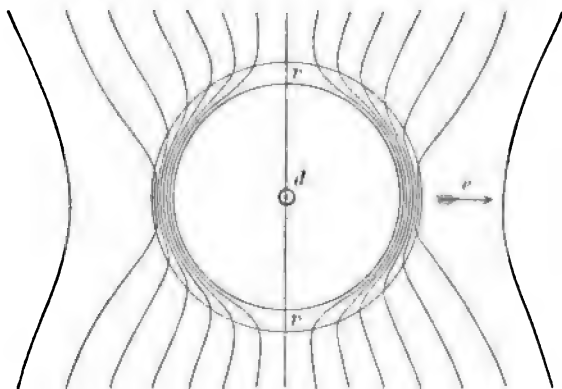


Fig. 17.

Richtung der Kraftlinien und muss bei seiner Rotation mit der Erde alle feststehenden Kraftlinien schneiden. Denken wir uns nun um d herum einen Eisencylinder r , so gehen die Kraftlinien, wie die Figur zeigt, zum grössten Theil durch den Eisenring. Da nun eine Kraftlinie nie reissen kann, sondern stets eine in sich selbst geschlossene Curve darstellt, so müssen wir uns bei der Bewegung von d und r gegen die Kraftlinien folgende Vorstellung bilden. Die Kraftlinien, die rechts durch den Ring gehen, werden, wenn Ring und Draht sich nach rechts bewegt, aus dem Ring herausspringen, d sehr rasch schneiden und dann auf der andern Seite links in r hineinspringen, so dass d , ob es nun im Eisencylinder ist oder ausserhalb desselben, immer von gleich viel Kraftlinien geschnitten werden muss;

nur werden im ersteren Falle die Kraftlinien d mit grösserer Geschwindigkeit, wenn auch in gleichen Zeitintervallen passiren. Durch diese raschere Bewegung innerhalb des Eisenringes wird aber bewirkt, dass in der inneren Lichte des Ringes de facto weniger Linien sind, als im homogenen Feld ausserhalb des Eisenringes. So erklärt sich die bereits erwähnte von Ermacora als Curiosum hingestellte Thatsache, dass die Inductionswirkung in derartigen Fällen von der durch magnetische Messungen (Schwingungen einer Magnetnadel und dergl.) bestimmten Feldstärke scheinbar unabhängig ist; nach obiger Auffassung ist aber auch in unserem Falle einerseits die Inductionswirkung abhängig von der Anzahl der geschnittenen Kraftlinien und anderseits die Feldstärke von der Anzahl der wirklich vorhandenen Kraftlinien. Die von Ermacora vorgeschlagene Änderung elektromagnetischer Grundbegriffe erscheint somit überflüssig.

XXI. SITZUNG VOM 18. OCTOBER 1894.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter übermittelt einen Abdruck der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1894, Capitel IX, »Ministerium für Cultus und Unterricht«, Abtheilung *A, B, C* und *D*, ferner ein Exemplar des Finanzgesetzes vom 29. Mai 1894, mit dem Beifügen, dass die ordentlichen, sowie die ausserordentlichen Ausgaben der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften unverändert nach der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages genehmigt worden sind.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein im Wege des k. italienischen Ministeriums des Äussern für die kaiserl. Akademie eingelangtes Exemplar des IV. Bandes des Werkes: »Le Opere di Galileo Galilei«.

Herr Prof. Dr. V. Uhlig in Prag dankt für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für die Denkschriften, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Kreideflora Australiens«.

Herr Regierungsrath emerit. Prof. J. Luksch übersendet den in Gemeinschaft mit Prof. J. Wolf an der k. k. Marine-Akademie in Fiume verfassten Bericht über die auf der IV. Reise S. M. Schiffes »Pola« im Jahre 1893 ausgeführten physikalischen Untersuchungen im östlichen Mittelmeer und im Ägäischen Meer.

Herr Stefan v. Heinrich in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Über Kräfte im Raume«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine im mineralogischen Museum der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. P. Philipp Heberdey, Capitularpriester des Stiftes Schotten in Wien, unter dem Titel: »Krystallmessungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. IV. Firenze 1894; 4^o.

Berard, E., Trois ans de séjour à la Clinique Ophthalmologique Universitaire de M. le Professeur Fuchs à Vienne. Rapport adressé à M. le Ministre de l'Intérieur et de l'Instruction publique. Bruxelles, 1892; 8^o.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXII. SITZUNG VOM 2. NOVEMBER 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VI—VII (Juni und Juli 1894), Abtheilung I und das Heft VI—VII (Juni und Juli 1894), Abtheilung II. b. des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von den Herren J. Herzig und H. Meyer ausgeführte Untersuchung: »Über den Nachweis und die Bestimmung des am Stickstoff gebundenen Alkyls«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht für die Publicationen der Tiefseeforschungen in den Denkschriften eine von Herrn Anton König in Wien ausgeführte Untersuchung, betitelt: »Die Sergestiden des östlichen Mittelmeeres, gesammelt in den Jahren 1890, 1891, 1892 und 1893«.

Herr Dr. Wilh. Trabert in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Museo de la Plata, Anales, T. I (1890—1891); Seccion Geologica y Mineralogica. P. I (1892); Seccion de Arqueologia. P. II y III (1892); Seccion de Historia General (Fotografia). P. I (1892); Seccion Zoologica. P. I (1893); Paleontologia Argentina (1893). La Plata; Folio. — Revista, T. I (1890—1891); T. II (1891); T. III (1892); T. IV (1893). La Plata; 8°.

XXIII. SITZUNG VOM 8. NOVEMBER 1894.

Herr Prof. Dr. Ph. Knoll in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Graphische Versuche an den vier Abtheilungen des Säugethierherzens«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Beiträge zur Kenntniss der regenscheuen Blüten, nebst Nachträgen zu meinen phytodynamischen Untersuchungen«, von Prof. Dr. Anton Hansgirg an der k. k. böhm. Universität in Prag.
2. »Über Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten«, von Dr. Jan de Vries, Docent an der polytechnischen Schule in Delft.

Herr Dr. Norbert Herz in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodus gefundene astronomische Inschrift«.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, überreicht einen vorläufigen Bericht von Prof. Dr. V. Hilber in Graz über seine im Auftrage der kaiserl. Akademie unternommene geologische Reise in Nordgriechenland und Makedonien 1894.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. »Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante«.

2. »Über den quadratischen Reciprocitätssatz und die Summen von Gauss«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Institut Botanico-Géologique Colonial de Marseille,
Annales. 1^{re} Série, 1^{re} Année, 1^{er} Vol. (1893). Publiées
sous la direction de M. Le Professeur Ed. Heckel. Paris,
1893; 8°.



Bemerkungen über Wärmeleitung

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Entgegen der gewöhnlichen Annahme, dass die Wärme der Körper in einer gegenseitigen Bewegung ihrer Atome bestehe, bei welcher man die Existenz des Äthers ganz ausser Betracht lassen könne, habe ich vor Kurzem¹ die Vermuthung ausgesprochen, die in einem Körper enthaltene Wärmemenge bestehe ihrem wesentlichen Theile nach aus einer zwischen seinen Atomen durch diffuse Reflexion angesammelten Strahlenmenge. Diese aktinische oder Strahlenwärme ist es dann, welche bei den festen Grundstoffen das Gesetz von Dulong und Petit bedingt; die hier zugleich obwaltende Atombewegung macht von der Gesamtwärme nur einen kleinen Theil aus, wodurch das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Wärme um einen mehr oder weniger geringen Betrag grösser erscheint, als es sein müsste, wenn keine Atombewegung stattfände.

Die sogenannte Leitung der Wärme oder deren Fortbewegung im Inneren eines Körpers von Schichten höherer zu solchen von niedrigerer Temperatur wird nach dieser Anschauung durch zwei sehr verschiedene Vorgänge bewerkstelligt: erstens durch Übertragung von Ätherbewegung oder aktinischer Wärme, zweitens durch Übertragung von Atombewegung oder kinetischer Wärme. Es ist klar, dass die Gesetze der Wärmeleitung sich sehr verschieden gestalten können, je nachdem bei derselben entweder der eine oder der andere der zwei genannten Vorgänge sich überwiegend betheiligt. Dass es unzulässig sei, die Wärmeleitung ganz allgemein als eine ledig-

¹ Diese Berichte, Bd. CIII, Abth. II. a, S. 809—831.

lich durch Atombewegung bewirkte Erscheinung aufzufassen. wird durch die Thatsache bewiesen, dass zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und der inneren Reibung der Flüssigkeiten sich kein oder nur ein sehr schwacher Zusammenhang zeigt. In seiner diesbezüglich grundlegenden Arbeit¹ spricht H. F. Weber, ohne sie näher zu erörtern, die Ansicht aus, die Wärmeleitung geschehe in durchsichtigen, nichtmetallischen Flüssigkeiten durch Atombewegung, in Metallen dagegen und namentlich im Quecksilber durch innere Strahlung. Bei dem auf diesem Gebiete noch herrschenden Dunkel könnte es aber immerhin sein, dass es sich gerade umgekehrt verhält.

Denken wir uns einen Körper, dessen Atome durch genügend starke Kräfte in Gleichgewichtslagen unbeweglich festgehalten seien. Nach der kinetischen Theorie würde ein solcher Körper keine Temperatur haben; nach meiner Hypothese ist seine Temperatur durch die zwischen seinen zahllosen Atomen hin- und hergeworfene Strahlenmenge bestimmt, vermöge welcher derselbe auch beständig durch seine Oberfläche Wärme ausstrahlt und deren Abgang daher, wenn seine Temperatur constant bleiben soll, durch gleichzeitige Einstrahlung von aussen ersetzt werden muss. Hat der Körper die Dichte ρ und ist c seine spezifische Strahlenwärme, so enthält er bei der absoluten Temperatur T in der Gewichtseinheit die Strahlenmenge cT und in der Volumeinheit die Strahlenmenge ρcT , welche man als dessen Strahlendichte bezeichnen kann. Für eine in diesem Körper angenommene Schicht von unendlich kleiner Dicke dz herrsche auf einer Seite die Temperatur T und auf der anderen die Temperatur $T-dt$; dann wird durch die Flächeneinheit derselben während einer bestimmten Zeit bei constant erhaltener Temperaturdifferenz dt um eine gewisse Strahlenmenge mehr von der wärmeren nach der kälteren Seite, als umgekehrt übergehen, und dieser Mehrabfluss wird die einzige im gedachten Körper mögliche Art der Wärmeleitung bilden.

Die durch diesen Wärmestrom in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit geführte Wärmemenge kann man dem Unter-

¹ Wiedemann's Annalen, Bd. X, S. 103.

schiede der beiderseits der angenommenen Schicht herrschenden Strahlendichten, bezogen auf die Schichtdicke dz , proportional setzen und also durch den Ausdruck

$$\eta \rho c \frac{dt}{dz},$$

wo η eine von der chemischen Natur des Körpers unabhängige Constante ist, vorstellen, und somit hat man für das Wärmeleitungsvermögen k seiner Bedeutung gemäss die Gleichung:

$$k = \eta \rho c,$$

unter c , wie erwähnt, die specifische Strahlenwärme verstanden, welche nach meiner Hypothese in festen oder flüssigen Körpern immer nur wenig von ihrer wirklichen specifischen Wärme verschieden ist und daher für solche Körper mit letzterer ohne besonderen Fehler identificirt werden kann.

Nach voriger Gleichung müsste der Quotient $\frac{k}{\rho c}$ für Körper, in welchen die Wärmeleitung nur durch innere Strahlung vermittelt wäre, einen gleichen Werth haben. Man wird sonach, wenn für eine Classe von Körpern dieser Quotient sich thatsächlich nahe gleich ergibt, schliessen dürfen, dass die Wärmeleitung in denselben weit überwiegend durch innere Strahlung und nur zu einem geringen Theile durch Atombewegung vor sich geht. Eine solche Körperclasse scheinen nach den Versuchen von Weber die durchsichtigen, nichtmetallischen Flüssigkeiten zu bilden.

Für Körper, in welchen die Wärmeleitung mehr durch Atombewegung als durch innere Strahlung vermittelt wird, muss demnach der Werth von $\frac{k}{\rho c}$ entsprechend grösser sein, als in durchsichtigen Flüssigkeiten. Derselbe ist in der That sowohl bei den Metallen, als auch bei den Gasen viel und sehr ungleich grösser; man muss daher annehmen, dass in diesen zwei Classen von Körpern die Wärmeleitung weit überwiegend durch Atombewegung vor sich geht, was bezüglich der Gase, wo die innere Strahlendichte verhältnissmässig klein ist, während die kinetische Wärme einen grossen Theil (bei der

Luft $\frac{2}{5}$) der Gesamtwärme ausmacht, ohnehin keinem Zweifel unterliegt.

In den Metallen ist dem Gesetze von Dulong und Petit gemäss die lebendige Kraft der Atome, wie in festen oder flüssigen Körpern überhaupt, gegen die in ihrem Volumen diffundirte Strahlenmenge nur gering. Es scheint mir aber, dass, wenn die Summe der leeren Räume zwischen den Atomen vom Körpervolumen bloss einen kleinen Theil beträgt, die Übertragung kinetischer Wärme von Atom zu Atom viel ausgiebiger vor sich gehen muss, als wenn die Summe der leeren Zwischenräume gegen den von der Substanz der Atome erfüllten Raum gross ist. Wie ich glaube, ist letzteres in den gewöhnlichen Flüssigkeiten, ersteres aber in den Metallen der Fall und bedingt deren vergleichsweise gute Wärmeleitung.

Wenn dieser Grund der richtige ist, so muss man erwarten, dass bei den Metallen schon eine geringe Volumvergrösserung, wie sie durch Erwärmung eintritt, eine verhältnissmässig sehr starke Verminderung des Wärmeleitungsvermögens zur Folge habe. Dies trifft denn auch thatsächlich zu. Nach Stewart¹ lässt sich für Eisen der Verlauf von k als Function der Temperatur t zwischen 15° und 220° durch die Formel

$$k = k_0(1 - 0.0011t)$$

ausdrücken; es nimmt also k für dieses Metall durch Erwärmung in einem 32mal stärkeren Verhältnisse ab als die Dichte. Man kann diese Abnahme eine rapide nennen; sie wird sich weiterhin natürlich mehr und mehr verlangsamen. Bei Kupfer nimmt k nur halb so schnell als bei Eisen, aber immer noch 11mal schneller als seine Dichte ab. Durch Ausdehnung bei constanter Temperatur würde für beide Metalle die Abnahme von k wahrscheinlich eine noch etwas stärkere sein.

Dass in Metallen die Atome einander mit ihren Oberflächen bereits nahe kommen, geht aus meiner Hypothese auch auf einem ganz anderen Erscheinungsgebiete hervor. Nach derselben wird nämlich ein Lichtstrahl in einem durchsichtigen

¹ Wiedemann's Beiblätter, Bd. 18, S. 742.

Körper nicht durch den Äther allein, sondern auch durch die Substanz der getroffenen Atome hindurch fortgepflanzt, und hieraus ergibt sich, wenn d die Dichte und n den Brechungsindex des Körpers, δ die Dichte und ν den Brechungsindex der Atomsubstanz bedeutet, die einfache Beziehung:¹

$$\frac{n-1}{d} = \frac{\nu-1}{\delta}.$$

Für gewöhnlich ist $n > 1$, wobei $\nu > n$ sein muss. Bei einigen Metallen (Silber, Gold, Kupfer) fand aber Kundt² $n < 1$, woraus für dieselben $\nu < n$, daher

$$\frac{d}{\delta} > 1 - n$$

und als Verhältniss des für den Äther freibleibenden Theiles zum ganzen Körpervolumen

$$\frac{\delta - d}{\delta} < n$$

folgt. Bei Silber ist für weisses Licht im Mittel aus vielen Bestimmungen

$$n = 0.27;$$

man sieht also, dass bei diesem bestleitenden Metalle die Summe der leeren Räume zwischen den Atomen jedenfalls weniger als 0.27 des Körpervolumens beträgt. Bei so geringer Dicke der zwischen den Atomflächen übrig bleibenden Ätherschichten würde es begreiflich sein, dass eine locale Wärmedifferenz weit schneller durch Atombewegung als durch innere Strahlung sich ausgleicht.

Die oben abgeleitete, von Weber empirisch für durchsichtige Flüssigkeiten von gewöhnlicher Temperatur aufgestellte Formel betreffend, erlaube ich mir noch die folgende Bemerkung beizufügen.

¹ Die Schlüsse, welche sich aus dieser Gleichung ergeben, sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Ihr gemäss erklärt sich auf einfache Weise auch die Mitbewegung des Lichtes in einem bewegten durchsichtigen Mittel.

² Wiedemann's Annalen, Bd. 34, S. 469.

Das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten scheint im Allgemeinen durch ihre Erstarrung sich nur wenig zu ändern. Wenn dem wirklich so ist, dann wird die genannte Formel mit einiger Annäherung auch für nichtmetallische feste Körper gelten, und es dürfte bei solchen, weil hier Strömungen absolut ausgeschlossen sind, die diesfalls noch offene Frage nach dem Einflusse der Temperatur auf das Wärmeleitungsvermögen, welcher nach Weber bei Flüssigkeiten auffallend gross wäre, am sichersten eine definitive Lösung finden. Da übrigens dieses Vermögen, es mag wie immer bedingt sein, durch Abnahme der Temperatur selbstverständlich in keinem Falle Null werden kann, so ist, wie ich glaube, eine erheblich starke Veränderlichkeit desselben mit der Temperatur bei nichtmetallischen festen Körpern und bei den entsprechenden Flüssigkeiten, wenn sie von ihrem Erstarrungspunkte nicht allzu weit entfernt sind, von vornherein unwahrscheinlich.

Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

In dem Folgenden soll ein einfacher Beweis für den Hauptsatz der Lehre von den reducirten binären quadratischen Formen positiver Determinante — dass zwei reducirte Formen nur dann äquivalent sein können, wenn sie derselben Periode angehören — gegeben werden. Dieser Satz wird in den *Disquisitiones arithmeticae*¹ von Gauss etwas umständlich bewiesen, so dass Dirichlet² sich veranlasst sah, einen einfacheren Beweis zu suchen.

1.

Man kann eine reducirte Form von positiver nicht quadratischer Determinante D folgendermassen definiren. Bezeichnet d die grösste in \sqrt{D} enthaltene ganze Zahl und \bar{a} den Zahlenwerth von a , so wird die Form (a, b, c) reducirt genannt, wenn

$$0 \leq d - b < \bar{a} \leq d + b$$

ist.

Die äusseren Coëfficienten a, c einer reducirten Form (a, b, c) haben der Gleichung

$$a \cdot c = b^2 - D$$

zufolge immer entgegengesetzte Vorzeichen.

¹ Art. 193.

² Vereinfachung der Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante (Berliner Akad. 1854.).

Wenn (a, b, c) eine reducirte Form ist, so ist (c, b, a) ebenfalls eine solche. Denn man hat

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = D - b^2$$

und daher einerseits

$$\bar{a} \cdot \bar{c} < (d+1)^2 - b^2 = (d-b+1)(d+b+1);$$

da aber $d-b < \bar{a}$ ist, so folgt

$$d-b+1 \leq \bar{a}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} < \bar{a}(d+b+1),$$

also

$$\bar{c} < d+b+1$$

$$\leq d+b.$$

Andererseits ist

$$\bar{a} \bar{c} > d^2 - b^2 = (d-b)(d+b);$$

da aber $d+b \geq \bar{a}$ ist, so folgt

$$\bar{a} \cdot \bar{c} > (d-b)\bar{a},$$

also

$$\bar{c} > d-b.$$

Es ist demnach

$$0 \leq d-b < \bar{c} \leq d+b.$$

2.

Jede reducirte Form (a, b, c) besitzt eine und nur eine nach rechts benachbarte reducirte Form und ebenso eine einzige nach links benachbarte reducirte Form.

Soll nämlich (a', b', c') eine nach rechts benachbarte Form von (a, b, c) sein, so muss

$$a' = c \quad b' + b \equiv 0 \pmod{c}$$

sein. Soll überdies (a', b', c') reducirt sein, so muss

$$0 \leq d-b' < \bar{c}$$

sein. Da aber

$$d-b' \equiv d+b \pmod{c}$$

ist, so muss $d-b'$ der echte, d. h. nicht negative und den Zahlenwerth des Moduls nicht erreichende Rest von $d+b$ in Bezug auf c sein. Diese Bedingung genügt aber auch, da die Form $\left(c, b', -\frac{b'^2-D}{c}\right)$ dann eine reducirte ist. Denn man hat zunächst

$$0 \leq d-b' < \bar{c}.$$

Da ferner $\bar{c} \leq d+b$ ist, so folgt

$$d+b-(d-b') = b+b' > 0$$

und $b+b'$ muss als Vielfaches von c wenigstens $= \bar{c}$ sein. Man hat also

$$\bar{c} \leq b+b' \leq d+b'.$$

Da jede nach links benachbarte reducirte Form von (a, b, c) durch Vertauschung der äusseren Coëfficienten in eine nach rechts benachbarte reducirte Form von (c, b, a) übergeht, so gibt es also auch nur eine nach links benachbarte reducirte Form von (a, b, c) und dieselbe geht aus der nach rechts benachbarten reducirten Form von (c, b, a) durch Vertauschung der äusseren Coëfficienten hervor.

Geht man von irgend einer reducirten Form f aus, bestimmt ihre nach rechts benachbarte reducirte Form f_1 , hierauf wieder die nach rechts benachbarte reducirte Form f_2 von f_1 , dann die nach rechts benachbarte reducirte Form f_3 von f_2 und fährt so fort, so ergibt sich eine beliebig weit fortsetzbare Reihe von Formen

$$f, f_1, f_2, f_3, \dots,$$

welche die Formenreihe der Form f genannt wird. Setzt man diese Reihe so weit fort, dass die Anzahl ihrer Glieder die Anzahl aller reducirten Formen übersteigt, so muss sich wenigstens eine Form wiederholen haben. Die erste sich wiederholende Form f_n kann nur f sein, da sich sonst f_{n-1} als nach links benachbarte reducirte Form von f_n auch schon wiederholt haben müsste. Von f_n an wiederholen sich dann alle Formen in derselben Reihenfolge, so dass allgemein $f_\mu = f_\nu$ ist, wenn $\mu = \nu \pmod{n}$. Man nennt den Inbegriff der Formen

$$f, f_1, f_2, \dots, f_{n-1},$$

welche alle unter einander verschieden sind, eine Periode, und zwar die Periode der Form f . Die Anzahl der Formen einer Periode ist immer gerade, da die ersten Coëfficienten der Formen f, f_1, f_2, \dots abwechselnde Vorzeichen haben. Jede der Formen f, f_1, f_2, \dots hat dieselbe Periode, wenn man von der Reihenfolge absieht.

Alle reducirten Formen einer positiven Determinante bilden eine oder mehrere getrennte Perioden.

Man gehe von irgend einer reducirten Form aus und stelle ihre Periode P auf. Umfasst dieselbe noch nicht alle reducirten Formen, so stelle man wieder die Periode Q irgend einer nicht in P enthaltenen reducirten Form auf. Die Perioden P, Q haben dann keine Form gemein und können entweder alle reducirten Formen umfassen oder nicht. Im zweiten Falle würde man eine dritte Periode aufstellen und so fortfahren, bis alle reducirten Formen erschöpft sind.

3.

Alle Formen einer Periode sind untereinander äquivalent, da je zwei benachbarte reducirte Formen es sind.

Umgekehrt gehören zwei äquivalente reducirte Formen immer derselben Periode an.

Der Beweis dieses Satzes soll hier mittelst folgender Hilfsätze geführt werden.

I. Wenn zwei Formen $(a, b, -c)$ und $(a', b', -c')$ mit positiven ersten und negativen dritten Coëfficienten äquivalent sind und die erste durch die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

in die zweite übergeht, so ist das Product $\alpha\delta$ immer positiv.

Multiplicirt man die zweite und dritte Transformationsgleichung

$$\begin{aligned} b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) - c\gamma\delta \\ -c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta - c\delta^2 \end{aligned}$$

beziehungsweise mit β , $-\alpha$ und addirt, so ergibt sich der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zufolge

$$b'\beta + c'\alpha = c\delta - b\beta. \quad (1)$$

Anderseits lässt sich die dritte Transformationsgleichung in der Gestalt

$$2(c\delta - b\beta)\delta = c' + a\beta^2 + c\delta^2 \quad (2)$$

schreiben. Da aber auch $(a', b', -c')$ durch die reciproke Substitution

$$x' = \delta x - \beta y, \quad y' = -\gamma x + \alpha y$$

in $(a, b, -c)$ übergeht, so lässt sich der auf diese Substitution sich beziehenden dritten Transformationsgleichung

$$-c = a'\beta^2 - 2b'\beta\alpha - c'\alpha^2$$

in ähnlicher Weise die Gestalt

$$2(c'\alpha + b'\beta)\alpha = c + a'\beta^2 + c'\alpha^2 \quad (3)$$

geben.

Durch Multiplication der Gleichungen (2), (3) ergibt sich

$$4(c\delta - b\beta)(b'\beta + c'\alpha)\alpha\delta = (c' + a\beta^2 + c\delta^2)(c + a'\beta^2 + c'\alpha^2)$$

und es wird nach (1)

$$4(c\delta - b\beta)^2\alpha\delta = (c' + a\beta^2 + c\delta^2)(c + a'\beta^2 + c'\alpha^2) > 0.$$

Hieraus folgt aber

$$\alpha\delta > 0.$$

II. Es sei

$$f_0 = (a_0, b_0, -a_1)$$

eine reducirte Form mit positivem ersten Coëfficienten,

$$f_{i-1} = ((-1)^{i-1}a_{i-1}, b_{i-1}, (-1)^ia_i)$$

die i te Form in der Formenreihe von f_0 , h_i die ganze positive Zahl

$$h_i = \frac{b_i + b_{i+1}}{a_{i+1}}.$$

und A_i, B_i Zähler und Nenner des i ten Näherungswerthes des regelmässigen Kettenbruches

$$(h_0, h_1, h_2, \dots).$$

Bezeichnet man die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

ohne Rücksicht auf die Unbestimmten x, y, x', y' mit $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ und setzt zur Abkürzung

$$S_m = ((-1)^m B_{m-1}, B_m; (-1)^m A_{m-1}, A_m),$$

so haben die Substitutionen

$$\hat{S}_0, S_1, S_2, S_3, \dots$$

folgende Eigenschaften.

Die Substitution S_m verwandelt f_0 in f_m und hat die Determinante 1.

Jede Substitution :

$$\mathfrak{S} = (\alpha, \beta; \gamma, \delta)$$

von der Determinante 1, welche keinen negativen Coëfficienten enthält und f_0 in eine reducirte Form

$$F = (A, B, -A')$$

mit positivem ersten Coëfficienten verwandelt, muss mit einer der Substitutionen S_0, S_2, S_4, \dots von geradem Stellenzeiger zusammenfallen.

Wird in üblicher Weise

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0, & B_{-1} &= 1, \\ A_0 &= 1, & B_0 &= 0 \end{aligned}$$

gesetzt, so verwandelt die Substitution

$$S_0 = (1, 0; 0, 1)$$

in der That f_0 in f_0 . Es genügt daher noch darzuthun, dass S_{m+1} die Form f_0 in f_{m+1} verwandelt, wenn S_m dieselbe in f_m überführt.

Da f_m in f_{m+1} durch die Substitution

$$(0, (-1)^m; (-1)^{m+1}, h_m)$$

übergeht, so verwandelt die zusammengesetzte Substitution

$$\begin{aligned} S_m(0, (-1)^m; (-1)^{m+1}, h_m) = \\ = ((-1)^{m+1} B_m, B_{m-1} + h_m B_m; (-1)^{m+1} A_m, A_{m-1} + h_m A_m) \end{aligned}$$

f_0 in f_{m+1} ; diese zusammengesetzte Substitution fällt aber den Gleichungen

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= h_m A_m + A_{m-1} \\ B_{m+1} &= h_m B_m + B_{m-1} \end{aligned}$$

zufolge mit S_{m+1} zusammen.

Hieraus folgt zugleich, dass die Determinante von S_{m+1} mit der von S_m und daher die Determinanten aller Substitutionen S_1, S_2, S_3, \dots mit der von S_0 zusammenfallen, welche $= 1$ ist.

Versteht man unter S_m^{-1} die reciproke Substitution von S_m und setzt

$$\begin{aligned} S_m^{-1} \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_m \\ \mathfrak{S}_{2m} &= (\alpha_m, \beta_m; \gamma_m, \delta_m), \end{aligned}$$

so verwandelt \mathfrak{S}_m die Form f_m in F und es wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2m-1} &= (-\gamma_m, -\delta_m; \alpha_{m-1}, \beta_{m-1}) \\ \gamma_m &= \gamma B_{2m-1} - \alpha A_{2m-1} \\ \alpha_m &= \alpha A_{2m} - \gamma B_{2m}. \end{aligned} \tag{4}$$

Da \mathfrak{S}_{2m} die Form f_{2m} in F verwandelt und die ersten Coëfficienten dieser Formen positiv, die dritten negativ sind, so ist $\alpha_m \delta_m$ nach I positiv. Aus demselben Grunde ist $\alpha_m \delta_{m+1}$ positiv, weil \mathfrak{S}_{2m+1} die Form

$$f_{2m+1} = (-a_{2m+1}, b_{2m+1}, a_{2m+2})$$

in F , also die Substitution

$$(0, 1; -1, 0) \mathfrak{S}_{2m+1} = (\alpha_m, \beta_m; \gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$$

die Form $(a_{2m+2}, -b_{2m+1}, -a_{2m+1})$ in F verwandelt. Die Zahlen

$$\alpha_0, \delta_0, \alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2, \dots$$

sind also alle von Null verschieden und besitzen dasselbe Vorzeichen, und zwar das positive, weil $\alpha_0 = \alpha$ positiv ist.

Hieraus folgt, dass die Differenz $\gamma_m - \gamma_{m+1}$, welche nach (4), (5) die Gestalt

$$\begin{aligned} (A_{2m+1} - A_{2m-1})\alpha - (B_{2m+1} - B_{2m-1})\gamma &= \\ &= h_{2m}(A_{2m}\alpha - B_{2m}\gamma) = h_{2m}x_m \end{aligned}$$

annimmt, positiv ist. Man hat also

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots$$

Da überdies $\gamma_0 = \gamma$ nach der Annahme nicht negativ ist, so gibt es in der Zahlenreihe

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$$

eine letzte nicht negative Zahl γ_λ .

Das Product $\gamma_{\lambda+1}\beta_\lambda\gamma_\lambda$ ist dann sowohl in der Gestalt $\gamma_{\lambda+1}(\alpha_\lambda\delta_\lambda - 1)$, als auch in der Gestalt $\gamma_\lambda(\alpha_\lambda\delta_{\lambda+1} - 1)$ darstellbar und kann daher weder positiv noch negativ sein, weil einerseits $\gamma_{\lambda+1}$ negativ und $\alpha_\lambda\delta_\lambda - 1$ nicht negativ, und andererseits weder γ_λ noch $\alpha_\lambda\delta_{\lambda+1} - 1$ negativ ist. Es muss also $\gamma_{\lambda+1}\beta_\lambda\gamma_\lambda$ und daher auch $\beta_\lambda\gamma_\lambda = 0$ sein.

Dann muss aber

$$\beta_\lambda = \gamma_\lambda = 0, \quad \alpha_\lambda = \delta_\lambda = 1$$

sein. Denn es ist $\alpha_\lambda\delta_\lambda = 1$, also $\alpha_\lambda = \delta_\lambda = 1$ und die zweite Transformationsgleichung, welche sich auf die Umwandlung von $f_{2\lambda}$ durch $\mathfrak{S}_{2\lambda}$ in F bezieht, lautet:

$$\begin{aligned} B &= a_{2\lambda}\alpha_\lambda\beta_\lambda + b_{2\lambda}(\alpha_\lambda\delta_\lambda + \beta_\lambda\gamma_\lambda) - a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda\delta_\lambda \\ &= a_{2\lambda}\beta_\lambda + b_{2\lambda} - a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda, \end{aligned}$$

oder

$$d - b_{2\lambda} - (d - B) = a_{2\lambda}\beta_\lambda - a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda.$$

Da nun $\beta_\lambda\gamma_\lambda = 0$ ist, so muss entweder $\beta_\lambda = 0$ oder $\gamma_\lambda = 0$ sein. Ist $\beta_\lambda = 0$, so wird

$$\begin{aligned} A' &= a_{2\lambda+1}, \\ d - b_{2\lambda} - (d - B) &= -a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda; \end{aligned}$$

weil aber die Zahlen $d - b_{2\lambda}$, $d - B$ beide nicht negativ und kleiner als $a_{2\lambda+1}$ oder A' sind, so kann ihre Differenz nur durch $a_{2\lambda+1}$ theilbar sein, wenn sie $= 0$ ist, und es muss also $\gamma_\lambda = 0$ sein. Ist $\gamma_\lambda = 0$, so folgt ähnlich

$$A = a_{2\lambda} \\ d - b_{2\lambda} - (d - B) = a_{2\lambda} \beta_\lambda = 0,$$

weil die Zahlen $d - b_{2\lambda}$, $d - B$ beide nicht negativ und kleiner als $a_{2\lambda}$ oder A sind und ihre Differenz durch A theilbar ist, und es muss $\beta_\lambda = 0$ sein.

Wenn aber die Substitution $\mathfrak{S}_{2\lambda} = S_{2\lambda}^{-1} \mathfrak{S}$ mit $(1, 0; 0, 1)$ zusammenfällt, so ist

$$\mathfrak{S} = S_{2\lambda}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$F = f_{2\lambda}$$

und die Form F ist also eine der Formen der Periode von f_0 .

Insbesondere sind alle Substitutionen \mathfrak{S} , welche keinen negativen Coëfficienten enthalten und eine reducirte Form f_0 mit positivem ersten Coëfficienten in sich selbst verwandeln, durch die Formel

$$\mathfrak{S} = S_{kn} = (B_{kn-1}, B_{kn}; A_{kn-1}, A_{kn})$$

gegeben, wo n die Anzahl der Formen der Periode von f_0 bezeichnet und k alle Werthe $0, 1, 2, 3, \dots$ annehmen kann. Denn eine solche Substitution verwandelt f_0 in eine reducirte Form f_0 mit positivem ersten Coëfficienten und es muss daher $\mathfrak{S} = S_{2\lambda}$ sein. Ist aber ρ der echte Rest von 2λ in Bezug auf den Modul n , so verwandelt $S_{2\lambda}$ die Form f_0 in $f_{2\lambda} = f_\rho$ und es muss also $\rho = 0$, $2\lambda = kn$ sein.

Dies vorausgeschickt, seien irgend zwei äquivalente reducirte Formen f und F gegeben und es gehe f in F durch die Substitution $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ über. Um darzuthun, dass diese Formen derselben Periode angehören, darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass dieselben positive erste Coëfficienten besitzen, da man andernfalls, ohne an dem Inhalte des zu beweisenden Satzes etwas zu ändern, f oder F , oder f und F

durch ihre benachbarten reducirten Formen ersetzen könnte. Das Product $\alpha\delta$ ist dann positiv und man darf α, δ positiv annehmen, da im Falle eines negativen α und δ die Substitution $(-\alpha, -\beta; -\gamma, -\delta)$ ebenfalls f in F verwandelt.

Ist nun keine der Zahlen β, γ negativ, so enthält die Substitution $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ keinen negativen Coëfficienten und es muss daher F nach II mit einer Form der Periode von f zusammenfallen.

Ist dagegen eine der Zahlen β, γ negativ, so kann die andere, der Gleichung $\beta\gamma = \alpha\delta - 1$ zufolge, nicht positiv sein und die reciproke Substitution $(\delta, -\beta; -\gamma, \alpha)$ enthält keinen negativen Coëfficienten. Da dieselbe F in f verwandelt, so muss f nach II in der Periode von F vorkommen.

Über den quadratischen Reciprocitätssatz und die Summen von Gauss

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

1.

Bezeichnet p eine ungerade Primzahl, a eine nicht durch p theilbare Zahl und μ die Anzahl derjenigen echten, d. h. nicht negativen und p nicht erreichenden Reste der Zahlen

$$a, 2a, 3a, \dots, \frac{p-1}{2}a$$

in Bezug auf den Modul p , welche $> \frac{1}{2}p$ sind, so besteht der Hilfssatz, welchen Gauss¹ zum Beweise des quadratischen Reciprocitätssatzes aufgestellt hat, bekanntlich in der Gleichung

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu.$$

Ein Hilfssatz von gleicher Verwendbarkeit ist der folgende.
Sind

$$r_a, r_{2a}, r_{3a}, \dots, r_{(p-1)a}$$

die echten Reste der Zahlen

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$$

in Bezug auf den Modul p und $\Pi(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ das Differenzenproduct

¹ Theorematis arithmetici demonstratio nova 1808.

$$\begin{array}{c}
 (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_{p-1} - x_1) \\
 (x_3 - x_2) \dots (x_{p-1} - x_2) \\
 \dots \dots \dots \\
 (x_{p-1} - x_{p-2}),
 \end{array}$$

so ist

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \frac{\Pi(r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a})}{\Pi(1, 2, \dots, p-1)}. \quad (1)$$

Um diesen Satz zu beweisen, ist zunächst zu bemerken, dass die Zahlen $r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a}$ bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ zusammenfallen und die Producte

$$\Pi(r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a}), \quad \Pi(1, 2, \dots, p-1)$$

demzufolge sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden können. Es ist also

$$\frac{\Pi(r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a})}{\Pi(1, 2, \dots, p-1)} = \epsilon, \quad (2)$$

wo ϵ den Werth $+1$ oder -1 hat.

Anderseits ist den Congruenzen

$$\begin{array}{l}
 r_a \equiv a \\
 r_{2a} \equiv 2a \\
 \dots \dots \dots \\
 r_{(p-1)a} \equiv (p-1)a \pmod{p}
 \end{array}$$

zufolge

$$\Pi(r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a}) \equiv \Pi(a, 2a, \dots, (p-1)a) \pmod{p};$$

es ist aber

$$\begin{aligned}
 \Pi(a, 2a, \dots, (p-1)a) &= a^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Pi(1, 2, \dots, p-1) \\
 a^p &\equiv a \pmod{p}
 \end{aligned}$$

also

$$a^{\frac{1}{2}p(p-1)} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$$

und

$$\Pi(a, 2a, \dots, (p-1)a) \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \Pi(1, 2, \dots, p-1) \pmod{p}.$$

Man hat demnach

$$\Pi(r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a}) \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \Pi(1, 2, \dots, p-1) \pmod{p}.$$

Nach (2) folgt hieraus

$$\Pi(1, 2, \dots, p-1) \left(\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right) \right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da aber $\Pi(1, 2, \dots, p-1)$ nicht durch p theilbar ist, so muss

$$\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

und daher

$$\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right) = 0$$

sein, weil $\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right)$ ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $< p$ ist.

Man kann die Gleichung (1) auch so aussprechen:

Ist ν die Anzahl der negativen Factoren des Productes $\Pi(r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a})$, so ist

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\nu.$$

Die Substitution (Permutation) $\begin{pmatrix} r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a} \\ 1, 2, \dots, p-1 \end{pmatrix}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$ oder $= -1$ ist.

2.

Bezeichnet a eine positive Zahl und $E(y)$ die grösste in y enthaltene ganze Zahl, so ist

$$r_{ma} = ma - pE\left(\frac{ma}{p}\right).$$

Ist daher $m > n$, so wird

$$r_{ma} = ma - pE\left(\frac{ma}{p}\right)$$

$$r_{na} = na - pE\left(\frac{na}{p}\right)$$

$$r_{(m-n)a} = (m-n)a - pE\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$$

und man hat

$$r_{ma} - r_{na} = r_{(m-n)a} - p\left(E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)\right).$$

Hienach hat der Ausdruck

$$E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$$

den Werth 0 oder 1, je nachdem die Differenz $r_{ma} - r_{na}$ positiv oder negativ ist, und die Anzahl ν aller negativen Factoren des Productes $\Pi(r_a, r_{2a}, \dots, r_{(p-1)a})$ ist die Summe der Ausdrücke

$$E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right), \quad (3)$$

welche allen Zahlenpaaren m, n entsprechen, die sich aus den Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ bilden lassen und in denen $m > n$ ist.

Da die Zahl $E\left(\frac{ma}{p}\right)$ die Grenze $a-1$ nicht überschreitet, wenn $m < p$ ist, so kann dieselbe in bekannter Weise als Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$(p-ma)(2p-ma) \dots ((a-1)p-ma) = \Pi(sp-ma)$$

aufgefasst werden, wo s von 1 bis $a-1$ läuft. Ähnliches gilt von $E\left(\frac{na}{p}\right)$ und $E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$. Der Ausdruck (3) ist demnach bis auf ein Vielfaches von 2 die Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$\Pi(sp-ma) \cdot \Pi(sp-na) \cdot \Pi(sp-(m-n)a)$$

und ν fällt demzufolge bis auf ein Vielfaches von 2 mit der Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$\Pi(sp-2a)^1 \cdot \Pi(sp-3a)^2 \dots \Pi(sp-(p-1)a)^{p-2} \\ \times \Pi(sp-a)^{2(p-2)} \cdot \Pi(sp-2a)^{2(p-3)} \dots \Pi(sp-(p-2)a)^2$$

zusammen.

Das Vorzeichen des Legendre'schen Symbols $\left(\frac{a}{p}\right)$ stimmt also mit dem Vorzeichen des Productes

$$\Pi(sp-2a) \cdot \Pi(sp-4a) \dots \Pi(sp-(p-1)a)$$

oder des Productes

$$\Pi(sp-2ta)$$

überein, in welchem s von 1 bis $a-1$ und t von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ laufen.

Setzt man $a=2$, so fällt das Vorzeichen von $\left(\frac{2}{p}\right)$ mit dem des Productes

$$(p-4)(p-8) \dots \left(p-4 \cdot \frac{p-1}{2}\right)$$

zusammen. Dieses Product hat $\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right)$ negative Factoren. Da aber

$$\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p - (-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4} \\ 1 \equiv \frac{p + (-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2} \pmod{2}$$

ist, so ergibt sich durch Multiplication

$$\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right) \equiv \frac{1}{8} (p^2-1) \pmod{2}$$

und es wird

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Ist q eine von p verschiedene ungerade Primzahl und trennt man die Factoren des Productes $\Pi(sp-2tq)$, in welchen s gerade ist, von denen, in welchen s ungerade ist, indem man, einmal $s = 2u$, einmal $s = q-2u$, setzt, so ergibt sich

$$\Pi(sp-2tq) = \Pi(2up-2tq) \cdot \Pi(pq-2up-2tq),$$

wo t die Werthe $1, 2, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$ und u die Werthe $1, 2, \dots, \frac{1}{2}(q-1)$ durchläuft, und das Vorzeichen von $\left(\frac{q}{p}\right)$ fällt mit dem des Productes

$$\Pi(2up-2tq) \cdot \Pi(pq-2up-2tq)$$

zusammen.

Vertauscht man p mit q , so stimmt das Vorzeichen von $\left(\frac{p}{q}\right)$ mit dem des Productes

$$\Pi(2tq-2up) \cdot \Pi(pq-2tq-2up)$$

überein, in welchem t und u dieselben Werthe durchlaufen,

Das Product $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$ hat daher das Vorzeichen des Productes

$$\begin{aligned} & \Pi(2np-2tq) \cdot \Pi(2tq-2up) \cdot \Pi(pq-2tq-2up)^2 \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \cdot \Pi(2up-2tq)^2 \Pi(pq-2tq-2up)^2, \end{aligned}$$

und es wird

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}.$$

3.

Es seien x, z Veränderliche und man setze

$$\begin{aligned} (z-x)(z-x^2) \dots (z-x^{p-1}) - (1+z+z^2+\dots+z^{p-1}) &= F(x) \\ 1+x+x^2+\dots+x^{p-1} &= X. \end{aligned}$$

Wird der Rest, welcher bei der Division einer ganzen Function φ von x durch eine andere, f , bleibt und den Grad von f in x nicht erreicht, als echter Rest von φ in Bezug auf f

und eine durch f theilbare ganze Function von x kurz mit $[f]$ bezeichnet, so ist der echte Rest von $F(x)$ in Bezug auf X bekanntlich $= 0$.

Ist nämlich m eine der Zahlen $1, 2, \dots, p-1$, so stimmen die echten Reste

$$\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$$

der Zahlen

$$m, 2m, \dots, (p-1)m$$

bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ überein und es ist

$$\begin{aligned} x^m &= x^\alpha + [x^p - 1] \\ x^{2m} &= x^\beta + [x^p - 1] \\ &\dots \dots \dots \\ x^{(p-1)m} &= x^\varepsilon + [x^{p-1} - 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Hieraus folgt

$$F(x^m) = F(x) + [x^p - 1] \quad (5)$$

Ist nun

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1}$$

der echte Rest von $F(x)$ in Bezug auf $x^p - 1$, so hat man

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + [x^p - 1] \quad (6)$$

und daher

$$F(x^m) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \dots + a_{p-1} x^{(p-1)m} + [x^{mp} - 1].$$

Nach (4), (5) ist also auch

$$F(x) = a_0 + a_1 x^\alpha + a_2 x^\beta + \dots + a_\varepsilon x^\varepsilon + [x^p - 1]. \quad (7)$$

Zieht man die Identität (7) von (6) ab, so ergibt sich

$$(a_\alpha - a_1)x^\alpha + (a_\beta - a_2)x^\beta + \dots + (a_\varepsilon - a_{p-1})x^\varepsilon = [x^p - 1]$$

und hieraus

$$a_\alpha - a_1 = a_\beta - a_2 = \dots = a_\varepsilon - a_{p-1} = 0.$$

Insbesondere ist also für jedes m

$$a_\alpha = a_m = a_1$$

Da ferner

$$\begin{aligned} P_m &= (-x)(1-x^{p-1})(-x^2)(1-x^{p-2}) \dots (-x^m)(1-x^{p-m}) + [X] \\ &= (-1)^m x^{\frac{1}{2}m(m+1)} (1-x^{p-1})(1-x^{p-2}) \dots (1-x^{p-m}) + [X] \end{aligned}$$

ist, so wird nach (8)

$$\begin{aligned} P_m P_{p-1-m} &= (-1)^m x^{\frac{1}{2}m(m+1)} P_{p-1} + [X] \\ &= (-1)^m p x^{\frac{1}{2}m(m+1)} + [X] \end{aligned} \quad (9)$$

und man hat

$$\begin{aligned} P_1 P_2 \dots P_{p-2} &= P_1 P_{p-2} \cdot P_2 P_{p-3} \dots P_{\frac{p-3}{2}} P_{\frac{p+1}{2}} \cdot P_{\frac{p-1}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} p^{\frac{p-3}{2}} x^{\frac{1}{48}(p^2-1)(p-3)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X]. \end{aligned}$$

Überdies ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p-1)(p-2) + \frac{1}{8}(p-1)(p-3) &\equiv \frac{1}{2}(p-1) + \\ &+ \frac{1}{8}(p-1)(p-3) \pmod{2} \\ &\equiv \frac{1}{8}(p^2-1) \pmod{2} \\ \frac{1}{6}p(p-1)(p-2) + \frac{1}{48}(p^2-1)(p-3) &= \frac{(p-1)(p^2-1)}{16} + \\ &+ \frac{(p-1)(p-3)}{8} \cdot p \\ &\equiv \frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{1}{8}(p^2-1) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Es wird also

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} x^{\frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{1}{8}(p^2-1)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X]. \quad (10)$$

Aus (9) folgt dann

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= p^{p-3} x^{(p-1) \cdot \frac{1}{8} (p^2-1)} P^{\frac{p-1}{2}} + [X] \\ &= (-1)^{\frac{(p-1)}{2}} p^{p-2} + [X]. \end{aligned} \quad (11)$$

Ferner ist, wenn m eine nicht durch p theilbare Zahl bezeichnet,

$$\begin{aligned} f(x^m) &= \Pi(x^m, x^{2m}, \dots x^{(p-1)m}) \\ &= \Pi(x^\alpha, x^\beta, \dots x^\varepsilon) + [X], \end{aligned}$$

wo $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ die echten Reste von $m, 2m, \dots (p-1)m$ in Bezug auf p bedeuten.

Es ist aber nach 1

$$\Pi(x^\alpha, x^\beta, \dots x^\varepsilon) = \left(\frac{m}{p}\right) \Pi(x, x^2, \dots x^{p-1})$$

und sonach

$$f(x^m) = \left(\frac{m}{p}\right) f(x) + [X]. \quad (12)$$

5.

Mit Hilfe der Function $f(x)$ lässt sich der quadratische Reciprocitätssatz ähnlich wie bei Gauss beweisen.

Man hat

$$f(x)^q - f(x^q) = qG,$$

wo G in x ganz und ganzzahlig ist. Nach (12) folgt hieraus

$$f(x)^q - \left(\frac{q}{p}\right) f(x) = qG + [X].$$

Wird mit $(-1)^{\frac{p-1}{2}} f(x)$ multiplicirt, so ergibt sich

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} f^2(x) \left(f(x)^{2 \cdot \frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right) \right) = \pm qfG + [X],$$

welche Identität nach (11) die Form

$$p^{p-2} \left((-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} p^{\frac{1}{2} (q-1)(p-2)} - \left(\frac{q}{p}\right) \right) = \pm qfG + [X]$$

annimmt. Da hienach der echte Rest der Zahl

$$p^{p-2} \left((-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} p^{\frac{1}{2} (q-1)(p-2)} - \left(\frac{q}{p} \right) \right)$$

in Bezug auf X durch q theilbar ist, so gilt dasselbe von dieser Zahl selbst. Dann ist aber auch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} p^{\frac{1}{2} (q-1)(p-2)} - \left(\frac{q}{p} \right) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Da ferner

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{p}{q} \right) \pmod{q},$$

also

$$p^{\frac{1}{2} (q-1)(p-2)} \equiv \left(\frac{p}{q} \right)^{p-2} - \left(\frac{p}{q} \right) \pmod{q}$$

ist, so wird

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q} \right) - \left(\frac{q}{p} \right) \equiv 0 \pmod{q}$$

und daher auch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q} \right) - \left(\frac{q}{p} \right) = 0.$$

6.

Man kann aber auch die Summen von Gauss mit Hilfe der Function $f(x)$ ermitteln.

Ist

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

der echte Rest der Function

$$x^{\frac{1}{2} (p-1)} \frac{1}{8} (p^2 + 1) P_{\frac{p-1}{2}}$$

in Bezug auf X , so wird

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots = (b_1 - b_0) x + (b_2 - b_0) x^2 + \dots + b_0 X$$

und $f(x)$ nimmt nach (10) die Gestalt

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} (c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{p-1} x^{p-1}) + [X]$$

an. Ersetzt man x durch x^m , wo m eine der Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ ist, und bezeichnet die echten Reste der Zahlen

$$m, 2m, \dots, (p-1)m$$

in Bezug auf den Modul p mit

$$\alpha, \beta, \dots, \varepsilon,$$

so ergibt sich

$$1 + x^m + x^{2m} + \dots + x^{(p-1)m} = 1 + x^\alpha + x^\beta + \dots + x^\varepsilon + [X] \\ = [X]$$

$$c_1 x^m + c_2 x^{2m} + \dots + c_{p-1} x^{(p-1)m} = c_1 x^\alpha + c_2 x^\beta + \dots + c_{p-1} x^\varepsilon + [X]$$

und demzufolge

$$f(x^m) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} (c_1 x^\alpha + c_2 x^\beta + \dots + c_{p-1} x^\varepsilon) + [X].$$

Zieht man von dieser Identität die Identität

$$\left(\frac{m}{p}\right) f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \left(\left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha x^\alpha + \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta x^\beta + \dots \right) + [X]$$

ab, so ergibt sich nach (12)

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \left(\left(c_1 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha \right) x^\alpha + \left(c_2 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta \right) x^\beta + \dots \right) = [X] \\ = [X].$$

Es ist also auch

$$\left(c_1 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha \right) x^{\alpha-1} + \left(c_2 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta \right) x^{\beta-1} + \dots = [X].$$

Hieraus folgt aber

$$c_1 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha = c_2 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta = \dots = 0.$$

Insbesondere ist

$$\left(\frac{m}{p}\right)c_a = \left(\frac{m}{p}\right)c_m = c_1$$

oder für jedes m

$$c_m = \left(\frac{m}{p}\right)c_1.$$

Setzt man also

$$\left(\frac{1}{p}\right)x + \left(\frac{2}{p}\right)x^2 + \dots + \left(\frac{p-1}{p}\right)x^{p-1} = \omega(x),$$

so wird

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} c_1 \omega(x) + [X]. \quad (13)$$

Um c_1 zu bestimmen, entwickle man $\omega(x)$ nach Potenzen von $x-1$. Man hat

$$\begin{aligned} \omega(x) = \omega(1) + \frac{\omega'(1)}{1!} (x-1) + \frac{\omega''(1)}{2!} (x-1)^2 + \dots \\ + \frac{\omega^{(p-1)}(1)}{(p-1)!} (x-1)^{p-1}. \end{aligned}$$

Nun ist, wenn m von 1 bis $p-1$ läuft,

$$\omega(x) \equiv \sum m^{\frac{p-1}{2}} x^m \pmod{p}$$

also

$$\begin{aligned} \omega'(x) &\equiv \sum m^{\frac{p-1}{2}} m x^{m-1} \\ \omega''(x) &\equiv \sum m^{\frac{p-1}{2}} m(m-1) x^{m-2} \\ &\dots \dots \dots \\ \omega^{(\mu)}(x) &\equiv \sum m^{\frac{p-1}{2}} m(m-1) \dots (m-\mu+1) x^{m-\mu} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Man hat daher, wenn

$$1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k = s_k$$

gesetzt wird,

$$\omega(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\omega'(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\omega''(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+2} - s_{\frac{1}{2}(p-1)+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

.

Allgemein wird

$$\omega^{(\mu)}(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+\mu} + \lambda_1 s_{\frac{1}{2}(p-1)+\mu-1} + \dots + \lambda_\mu s_{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ganze Zahlen bezeichnen. Ist also $\mu < \frac{1}{2}(p-1)$, so ergibt sich

$$\omega^{(\mu)}(1) \equiv 0 \pmod{p},$$

also auch

$$\frac{\omega^{(\mu)}(1)}{\mu!} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Für $\mu = \frac{1}{2}(p-1)$ dagegen wird

$$\omega^{\frac{(p-1)}{2}}(1) \equiv s_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Multipliziert man dann die Congruenz

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \frac{\omega\left(\frac{p-1}{2}\right)(1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} \equiv -1 \pmod{p}$$

mit $-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ und beachtet, dass nach dem Wilson'schen Satze

$$-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!\left(\frac{p-1}{2}\right)! = -(p-1)! \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{\omega\left(\frac{p-1}{2}\right)(1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Es wird also

$$\omega(x) = \left(\frac{p-1}{2}\right)! (1-x)^{\frac{p-1}{2}} + a_1(1-x)^{\frac{1}{2}(p+1)} + \\ + a_2(1-x)^{\frac{1}{2}(p+3)} + \dots \pmod{p},$$

wo a_1, a_2, \dots ganze Zahlen bezeichnen.

Setzt man

$$P_{p-1} = (1-x)^{p-1} \varphi,$$

so nimmt $(1-x)^{\frac{1}{2}(p-1)} \varphi \cdot \omega(x)$ die Gestalt

$$P_{p-1} \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)! + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \dots \right) + p(1-x)^{\frac{p-1}{2}} G$$

an, wo G ganzzahlige Coëfficienten besitzt, und man kann nach (8)

$$(1-x)^{\frac{p-1}{2}} \varphi \cdot \omega(x) = p \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)! + Q(1-x) \right) + [X] \quad (14)$$

setzen, wo Q ebenfalls ganzzahlig ist.

Da ferner

$$P_{\frac{p-1}{2}} = (1-x)^{\frac{p-1}{2}} (1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+\dots+x^{\frac{p-3}{2}})$$

ist und der Ausdruck

$$x^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{8^{\frac{1}{2}(p^2-1)}} (1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+\dots+x^{\frac{p-3}{2}}) - \left(\frac{p-1}{2}\right)!$$

für $x=1$ verschwindet, so nimmt

$$x^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{8^{\frac{1}{2}(p^2-1)}} P_{\frac{p-1}{2}}$$

die Gestalt

$$(1-x)^{\frac{p-1}{2}} \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! + Q'(1-x) \right)$$

an, wo Q' eine ganze ganzzahlige Function von x bezeichnet, und man hat

$$(1-x)^{\frac{1}{2}(p-1)} \varphi f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-1)} \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! + Q'(1-x) \right) + [X] \quad (15)$$

Aus den Identitäten (13), (14), (15) folgt nun

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-1)} \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! (c_1-1) + (c_1 Q - Q')(1-x) \right) = [X].$$

Es muss also auch die Function

$$\left(\frac{p-1}{2} \right)! (c_1-1) + (c_1 Q - Q')(1-x)$$

durch X theilbar sein und man hat

$$\left(\frac{p-1}{2} \right)! (c_1-1) + (c_1 Q - Q')(1-x) = LX,$$

wo L ganzzahlig ist. Für $x=1$ wird dann

$$\left(\frac{p-1}{2} \right)! (c_1-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

und daher

$$c_1-1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (16)$$

Anderseits kann c_1 aber nur den Werth ± 1 haben. Denn aus (13) folgt

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2} + [X] \\ &= p^{p-3} c_1^2 \omega^2(x) + [X]. \end{aligned}$$

Bezeichnet daher $a + a_1 x + \dots$ den echten Rest von $\omega^2(x)$ in Bezug auf X , so wird

$$a_0 p^{p-3} c_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$$

oder

$$a_0 c_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

c_1^2 kann also als quadratischer Theiler von p nur den Werth 1 haben, und c_1 muss $= \pm 1$ sein. Dann folgt aber aus (16) $c_1 = 1$ und man hat

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \omega(x) + [X], \\ \omega(x) &= x^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{8}(p^2-1) P_{\frac{p-1}{2}} + [X]. \end{aligned} \quad (17)$$

Für $x = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ ergibt sich hieraus die Gauss'sche Formel.
Man hat

$$\begin{aligned} \omega(e^{\frac{2\pi i}{p}}) &= e^{\frac{(p-1)(p^2-1)\pi i}{8p}} (1 - e^{\frac{2\pi i}{p}})(1 - e^{\frac{4\pi i}{p}}) \dots (1 - e^{\frac{(p-1)\pi i}{p}}) \\ &= e^{\frac{(p-1)(p^2-1)\pi i}{8p}} \left(-2ie^{\frac{\pi i}{p}} \sin \frac{\pi}{p} \right) \cdot \left(-2ie^{\frac{2\pi i}{p}} \sin \frac{2\pi}{p} \right) \dots \\ &\quad \dots \left(-2ie^{\frac{(p-1)\pi i}{p}} \sin \frac{(p-1)\pi}{2p} \right) \\ &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} (-i)^{\frac{p-1}{2}} 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \dots \sin \frac{(p-1)\pi}{2p}; \end{aligned}$$

es ist aber

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} (-i)^{\frac{p-1}{2}} = i^{\frac{p^2-1}{4}} i^{\frac{p-1}{2}} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

und daher

$$\omega(e^{\frac{2\pi i}{p}}) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \dots \sin \frac{(p-1)\pi}{2p}.$$

Anderseits folgt aus (17), (11)

$$\begin{aligned} f(c^{\frac{2\pi i}{p}})^2 &= p^{p-3} \omega^2(c^{\frac{2\pi i}{p}}) \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2} \end{aligned}$$

Hienach wird

$$\begin{aligned}\omega^2(e^{\frac{2\pi i}{p}}) &= (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \left(2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \dots \sin \frac{(p-1)\pi}{2p}\right)^2 \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned}2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \dots \sin \frac{(p-1)\pi}{2p} &= \sqrt{p} \\ \omega(e^{\frac{2\pi i}{p}}) &= i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.\end{aligned}$$

Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre

von

Dr. Wilhelm Trabert,

*Docent an der Universität und Assistent der k. k. Centralanstalt für Meteorologie
in Wien.*

(Mit 2 Textfiguren.)

I. Allgemeinster Ausdruck für die Abhängigkeit des Potentialgefälles von den äusseren Massen.

So viele »Theorien« zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre auch aufgestellt worden sind, so vermochten wir bisher doch nur zu sehr wenigen sicheren Ergebnissen der Forschung zu gelangen. Es hat dies einerseits seinen Grund darin, dass überhaupt erst in neuerer Zeit — und da nur spärlich — in systematischer Weise und nach absolutem Masse Messungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche angestellt worden sind, anderseits liegt aber doch wohl auch vielfach die Ursache darin, dass man sich zur Lösung des hier vorliegenden Problems nur sehr selten und öfters auf wenig exacter Grundlage des mathematischen Calculs bediente. Gerade dieser letztere bietet aber das Mittel, das Problem vollkommen klar und präcis zu formuliren und dadurch die Fragestellung für den Physiker zu erleichtern.

In dem Vorliegenden soll der Versuch gemacht werden, die allgemeinste Darstellung einer Theorie der »Schönwetterelektricität« zu geben, soweit dies ohne specielle Annahmen geschehen kann, und damit in Form einer allgemeinen Gleichung einen Rahmen zu entwerfen, in welchen

sich jede specielle Theorie einordnen muss, solange sie den Anspruch erheben will, nicht mit den Thatfachen in Widerspruch zu stehen.

Die Beobachtungen lehren, dass wir unsere Atmosphäre jedenfalls als ein elektrisches Feld anzusehen haben. Wir messen dasselbe durch die Änderung des Potentials und speciell an der Erdoberfläche durch den Unterschied des Potentials in ein Meter Höhe gegen das überall constante Potential des Erdkörpers selbst.

Wenn wir uns erinnern, dass für jede Oberfläche eines Leiters ganz allgemein die Gleichung

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\sigma$$

gilt, in welcher $\frac{dV}{dn}$ das Potentialgefälle längs der Normalen auf die Oberfläche und σ die elektrische Dichte in dem betreffenden Punkte bedeutet, so können wir auch sagen, wir messen durch das Potentialgefälle die Dichte, welche die elektrische Ladung der Erdoberfläche in dem betreffenden Punkte besitzt. Wir brauchen nur das Potentialgefälle in den entsprechenden Einheiten auszudrücken und durch -4π zu dividieren.

Hätten wir es nur mit einer Ladung des festen Erdkörpers zu thun, so wäre die Dichte allein von der Gestalt der Erdoberfläche abhängig, wobei wir aber unter »Erdoberfläche« auch die in die Atmosphäre ragenden Theile der Oberfläche jedes mit der Erde leitend verbundenen Körpers zu verstehen haben. Es wäre dann — und die Beobachtungen bestätigen dies ja auch — die Dichte in hohem Grade abhängig von den zufälligen Erhebungen und Krümmungen, und es versteht sich ganz von selbst, dass wir, wenn wir das Problem in seiner Wesenheit auffassen wollen, von diesen Zufälligkeiten absehen müssen.

Es hat deshalb auch F. Exner die selbst heute noch leider so wenig berücksichtigte und doch so wesentliche Forderung erhoben, alle Beobachtungen über Luftelektricität entweder auf einer vollkommenen Ebene anzustellen oder doch — da dies

ja selten möglich oder doch höchst umständlich wäre — auf die Ebene durch einmalige Feststellung des Reductionsfactors zu beziehen. Ist bei dem Beobachtungsmaterial diese Bedingung erfüllt, so haben wir es mit der Gestalt der Erdoberfläche im grossen Ganzen zu thun, und da auch die Abplattung der Erde so gering ist, dass dadurch, wie die Rechnung lehrt, die Dichtenvertheilung nicht wesentlich beeinflusst wird, so können wir bei allen unseren Betrachtungen, wenn, wie gesagt, das Beobachtungsmaterial, auf welches wir uns stützen können, auf die Ebene reducirt ist, die Erdoberfläche als eine Kugeloberfläche auffassen.

Auf einer Kugel aber wäre, wenn wir es nur mit einer Ladung derselben zu thun hätten, die Dichte überall dieselbe. Die Beobachtungen beweisen, dass dies nicht der Fall ist, dass vielmehr die Dichte der elektrischen Ladung der Erdoberfläche sowohl örtlich als auch zeitlich höchst veränderlich und von der Witterung abhängig ist.

Eine systematische Bearbeitung setzt deshalb voraus — auch diese Forderung wurde zuerst von Exner erhoben — dass die Beobachtungen bei schönem Wetter zunächst von den durch Wolken gestörten Beobachtungen getrennt werden. Es versteht sich von selbst, dass zuerst die ungestörte Erscheinung, die »Schönwetter-Elektricität«, studirt werden muss.

Auch die Schönwetter-Elektricität zeigt nun aber eine örtliche und zeitliche Veränderlichkeit. Die Dichte der Ladung nimmt von den höheren Breiten gegen den Äquator hin ab, sie zeigt eine Schwankung im Laufe des Tages, sowie auch im Laufe des Jahres, und vor Allem — hierin hat ja die Abnahme gegen den Äquator ihren Grund — sie nimmt ab mit dem zunehmenden Dampfgehalte der Luft und, wie Elster und Geitel neuerdings gezeigt haben, mit der Zunahme der ultravioletten Strahlung.

Es folgt aus dieser örtlichen und zeitlichen Verschiedenheit des Potentialgefälles an der Erdoberfläche oder, wie wir ja auch sagen können, der elektrischen Dichtigkeit, dass wir es ausser der Erdladung noch mit anderen Ladungen zu thun haben, welche influenzierend auf den Erdkörper wirken und dadurch die örtliche und zeitliche Verschiedenheit der Dichte

an der Erdoberfläche hervorbringen, und es ist die Hauptfrage in dem Problem, das die atmosphärische Elektrizität darbietet, welches ist der Sitz dieser die jeweilige elektrische Dichte eines Punktes der Erdoberfläche bestimmenden Massen?

Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, dass die Beantwortung dieser Frage wesentlich erleichtert oder doch ein Anhaltspunkt für die weitere Fragestellung gewonnen wird, wenn man den Einfluss äusserer elektrischer Massen in seiner allgemeinsten Form ermittelt, d. h. durch eine ganz allgemeine Formel den Zusammenhang zwischen der Dichte in jedem Punkte der Erdoberfläche und dem Potential der äusseren, influenzierend wirkenden Massen aufstellt. Da thatsächlich die Dichte durch das Potential dieser Massen eindeutig bestimmt ist, so bietet die Aufstellung einer solchen Formel keine Schwierigkeit.

Die allgemeinste Annahme, welche wir machen können, ist offenbar die, dass erstlich die Erde selbst mit einer gewissen Elektrizität E geladen sei und dass sie zweitens unter dem Einflusse irgendwelcher elektrischer Massen stehe, deren Potential in irgend einem Punkte wir ganz allgemein mit W bezeichnen wollen, von welchen wir es aber vorläufig unentschieden lassen wollen, ob sie ihren Sitz im Weltraum oder im Innern der Atmosphäre haben. Es wird, wenn wir die allgemeinste Formel entwickelt haben und wenn wir dieselbe den Beobachtungsthatfachen gegenüberstellen, sich dann schon von selbst ergeben, inwieweit die allgemeine Annahme modificirt werden muss, wenn sie nicht den Beobachtungen widerstreiten soll.

Wir bezeichnen die Dichte, welche in einem bestimmten Punkte der Erdoberfläche, die wir als Kugel auffassen, herrscht, mit σ und stellen uns die Aufgabe, diese Grösse auszudrücken durch die Ladung E der Erde und das Potential der äusseren elektrischen Massen. Auch die auf der Erdoberfläche ausgebreiteten elektrischen Massen werden für sich ein Potential haben, und wir nennen dieses U .

Ist dO ein Oberflächenelement der Erde an der Stelle, an welcher die Dichte σ herrscht, und ist u die Distanz des Oberflächenelementes von einem Punkte, für welchen wir das

Potential der Erdladung für sich berechnen wollen, so ist für diesen Punkt:

$$U = \int \frac{\sigma dO}{u},$$

wobei das Integral über die ganze Erdoberfläche auszu-dehnen ist.

Wenn für eben diesen Punkt das Potential der äusseren elektrischen Massen W heisst, dann ist das Gesamtpotential V , das hier herrscht, das sich also zusammensetzt aus dem Potential der Erdladung für sich (U) und dem Potential der äusseren Massen für sich (W), gegeben durch den Ausdruck

$$V = U + W.$$

Wir nennen für einen Punkt im Innern der Erdkugel diese Grössen V_i , U_i und W_i ; für einen äusseren Punkt V_e , U_e und W_e ; für einen Punkt der Erdoberfläche, deren Radius wir a nennen wollen, V_a , U_a und W_a und endlich für den Erdmittelpunkt V_0 , U_0 und W_0 .

Nachdem wir diese Bezeichnungen ein für allemal festgesetzt haben, können wir darangehen, einen geeigneten Ausdruck für σ zu gewinnen.

Für eine Kugeloberfläche gilt ganz allgemein, welches auch das Potential der äusseren wirkenden Massen sein möge,

$$4\pi\sigma = \frac{U_a}{a} + 2\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a} \quad 1)$$

(Es möge, da diese Gleichung auch dem Physiker nicht immer geläufig sein wird, gestattet sein, ihre Ableitung hier kurz anzudeuten.)

Wenn wir den Radius der Erdkugel mit a bezeichnen und die Distanz des Punktes, für welchen wir das Potential ins Auge gefasst haben, vom Erdmittelpunkte r nennen, und wenn der Winkel, welchen die beiden Radien a und r einschliessen, θ heisst, dann ist

$$u = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}.$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichung für U ein, so haben wir

$$U = \int \frac{\sigma dO}{a \sqrt{1 - \frac{2r}{a} \cos \theta + \frac{r^2}{a^2}}} \quad \text{oder} \quad = \int \frac{\sigma dO}{r \sqrt{1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}}}$$

Den ersten Ausdruck werden wir anwenden für innere Punkte ($r < a$), den zweiten Ausdruck für äussere Punkte ($r > a$).

Wir können beide Ausdrücke nach Kugelfunctionen entwickeln und erhalten dann für den ersten Ausdruck

$$\frac{1}{a} \int \sigma dO \left\{ P_0 + \frac{r}{a} P_1 + \frac{r^2}{a^2} P_2 + \dots \right\}$$

und für den zweiten Ausdruck

$$\frac{1}{r} \int \sigma dO \left\{ P_0 + \frac{a}{r} P_1 + \frac{a^2}{r^2} P_2 + \dots \right\}.$$

Nennen wir ganz allgemein den Ausdruck

$$\int \sigma dO \{ P_0 + x P_1 + x^2 P_2 + \dots \}$$

kurz $f(x)$, dann können wir auch schreiben

$$U_i = \frac{1}{a} f\left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{und} \quad U_e = \frac{1}{r} f\left(\frac{a}{r}\right).$$

Für $r = a$ gehen beide Ausdrücke in einander über

$$U_a = \frac{1}{a} f(1).$$

Nun gilt bekanntlich ganz allgemein für die Oberfläche eines Leiters (Theorem von Poisson):

$$\left(\frac{dU_e}{dr}\right)_a - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -4\pi\sigma.$$

Differenziren wir nun aber die oben gefundenen allgemeinen Ausdrücke für U_e und U_i nach r und setzen wir zum Schlusse $r = a$, so haben

$$\left(\frac{dU_e}{dr}\right)_{r=a} - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{1}{a^2} f(1) - \frac{2}{a^2} f'(1);$$

statt dessen können wir aber auch schreiben:

$$\left(\frac{dU_e}{dr}\right)_a - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -\frac{U_a}{a} - 2\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a.$$

Führen wir $4\pi\sigma$ ein, so folgt die obige Gleichung 1).

Es ist nun offenbar unsere Aufgabe, U_a und $\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a$ durch Werthe von W auszudrücken.

Im Innern eines Leiters ist das Potential constant, d. h.

$$V_i = U_i + W_i = U_0 + W_0 = \text{constans.}$$

Dieser Satz gilt aber auch noch für die Oberfläche, es ist somit auch

$$U_a + W_a = U_0 + W_0,$$

also, da

$$U_0 = \frac{E}{a},$$

$$U_a = \frac{E}{a} + W_0 - W_a. \quad 2)$$

Wir hätten somit einen Theil unserer Aufgabe gelöst. U_a ist ausgedrückt durch die Ladung der Erde, den Werth des Potentials der äusseren Massen in dem Punkte, für welchen wir σ kennen wollen, und endlich durch den Werth des Potentials der äusseren Massen im Erdmittelpunkte.

Es bleibt uns noch übrig, $\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a}$ durch das Potential der äusseren Massen auszudrücken. Da $U_i + W_i$ eine Constante, folgt sofort:

$$\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -\left(\frac{dW_i}{dr}\right)_a. \quad 3)$$

Also, wenn wir die Werthe aus Gleichung 2) und 3) in die Gleichung 1) einsetzen:

$$4\pi\sigma = \frac{E}{a^2} - \frac{W_a - W_0}{a} - 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=a}. \quad 4)$$

Wir brauchen somit nur die auf der Erdoberfläche aufgespeicherte Elektrizitätsmenge und von den äusseren influenzirend wirkenden Massen nur das Potential im Erdmittelpunkt und jenem Punkte der Erdoberfläche, für welchen wir die Dichte σ bestimmen wollen, sowie die Änderung des Potentials längs der Normalen in diesem Punkte zu kennen, um die Dichte zu berechnen.

Da wir gewöhnlich nicht die Dichte, sondern $-4\pi\sigma$, d. h. das Potentialgefälle $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ für die Erdoberfläche unmittelbar

messen, so werden wir besser thun, auch in die Gleichung 4) das Potentialgefälle einzuführen und können dann schreiben:

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a. \quad 1)$$

Da, wie die Beobachtungen gelehrt haben, bei schönem Wetter die Potentialniveaulächen der Erdoberfläche parallel sind, so ist es leicht auch für einen Punkt, in einer beliebigen Höhe h über der Erdoberfläche, das Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$ zu ermitteln. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur zu wissen, welche Elektrizitätsmenge in der verticalen Luftschichte vom Querschnitte eins und der Höhe h unterhalb des Punktes, für welchen wir $\frac{dV}{dh}$ rechnen wollen, zu kennen.

Nennen wir diese Elektrizitätsmenge η , so wissen wir, dass bei Parallellagerung der Potentialniveaux der Unterschied des Potentialgefälles in zwei beliebigen Niveaux bestimmt ist durch die eingeschlossenen Massen, multiplicirt mit -4π .

Wir haben also

$$\frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi\eta,$$

somit

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a - 4\pi\eta. \quad 11)$$

Wir haben hiemit für einen beliebigen Punkt unserer Atmosphäre das in ihm herrschende Potentialgefälle ausgedrückt

¹ In dieser Formel ist nur die Höhe h gegenüber dem Erdradius a vernachlässigt. Da die Formel nur eine specielle Anwendung des Gauss'schen Satzes

$$\int \frac{dV}{dn} dO = -4\pi\eta$$

ist, so hat man streng genommen, weil die obere Grenzfläche nicht gleich eins, sondern $\left(\frac{a+h}{a}\right)^2$ zu setzen ist,

$$\left(\frac{a+h}{a}\right)^2 \frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi\eta.$$

durch die schon oben näher bezeichneten Grössen E , W_a , W_0 und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$, sowie die noch neu hinzugekommene Grösse η .

Diese Formel ist, wofern in der Lagerung der Potentialniveauflächen am Beobachtungsorte keine Störungen vorkommen, d. h. bei schönem Wetter, vollkommen exact. Sie wurde ohne Voraussetzungen und ohne Vernachlässigungen abgeleitet und stellt die Grundgleichung dar, von welcher man bei jeder Theorie, wenn dieselbe exact begründet werden soll, ausgehen muss. Es ist übrigens bemerkenswerth, dass für die Gleichung I, welche den Specialfall der Gleichung II für $h = 0$, d. h. für die Erdoberfläche darstellt, auch die beschränkende Bedingung, dass die Potentialniveaux der Atmosphäre parallel seien, nicht nöthig ist, dass dieselbe vielmehr ganz allgemein und vollkommen streng das Potentialgefälle in seiner Abhängigkeit von den äusseren Massen ausdrückt, somit auch für die »Störungen« des »normalen« Potentialgefälles gilt.

Da wir, wenn wir uns auf den Boden einer speciellen Theorie stellen, die Werthe von W_a , W_0 und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$ auf Grund der dieser Theorie zu Grunde liegenden Annahme leicht werden berechnen können, so wird es uns leicht sein, alle speciellen Theorien an der Hand dieser allgemeinen Gleichung zu discutiren und zu untersuchen, ob und inwiefern nicht vielleicht ihre Annahme zu Consequenzen führen würde, welche den Beobachtungsthaten widerstreiten.

II. Discussion der allgemeinen Gleichung.

1. Die Grösse E . Wir beschränken uns vorläufig darauf, die als (I) bezeichnete Gleichung für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche, also die Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$$

einer näheren Discussion zu unterziehen und beschäftigen uns vor Allem mit der Grösse E .

E bedeutete die Ladung des leitenden Erdkörpers, d. h. die auf der Erdoberfläche vorhandene freie Elektrizität. Da, wie die Beobachtungen nicht bloss in unseren Breiten, sondern auch in den Tropen und auf dem Ocean gezeigt haben, auf der ganzen Erde das Potentialgefälle bei normalem Wetter einen positiven Werth besitzt, so folgt mit Sicherheit, dass die Erde überall (bei normalem Wetter) mit negativer Elektrizität belegt ist, dass also die jeweilig an einem Orte beobachtete elektrische Dichte der Erdoberfläche nicht allein auf Rechnung der Influenz äusserer Massen zu setzen ist, sondern dass wirklich freie negative Elektrizität auf der Erde vorhanden ist, dass also E einen bestimmten negativen Werth hat.

Diese Annahme, welche zuerst von Ermann und Peltier aufgestellt wurde, ist heute keine Hypothese mehr, sie ist eine Thatsache, welche sich unmittelbar aus den Beobachtungen ergibt.

Es fragt sich nun: Sind wir etwa im Stande, die Änderungen des Potentialgefälles, wenigstens zum Theile, durch die Annahme einer Änderung dieser Grösse E zu erklären? Da nicht bloss Exner annimmt, dass mit dem Wasserdampfe ein Theil der Ladung der Erdoberfläche in die Atmosphäre entweiche, sondern auch Elster und Geitel durch ihre Versuche nachgewiesen haben, dass die Erdrinde Bestandtheile enthalte, welche negativ geladen, unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung einen Theil ihrer Ladung an die Atmosphäre abgeben, so wird local gewiss ein Theil der Erdladung von der Oberfläche in die Atmosphäre entweichen, gerade so wie anderwärts theils durch Blitzentladungen, theils durch den Niederschlag diese negative Elektrizität dem Erdkörper wieder zugeführt werden wird.

Ist es möglich, wenn wir die gesammte Erdladung ins Auge fassen, eine Änderung dieser Grösse anzunehmen? Wenn wir beachten, dass sowohl die Verdampfung, als auch die Insolation nur local sehr verschieden sind, dass aber, wenn wir das Mittel für die ganze Erde ins Auge fassen, dieses gewiss für eine grössere Epoche constant ist, sicher aber keine tägliche Schwankung von nennenswerthem Betrage zeigt, so kann wohl nicht davon die Rede sein, die tägliche Periode oder die

Schwankungen des Potentialgefälles mit dem Dampfdruck oder der Insolation durch Veränderungen von E erklären zu wollen. Die localen Elektricitätsübergänge von der Erde zur Atmosphäre und umgekehrt, verschwinden gewiss für die gesammte Erdoberfläche.

Wohl aber wäre es möglich, eine jährliche Schwankung von E anzunehmen, da sich Sommer und Winter der beiden Hemisphären bekanntlich nicht ausgleichen, vielmehr die Jahreszeit der Nordhemisphäre ausschlaggebend ist, so dass die gesammte Erde im Laufe eines Jahres einen Sommer und einen Winter hat, welcher mit jenem der Nordhemisphäre gleichzeitig ist. Da somit auch die Verdampfungs- und Insolationsverhältnisse der gesammten Erde einen jährlichen Gang zeigen müssen, welcher ein Maximum im Sommer der Nordhemisphäre, ein Minimum im Winter derselben hat, so wäre es allerdings gar nicht ausgeschlossen, dass auch E , die Ladung der Erde, eine jährliche Periode besässe, welche ein Minimum im Sommer und ein Maximum im Winter der Nordhemisphäre aufweist.

Diese Möglichkeit müssen wir jedenfalls zugestehen und im Auge behalten. Ebenso gewiss ist es aber, dass wir durch eine derartige Schwankung von E allein den jährlichen Gang der Luftelektricität nicht erklären können, da sonst die Südhemisphäre nicht, wie dies Melbourne zeigt, einen umgekehrten jährlichen Gang aufweisen dürfte, wie die Nordhemisphäre. Jede Änderung von E müssten ja alle Erdpunkte streng gleichzeitig zeigen. Wir werden übrigens später sehen (das möge hier nur nebenbei bemerkt werden), dass wir gar nicht im Stande sind, an einem einzelnen Beobachtungsorte Änderungen von E zu constatiren.

Fassen wir diese Erwägungen kurz zusammen, so müssen wir sagen, dass die Ladung der Erde E im Allgemeinen als eine Constante angesehen werden muss und dass sie höchstens einen kleinen jährlichen Gang mit einem Maximum in unserem Winter und einem Minimum in unserem Sommer aufweisen könnte, dass also gewiss alle nicht periodischen zeitlichen Schwankungen des Potentialgefälles und dessen tägliche Periode, dann aber auch die jährliche Periode zum grösseren Theile durch Veränderungen der Grössen W , d. h. durch den

influenzirenden Einfluss äusserer Massen auf die Erdoberfläche zu erklären seien.

2. Einfluss elektrischer Massen im Weltraume. Nachdem wir gesehen haben, dass in erster Linie die Änderungen des Potentialgefälles an einem Punkte der Erdoberfläche oder, wie wir auch sagen können, der elektrischen Dichte daselbst eine Influenzwirkung ausserhalb der Erdoberfläche befindlicher Massen sind, können wir einen Schritt weiter gehen und die Frage aufstellen: Wo sind diese Massen?

Hier gibt es nun offenbar nur zwei Möglichkeiten, entweder diese Massen liegen ausserhalb unserer Atmosphäre irgendwo im Weltraume oder aber in unserer Atmosphäre selbst. Wir discutiren zunächst die erstere Möglichkeit.

Wenn die Erde, wie die Beobachtungen lehren, eine negative Ladung besitzt, dann ist es mehr als wahrscheinlich, dass auch die anderen Himmelskörper als elektrisch geladene Körper aufzufassen sind. In diesem Falle würde natürlich in erster Linie unsere Sonne in Betracht kommen, und es wäre die Möglichkeit zu erwägen, ob nicht ein Theil der Erscheinungen luftelektrischer Natur durch die Influenzwirkung der Sonne seine Erklärung fände. Wir untersuchen desshalb zunächst den Einfluss einer ausserhalb der Atmosphäre im Weltraume befindlichen elektrischen Masse, ohne zunächst anzunehmen, dass diese auf der Sonne ihren Sitz habe.

Wo immer aber auch diese elektrischen Massen ihren Sitz haben mögen, das eine ist klar, dass bei der Kleinheit des Erdkörpers im Vergleich zu cosmischen Verhältnissen für den Raum, welchen die Erde einnimmt, die Potentialniveaux dieser äusseren Massen als Ebenen und einander parallel angesehen werden dürfen. Wir wollen das Gefälle dieses Potentials C nennen.

In nebenstehender Figur repräsentire MN jenes Potentialniveau, welches die Erdoberfläche in M tangirt. Wenn das Potentialniveau pro Längeneinheit in der Richtung von M gegen O (Erdmittelpunkt) um den Betrag C wächst, und wenn wir das Potential der in Frage stehenden äusseren Massen in O , d. h. also das durch den Erdmittelpunkt hindurchgehende Potentialniveau mit W_0 bezeichnen, dann hat die Tangential-

ebene MN offenbar das Potential $W_0 - Ca$, wobei unter a der Erdradius MO zu verstehen ist. Wir nennen die Declination der Richtung, in welcher die elektrischen Massen ihren Sitz haben, δ .

Unsere Aufgabe ist nun die, das jeweilig durch den Punkt A , welcher die geographische Breite $AD = \varphi$ haben möge, hindurchgehende Potentialniveau zu berechnen.

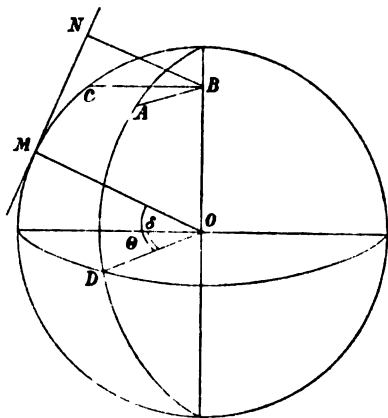


Fig. 1.

Wenn wir den senkrechten Abstand des Punktes A von der Tangentialebene MN mit p bezeichnen, dann ist offenbar dieses Niveau

$$W_a = W_0 - Ca + Cp.$$

Nun ist weiter

$$p = BN - \text{Projection von } AB \text{ auf } BN;$$

da nun, wie man leicht findet,

$$BN = a - a \sin \varphi \sin \delta$$

und die Projection von AB auf BN gleich ist

$$a \cos \varphi \cos \theta \cos \delta,$$

wenn θ den Stundenwinkel des Punktes A , von dem Meridian MC aus gezählt bedeutet, so ist

$$W_a = W_0 - Ca (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \theta).$$

Da bekanntlich der Klammerausdruck nichts anderes ist als $\sin h$, wenn wir unter h die Höhe jenes Punktes verstehen, in welchem die elektrischen Massen ihren Sitz haben, also die Sonnenhöhe, wenn wir die specielle Annahme machen, dass die äusseren Massen auf der Sonne gelegen seien, so können wir auch schreiben

$$W_a = W_0 - Ca \sin h.$$

Würden wir statt des Punktes A auf der Erdoberfläche einen Punkt in der Distanz r vom Erdmittelpunkt betrachtet haben, so hätten wir für diesen erhalten

$$W = W_0 - Cr \sin h,$$

somit

$$\frac{dW}{dr} = -C \sin h.$$

Wir kennen nunmehr W_0 , W_a und $\left(\frac{dW}{dr}\right)$, sind also in der Lage, den influenzirenden Einfluss einer im Weltraume befindlichen Elektrizitätsmenge allein durch das von ihr im Gebiete der Erde hervorgebrachte Potentialgefälle C und als Function ihrer Zenithdistanz oder ihrer Höhe auszudrücken.

Wir erhalten

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2 \left(\frac{dW}{dr} \right)_0 = -3C \sin h.$$

Wären somit andere äussere Massen nicht vorhanden und kämen nur die eben besprochenen in Betracht, also etwa nur die Ladung der Sonne, dann wäre das Potentialgefälle auszudrücken durch

$$\left(\frac{dV}{dh} \right)_0 = -\frac{E}{a^2} - 3C \sin h.$$

Wir würden durch diese Annahme z. B. den jährlichen Gang recht gut erklären können. Hätte die Sonne auch eine negative Ladung, so wäre das Potentialgefälle, das letztere hervorbringt, positiv, also C positiv; wir würden also im Sommer (h gross) einen kleinen Werth für $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$, im Winter (h klein)

dagegen einen grossen Werth für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche erhalten.

Trotzdem muss diese Annahme entschieden verworfen werden, denn wäre sie richtig, so müsste das Potentialgefälle an der Erdoberfläche eine einfache tägliche Schwankung zeigen, welche viel beträchtlicher wäre, als die jährliche. Diese tägliche Periode würde durch das Glied $3 C \cos \varphi \cos \delta \cos \theta$ bestimmt werden, also eine Amplitude

$$6 C \cos \varphi \cos \delta$$

zeigen. Für die Tropen würde sich zur Zeit der Äquinoccien $6 C$ ergeben!

Wenn also die Sonne eine elektrische Ladung besitzen sollte, so ist dieselbe gewiss nur so gross, dass das Gefälle C , welches sie hervorbringt, eine kleine Grösse ist, welche gegen den jährlichen Gang gewiss verschwindet, aber möglicherweise zur Erklärung des täglichen Ganges des Potentialgefälles beitragen könnte, bei welchem ja bekanntlich die Schwankung nur sehr gering ist.

Es ist unter diesen Umständen wohl sehr unwahrscheinlich, dass noch etwa eine Ladung des Mondes in Frage kommen sollte. Trotzdem ist erst jüngst von N. Ekholm und Sv. Arrhenius der Versuch gemacht worden, den influenzirenden Einfluss einer Mondladung nachzuweisen.¹

Da der Mond bereits der Erde so nahe ist, dass die Potentialniveaux nicht mehr als parallele Ebenen angesehen werden dürfen, muss zu dem Gliede $-3 C \sin h$, welches die Influenzwirkung ausdrückt, mindestens noch ein Glied

$$-\frac{5}{2} p C (3 \sin^2 h - 1)$$

hinzutreten (man vergl. die unten citirte Abhandlung), worin p die Parallaxe des Mondes bedeutet.

Es gilt selbstverständlich auch hier, dass vor Allem die mondtägliche Periode sich zeigen müsste. Das von den beiden

¹ Über den Einfluss des Mondes auf den elektrischen Zustand der Erde. Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar. Bd. 19, Afd. I, Nr. 8.

Verfassern discutirte Material zeigt aber, dass die monatliche Periode viel deutlicher ausgesprochen sei; woraus wohl unbedingt folgt, dass der aus diesen Beobachtungen folgende Mondeinfluss keine Influenzwirkung sein kann, sondern wohl als ein indirecter Einfluss aufgefasst werden muss, der erst einer weiteren Klarstellung bedarf.

Für diese Annahme spricht wohl auch das Resultat, zu welchem Ekholm und Arrhenius kommen, dass die untersuchte Erscheinung recht bedeutende Zeit zu ihrer Entwicklung nöthig hat. Wenn dies der Fall ist, kann wohl von einem Influenzvorgang nicht die Rede sein.

Zur Erklärung der grösseren Schwankungen ist also auch die Annahme von elektrischen Massen im Weltraume ausserhalb unserer Atmosphäre ungeeignet; es bleibt somit nur die eine Annahme übrig, dass die Schwankungen im Potentialgefälle an der Erdoberfläche durch den influenzirenden Einfluss von elektrischen Massen in der Atmosphäre selbst hervorgebracht werden.

3. Einfluss elektrischer Massen in der Atmosphäre. Wir haben somit das Gebiet, in welchem jene elektrischen Massen zu suchen sind, durch deren Influenzwirkung die wesentlicheren Schwankungen des Potentialgefälles hervorgerufen werden, ziemlich eng umgrenzt. Sie können ihren Sitz nur in unserer Atmosphäre haben.

Es gibt auch bekanntlich eine ganze Reihe von Theorien, welche den Sitz der wirkenden elektrischen Massen in der Atmosphäre suchen. Auch Thomson nimmt in den oberen Schichten der Atmosphäre eine positive Ladung an. Mag dieselbe nun vorhanden sein oder nicht, gewiss ist, dass, wenn sie auch vorhanden ist, im Innern des Raumes, welchen diese oberen Schichten einschliessen, das Potential einer derartigen gleichförmig elektrisirten Kugelschichte ein constantes ist, d. h.

$W_a = W_0$ und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = 0$. Eine solche Ladung vermag somit nicht das Potentialgefälle $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ zu beeinflussen.

Andere Theorien, wie die von Sohncke und Luvini, nehmen desshalb ein Heben und Senken einer positiv geladenen

Fläche (Isothermenfläche Null) und wohl auch einen wechselnden Betrag ihrer Ladung an. Und noch andere Theorien verlegen den Sitz der äusseren elektrischen Massen nicht in eine Fläche, sondern lassen dieselben sich über die ganze Atmosphäre ausbreiten, sei es nun, dass sie, wie Exner, annehmen, die elektrischen Massen hätten ihren Sitz auf den Wasserdampfmolekülen, sei es, dass sie, wie Elster und Geitel in ihrer Umgestaltung der Arrhenius'schen Theorie, annehmen, es werde die Elektrizität von der Erdoberfläche unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung weggeführt, und den eigentlichen Sitz vorläufig unerörtert lassen. Sicher befindet sich derselbe ja auf Theilchen der Atmosphäre.

Auch diese Theorien, wie alle, welche den Sitz der influenzirenden Elektrizität in der Atmosphäre suchen, müssen sich in den Rahmen einer allgemeinen Formel einordnen, welche wir auf sehr einfache Weise ableiten können und welche es gestattet, die einzelnen Theorien an den Beobachtungsthatfachen zu prüfen.

Nennen wir die gesammte in der Atmosphäre befindliche Elektrizität e und bezeichnen wir die Summe aus dieser letzteren und der Ladung E der Erdoberfläche kurz mit E_0 , also

$$E_0 = E + e,$$

dann sind in einer genügend grossen Entfernung h von der Erdoberfläche die Potentialniveaux unter allen Umständen ja gewiss wieder Kugelflächen und das dort herrschende Potential ist

$$V = \frac{E_0}{a+h}.$$

Das Potentialgefälle in dieser Entfernung ist dann

$$\frac{dV}{dh} = - \frac{E_0}{(a+h)^2}.$$

Wir können nun wieder auf das Potentialniveau, welches die Erdoberfläche repräsentirt, und das Niveau mit dem Potentiale V den schon einmal verwendeten Satz anwenden, welcher das Gefälle in beiden Niveaux und die Elektrizitätsmenge in

Beziehung bringt, welche in der zwischen beiden Niveaux über dem Querschnitt Eins errichteten verticalen Luftsäule enthalten ist. Nennen wir letztere, also die in der ganzen über der Flächeneinheit lagernden Luftsäule enthaltene Elektricität ε_0 , so haben wir demnach¹

$$\left(\frac{a+h}{a}\right)^2 \frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi\varepsilon_0$$

oder, wenn wir für $\frac{dV}{dh}$ den obigen Werth einführen,

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0. \quad \text{III)}$$

Wir ersehen aus dieser Gleichung, dass, wenn lediglich die in der Atmosphäre enthaltenen Massen in Betracht kommen, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche allein abhängt von der gewiss constanten gesammten Elektricitätsmenge unseres Erdballes (Ladung der Oberfläche + Ladung der Atmosphäre) und jenen elektrischen Massen, welche unmittelbar über dem Beobachtungsort in der über der Flächeneinheit lagernden Luftsäule enthalten sind.²

Wäre die in der Atmosphäre vorhandene Elektricität nach Breite und Länge gleichförmig vertheilt, dann wäre $c = 4\pi a^2 \varepsilon_0$, also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} - 4\pi\varepsilon_0 + 4\pi\varepsilon_0 = -\frac{E}{a^2}.$$

¹ Man vergl. die Anmerkung auf S. 8.

² Wir hätten auch wieder W_a , W_0 und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$ für die in der Atmosphäre befindlichen Massen rechnen können und hätten dann gesehen, dass sich

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a \text{ auf } -\frac{c}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0$$

reducirt, womit wir gleichfalls zur Gleichung III) geführt worden wären. Dieser Weg wäre aber ein umständlicherer gewesen und darum schien es gestattet, jene Gleichung auf einem anderen, einfacheren Wege abzuleiten. Der letztere ist ja auch bei Parallellagerung der Potentialniveaux über dem Beobachtungsort — und das ist ja bei schönem Wetter der Fall — vollkommen streng.

Es würde dann, was ja auch selbstverständlich ist, und was wir schon bei der Thomson'schen Theorie ersahen, die in der Atmosphäre enthaltene Elektrizität auf das Potentialgefälle gar keinen Einfluss haben. Schwankungen des letzteren können wir somit allein durch die Annahme erklären, dass die in der Atmosphäre enthaltenen elektrischen Massen ungleichförmig vertheilt sind, wobei speciell die über dem Beobachtungsort befindlichen Massen allein massgebend sind.

Halten wir dieses Ergebniss mit der früher besprochenen Möglichkeit einer Veränderlichkeit der Erdoberflächenladung zusammen, so zeigt sich, dass, wenn auch eine solche vorhanden sein sollte, dieselbe jedenfalls von uns an einem einzelnen Beobachtungsort nie bemerkt oder nachgewiesen werden könnte, da eben allein die Gesamtmenge der Elektrizität unserer Erde und die Massen über dem Beobachtungsort für den Werth seines Potentialgefälles bestimmend sind.

Auch für einen beliebigen Punkt in der Atmosphäre können wir nun sehr einfach das Potentialgefälle ausdrücken. Nennen wir die über dem Punkte, welchen wir uns in der Höhe h denken, in der gesammten darüber befindlichen Luftsäule (vom Querschnitte Eins) enthaltene Elektrizitätsmenge ε , dann ist die früher (auf S. 8) η bezeichnete Grösse

$$\eta = \varepsilon_0 - \varepsilon,$$

also ist für einen Punkt in der Höhe h

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 - 4\pi\eta$$

oder

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon. \quad \text{IV)}$$

Für das Potentialgefälle in beliebiger Höhe entscheidet somit allein die in der Luftsäule (vom Querschnitte Eins) über dem betreffenden Punkte enthaltene Elektrizitätsmenge.

III. Der Sitz der elektrischen Massen.

Fassen wir die Ergebnisse des vorigen Kapitels kurz zusammen, so hat sich als vollkommen sicher herausgestellt, dass

eine freie elektrische Ladung der Erdoberfläche vorhanden ist. Aus einzelnen Beobachtungen vermögen wir dieselbe indessen niemals abzuleiten; wohl aber könnten wir ihren Betrag angeben, wenn uns ein über die ganze Erde sich erstreckendes Beobachtungsmateriale zur Verfügung stünde. Würden wir für jede geographische Breite den Betrag von $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ kennen, dann würden wir auch einen Mittelwerth dieses Potentialgefälles ableiten können. Es ist aber

$$\begin{aligned}\frac{1}{O} \int \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 dO &= -\frac{1}{O} \int \frac{E+e}{a^2} dO + \frac{1}{O} \int 4\pi e dO \\ &= -\frac{E+e}{a^2} + \frac{4\pi e}{O} = -\frac{E}{a^2}.\end{aligned}$$

Das heisst, wenn wir den Mittelwerth des Potentialgefälles für die Erdoberfläche $\left(\frac{dV}{dh}\right)_m$ nennen, so ist die Ladung der Erdoberfläche

$$E = -\left(\frac{dV}{dh}\right)_m \cdot a^2.$$

Exner hat den Versuch gemacht,¹ das Potentialgefälle für verschiedene Breiten auf Grund seines umfangreichen Beobachtungsmateriales zu berechnen.

Acceptirt man seine Zahlen und berechnet mit Berücksichtigung der Grösse der einzelnen Kugelzonen den Mittelwerth, so ergibt sich

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_m = 130 \text{ Volt/Meter.}$$

Als einen ersten Näherungswerth wird man diesen Werth gewiss ansehen dürfen; dann ergibt sich für die Erdoberflächenladung

$$E = -21 \cdot 10^{14} \text{ statische Einheiten.}$$

¹ Wiener Sitzungsber., Bd. 96, IIa. [1887], S. 459. (Auch Exner's Repertorium für Physik, Bd. XXIV, S. 276).

Eine jährliche Schwankung von E wäre, wie wir sahen, möglich, aber sie liesse sich nur dann nachweisen, wenn wir den Mittelwerth des Potentialgefälles aus einem über die ganze Erde sich erstreckenden Beobachtungsmateriale von Monat zu Monat berechnen könnten.

Zur Erklärung von Schwankungen des Potentialgefälles an einzelnen Orten (das war ein weiteres Resultat) können wir Änderungen von E jedenfalls nicht herbeiziehen.

Wir sind somit zu der Annahme gezwungen, dass die Schwankungen des Potentialgefälles in erster Linie durch den influenzirenden Einfluss äusserer Massen hervorgerufen werden. Als wir nun aber wieder die Möglichkeit ins Auge fassten, dass diese Massen im Weltraume, also etwa auf der Sonne, zu suchen seien, zeigte sich, dass dann vor Allem der tägliche Gang diesen Einfluss verrathen müsse.

Wenn die Sonne eine elektrische Ladung L besitzen würde, so wäre in der Distanz der Erde R das Potential dieser Ladung $V = \frac{L}{R}$, also das Potentialgefälle, welches wir mit C bezeichneten,

$$C = \frac{dV}{dR} = -\frac{L}{R^2}.$$

Bei einer Declinationsstellung δ würde nun ein Ort in der geographischen Breite φ eine tägliche Amplitude des Potentialgefälles

$$6 C \cos \varphi \cos \delta$$

aufweisen.

Über den täglichen Gang liegen nur sehr wenige Messungen vor, und von den vorliegenden beziehen sich nur wenige auf die freie Ebene; so viel ist aber gewiss, dass die tägliche Schwankung überhaupt gering ist. Wenn wir als Beispiel den Gang von Perpignan¹ verwenden dürften, so hätten wir im Mittel aus Frühjahr und Herbst überhaupt nur eine Schwankung zwischen 39 und 73 Volt. Das Hauptminimum um 3^h a., das Hauptmaximum um 7^h p.

¹ Meteorolog. Zeitschrift, Bd. 26 (1891), S. 113.

Da die Sonne die extremen Werthe zu Mittag und Mitternacht verursachen würde, so hätten wir eigentlich nur die Beobachtungsdaten dieser Stunden in Betracht zu ziehen. Es beträgt nun um Mitternacht das Potentialgefälle 45, zu Mittag 52 Volt. Das sind wenig verschiedene Werthe, die wohl zeigen, dass, wenn eine Ladung der Sonne vorhanden ist, dieselbe sehr klein ist.

Wenn wir auch

$$6 C \cos \varphi \cos \delta = 20 \text{ Volt (für } \delta = 0)$$

annehmen würden, hätten wir, da $\varphi = 42\frac{1}{2}^\circ$,

$$C = 4.5 \text{ Volt pro Meter,}$$

somit das Potentialgefälle an der Sonnenoberfläche

$$C_0 = 208000 \text{ Volt/Meter.}$$

Ein so hoher Werth des Potentialgefälles an der Sonnenoberfläche ist auch gewiss nicht zu erwarten, denn er würde besagen, dass die elektrische Dichte an der Sonnenoberfläche 1600mal so gross wäre, wie die an der Erdoberfläche. Exner hat auch schon gezeigt,¹ dass selbst dann, wenn die Sonnenladung zur Erdladung wie ihre Massen zu einander sich verhielten, das Gefälle im Gebiete der Erde, also unsere Grösse C nur 0.4 Volt pro Meter betragen würde.

Es ist also wohl zweifellos, dass der Einfluss der Sonne, wenn er vorhanden ist, ein nur sehr kleiner ist.

Ausschlaggebend für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche sind somit gewiss nur die in der Atmosphäre enthaltenen Massen, und da wurde gezeigt, dass sich das Potentialgefälle stets darstellen lasse durch die Formel

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon.$$

Diese Formel schliesst die Grösse E und somit auch deren eventuelle Schwankungen bereits ein. Die Grösse E_0 , welche sich aus E und der Gesamtladung e der Atmosphäre zu-

¹ Diese Sitzungsberichte, Bd. 93, II. a. S. 284.

sammensetzt, ist gewiss eine Constante; die einzig variable Grösse ist somit nur die Grösse ε .

Wenn nun aber durch diese Formel das Potentialgefälle bis auf die geringen, eventuell vorhandenen Schwankungen, welche ihren Grund in einer Sonnenladung hätten, vollkommen genau dargestellt wird, dann ist ein Heben oder Senken der in der Atmosphäre vorhandenen elektrischen Massen vollkommen gleichgiltig, nur die Menge, welche sich über dem Beobachtungsorte befindet, ist massgebend; wo sie sich befindet, ist gleichgiltig.

Es ist hiermit aber auch der unwiderlegliche Beweis erbracht, dass elektrische Massen sich jederzeit, auch bei schönem Wetter, in der Atmosphäre befinden müssen, und es erübrigt dann nur noch die eine Frage: An welche Bestandtheile unserer Atmosphäre sind diese elektrischen Massen gebunden? Sind es Wassertröpfchen, Eiskrystalle, der Wasserdampf, der Staub oder vielleicht die Luft selbst?

Sowohl Wassertröpfchen, als auch Eisnadeln sind gewiss Träger von Elektrizität. Das beweisen nicht nur die directen Beobachtungen dieser Thatsache, sondern auch der störende Einfluss, den Wolken auf den normalen Verlauf des Potentialgefälles ausüben. Für die Verschiedenheiten dieser letzteren Grösse bei schönem Wetter, wo gewiss Wassertröpfchen und Eisnadeln, wenn sie schon unsichtbar vorhanden sein sollten, gewiss nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen würden, müssen jedenfalls anderswo vorhandene Massen herbeigezogen werden.

Die Exner'sche Theorie, nach welcher der Wasserdampf der Sitz der elektrischen Massen wäre, schien bis in die neueste Zeit wohl als die am besten begründete. War auch die physikalische Grundlage, ob von einer geladenen Wasserfläche der Wasserdampf Elektrizität mitführe, bisher noch eine Streitfrage, so konnte Exner doch auf den thatsächlich bestehenden Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und Dampfgehalt der Luft hinweisen, ein Zusammenhang, welcher sich sogar durch eine empirische Formel darstellen liess:

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi k p_0},$$

wobei A und k Constanten, p_0 aber den Wasserdampfgehalt an dem Beobachtungsorte bedeutet.

Diese Formel würde sich sehr wohl in den Rahmen der Formel

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0$$

einordnen, wir brauchten nur anzunehmen, es wäre ε_0 die über dem Beobachtungsorte befindliche Elektrizitätsmenge proportional dem Dampfgehalte p_0 und der Dichte der Erdladung am Beobachtungsorte, d. h. dem $-\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$. Dann wäre

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} - 4\pi k p_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0,$$

woraus sich die Exner'sche Formel ergibt, wenn wir die Constante $-\frac{E_0}{a^2} = A$ setzen.

In jüngster Zeit zeigten nun Elster und Geitel,¹ dass sich eine ganz ebenso gut begründete Beziehung zwischen dem Potentialgefälle und dem Betrage der ultravioletten Strahlung nachweisen lasse, und dass auch diese sich durch eine, ebenso vortrefflich stimmende empirische Formel darstellen lasse, welche dieselbe Gestalt hat

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi KJ},$$

wobei unter J die Intensität der ultravioletten Strahlung zu verstehen ist. Selbstverständlich ordnet sich auch diese Formel in den Rahmen unserer Formel III) ein unter der Annahme

$$\varepsilon_0 = -KJ \cdot \left(\frac{dV}{dh}\right)_0.$$

Physikalisch ist diese Annahme sehr gut begründet. Die Erdoberfläche besitzt wirklich Substanzen, welche unter dem Einflusse ultravioletter Strahlung ihre negative Ladung abgeben.

¹ Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, II. a. (1893).

Dann aber ist es auch sehr plausibel, dass die Menge der über dem Beobachtungsorte befindlichen Elektricität proportional ist erstlich der Intensität der Strahlung und zweitens der Dichte der Ladung.

Höchst merkwürdig bleibt übrigens das Nebeneinanderbestehen dieser beiden Beziehungen. Elster und Geitel legten sich desshalb auch in der citirten Arbeit die Frage vor, ob nicht etwa ein Zusammenhang zwischen Wasserdampfgehalt und ultravioletter Strahlung bestehe. Die diesbezüglichen Beobachtungen zeigten denn auch in der That einen derartigen Zusammenhang, und Elster und Geitel versuchten auch eine Erklärung für denselben zu geben.

Die Untersuchungen Aitken's haben gezeigt, dass dem Staube eine grosse Wichtigkeit bei der Wolkenbildung zukomme. Zur Wolkenbildung sind somit zwei Elemente nöthig: ein beträchtlicher Wasserdampfgehalt der Luft und ein gewisser Staubgehalt. Wenn nun bei grösserem Wasserdampfgehalt doch eine Condensation nicht eintritt, so liegt dies offenbar am Fehlen des zweiten Factors. Bei wolkenlosem Wetter wird somit der Staubgehalt umso geringer sein, je grösser die absolute Feuchtigkeit ist. Da nun besonders der Staub die ultraviolette Strahlung aufhält, so wird auch die ultraviolette Strahlung umso grösser sein, je grösser die Feuchtigkeit ist.

Wenn übrigens auch die von Elster und Geitel festgestellte Beziehung zwischen Potentialgefälle und ultravioletter Strahlung die ursprüngliche sein sollte, so bleibt damit doch noch die Frage offen, ob die von der Erdoberfläche weggeführte Elektricität auf die Luft oder etwa den Staub übergehe.

Da zwischen Wasserdampfgehalt, Staubgehalt und ultravioletter Strahlung eine so enge Beziehung besteht, ist diese Frage schwer zu entscheiden, doch wäre es unter verschiedenen klimatischen Verhältnissen wohl möglich festzustellen, von welcher Grösse eigentlich der Betrag von ϵ_0 unmittelbar abhängt.

Übrigens versprechen auch Beobachtungen in den höheren Schichten der Atmosphäre hier vielleicht einige Aufklärung zu geben. Die Beobachtungen auf Berggipfeln leiden an dem Übelstande, dass sie nicht in absolutem Maasse angestellt werden

können; doch bieten mitunter auch nur relative Messungen schon einiges Interesse.

Elster und Geitel haben bei ihrer Bearbeitung der luftelektrischen Messungen auf dem Sonnblick gezeigt, dass der jährliche Gang in dieser Höhe fast verschwindet. Sie fanden¹

Oct.	Nov.	Dec.	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
0·87	0·84	1·05	0·98	1·13	1·00	1·06	1·07	1·01

Ein ausgesprochener Gang wie an den Stationen der Niederung ist hier nicht mehr zu ersehen. Da allgemein

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon,$$

so würde aus diesen Daten folgen, dass sich über der Höhe des Sonnblicks fast keine elektrischen Massen mehr befinden, durch deren wechselnden Betrag noch ein jährlicher Gang hervorgerufen werden könnte. Es würden somit nach diesen Beobachtungen die den jährlichen Gang des Potentialgefälles hervorgerufenen Massen zum grössten Theile in der unterhalb 3000 *m* liegenden Luftschichte zu suchen sein.

Interessante Ergebnisse würden auch systematische Beobachtungen im Ballon versprechen. Man wäre wohl geneigt anzunehmen, dass bei heiterem Wetter derartige Beobachtungen in grösseren Höhen $\frac{dV}{dh}$ constant ergeben dürften.

Das so ermittelte $\frac{dV}{dh}$ wäre dann, wenn ϵ verschwindet, der Betrag von

$$-\frac{E_0}{a^2}.$$

Wir würden so den Betrag von E_0 leicht ermitteln können.

Wären wir sicher, dass wirklich der Betrag von ϵ_0 durch den Ausdruck $-kp_0 \left(\frac{dV}{dh} \right)_0$ dargestellt würde,² so wäre die Constante A in der Exner'schen Formel, wie wir bereits sahen,

¹ Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, II. a. (1893), S. 1311.

² Vergl. S. 1048.

gleich $-\frac{E_0}{a^2}$. Diese Voraussetzung ist aber, wenn wir auch an der Geltung der Exner'schen Gleichung festhalten, keineswegs selbstverständlich.

Auch dann, wenn ε durch die Gleichung

$$\varepsilon = C_0 - kp_0 \left(\frac{dV}{dh} \right)_0$$

dargestellt wäre, worin C_0 eine Constante bedeutet, würden wir zu der Exner'schen Formel gelangen, nur dass dann A eben eine andere physikalische Bedeutung hätte, nämlich durch den Ausdruck

$$A = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C_0$$

gegeben wäre. Wir hätten dann, um E_0 zu finden, von der Constanten A erst den Betrag $4\pi C_0$ abzuziehen. Da wir nun nicht angeben können, wie gross die Constante C_0 in der Gleichung

$$\varepsilon = C_0 - kp_0 \left(\frac{dV}{dh} \right)_0$$

oder, wenn wir auf dem Standpunkte der Theorie von Elster und Geitel stehen, wie gross C'_0 in der Gleichung

$$\varepsilon = C'_0 - KJ \left(\frac{dV}{dh} \right)_0$$

ist, und nicht a priori annehmen können, dass sie Null sei, so ist es nicht gestattet, die Exner'sche Constante A (oder die entsprechende in der Gleichung von Elster und Geitel) als jene Ladung anzusehen, welche die Erdoberfläche besitzen würde, wenn alle Elektrizität auf derselben niedergeschlagen wäre.

Die Grösse E_0 können wir somit allein durch Ballonfahrten ermitteln, und zwar durch Messungen in grossen Höhen. Da übrigens sowohl die Formel von Exner, als auch die von Elster und Geitel nur aus Beobachtungen an der Erdoberfläche abgeleitet wurde, so können wir nicht einmal sagen, ob die Constante C_0 oder C'_0 nicht etwa eine Function der Höhe sei.

Es ist ja auch das noch eine Streitfrage, ob die Luft selbst elektrisierbar sei oder nicht. Wenn der Luft selbst eine gewisse Ladung zukäme, würde ja sicher ein für dasselbe Niveau constanter, aber mit der Höhe abnehmender Betrag in dem Ausdrücke für ϵ enthalten sein müssen.

Über all' diese Fragen versprechen Messungen im Ballon bei schönem Wetter interessante Ergebnisse. Vor Allem ist aber zu beachten, dass unter allen Umständen

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon$$

und es handelt sich nun darum, den Betrag von E_0 und jenen von ϵ in seiner Abhängigkeit von Wasserdampfgehalt und ultravioletter Strahlung festzustellen.

Dr. Less hat kürzlich in der Zeitschrift für Luftschiffahrt¹ eine kleine Zusammenstellung der luftelektrischen Messungen im Ballon aus der jüngsten Zeit zusammengestellt. Wie sich aus diesen mit ziemlicher Übereinstimmung ergibt, besitzt das Potentialgefälle in den unteren Schichten ziemlich wechselnde Werthe. Nach einigen Beobachtungsreihen nimmt es in den unteren Schichten mit der Höhe zu, nach anderen ab; übereinstimmend aber zeigt sich in den höheren Schichten eine Abnahme des Potentialgefälles. In den Schichten 2500—3000 *m* fanden Börnstein, Le Cadet und Baschin Werthe von rund 15 Volt pro Meter!

Derartige Ergebnisse zeigen bereits, dass die Exner'sche Theorie mit den Thatsachen nicht ohne Weiteres in Einklang zu bringen ist. Nach der Theorie von Exner würden wir, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, ein Potentialgefälle von etwa 1400 Volt pro Meter beobachten, und zwar nicht bloss an der Erdoberfläche, sondern auch in den höheren Schichten. Ebenso würden wir bei Erhebung über die Wasserdampfatosphäre nothwendigerweise zu immer grösseren Werthen gelangen und in solchen Atmosphärenhöhen, in welchen der Wasserdampfgehalt der Luft nur mehr sehr gering ist, würden wir diesem Potentialgefälle von etwa 1400 Volt sehr nahe kommen.

¹ Zeitschrift für Luftschiffahrt, XIII (1894), S. 190.

Da thatsächlich in den höheren Schichten kleinere Werthe beobachtet werden, als an der Erdoberfläche, müssen ausser den Elektricitätsmengen, welche eventuell ja auf dem Wasserdampfgehalt ihren Sitz haben könnten, sicherlich noch andere, und zwar sehr beträchtliche Elektricitätsmengen vorhanden sein, welche vom Wasserdampfgehalt unabhängig sind.

Wenn wir also auch noch den Wasserdampf als Träger der Elektrizität anerkennen wollten, so ist doch nach den Ergebnissen dieser Ballonfahrten gewiss, dass in der Grösse ϵ noch ein anderes vom Wasserdampf unabhängiges Glied wirklich vorkommt. Es wäre in der That

$$\epsilon = C_0 - kp_0 \left(\frac{dV}{dh} \right)_0$$

und C_0 hätte einen positiven, mit der Höhe abnehmenden Werth.

Es folgt zugleich aber auch aus diesen Betrachtungen, dass aus der Abnahme des Potentialgefälles mit der Höhe nicht gefolgert werden darf, dass die Exner'sche Theorie ganz und gar unrichtig ist. Es wäre, wie wir sahen, noch immer möglich, eine Ladung des Wasserdampfes anzunehmen, aber insoferne ist Exner's Theorie gewiss unrichtig, als sie den Wasserdampf zum alleinigen Träger der atmosphärischen Elektrizität macht. Es müssen ausser den möglicherweise vorhandenen negativen Massen auf dem Wasserdampf noch viel beträchtlichere positive Massen in der Atmosphäre vorhanden sein, die, wie es scheint, einen sehr constanten Betrag ausmachen und desshalb wohl einer Ladung der Luft selbst zugeschrieben werden müssen.

Wäre aller Wasserdampf aus der Luft ausgeschieden, so würden wir nach Exner an der Erdoberfläche ein Potentialgefälle von etwa 1410 Volt beobachten. Nach unserer Formel wäre also

$$\left(\frac{dV}{dh} \right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C_0 = 1410 \text{ Volt,}$$

worin C die Elektricitätsmenge in der über der Flächeneinheit aufruhenden verticalen Luftsäule bedeuten würde, wenn aller

Wasserdampf ausgeschieden wäre. Da nun in Höhen von 3000 *m* der Wasserdampfgehalt der Luft ohnehin sehr gering ist, so dass auf dem Wasserdampfe in der Luftsäule über dem Niveau von 3000 *m* auch nur mehr sehr wenig Elektrizität sitzen kann, so würden wir in grossen Höhen, auch wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, nicht viel andere Werthe beobachten.

Wenn wir aber in 3000 *m*

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C = 15 \text{ Volt}$$

beobachten, wobei unter *C* die Elektrizitätsmenge in der Luftsäule über dem Niveau von 3000 *m* zu verstehen wäre, so hätten wir offenbar rund

$$4\pi(C_0 - C) = 1400 \text{ Volt/Meter.}$$

$C_0 - C$ ist aber nichts anderes, als die nicht an den Wasserdampf gebundene, sondern sonst wo sitzende Elektrizität, welche in einer nur 3000 *m* hohen verticalen Luftsäule vom Querschnitte Eins enthalten ist, d. h. es ist in dieser Luftsäule beinahe ebensoviel positive Elektrizität vorhanden, als nach Exner (bei Abwesenheit des Wasserdampfes) auf der Flächeneinheit der Erdoberfläche negative Elektrizität sitzen würde. Exner nimmt ja an

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} = -4\pi\sigma = 1410 \text{ Volt/Meter,}$$

wobei unter σ die Dichte der Erdoberflächenladung zu verstehen ist.

Wenn sich in grösseren Höhen noch eine weitere Abnahme des Potentialgefälles mit der Höhe zeigen sollte, dann wäre es höchst wahrscheinlich, dass wir an der Grenze der Atmosphäre einen Werth Null beobachten würden, was besagen würde, dass, wie dies von Lord Kelvin ja auch behauptet wurde, die negative Ladung der Erdoberfläche und eventuelle negative elektrische Massen in den unteren Schichten der Atmosphäre vollkommen ausgeglichen würden durch eine entsprechende positive Ladung der Luft. In unserer Gleichung IV) würde in

diesem Falle E_0 verschwinden, d. h. es wäre das Potentialgefälle allein abhängig von der Elektrizitätsmenge ε über dem Beobachtungspunkt. Es wäre

$$\frac{dV}{dh} = 4\pi\varepsilon$$

und für die Erdoberfläche

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = 4\pi\varepsilon_0.$$

Würden wir mit Exner dem Wasserdampfe eine negative Ladung zuschreiben, so würde sich ε_0 zusammensetzen aus einer wohl ziemlich constanten positiven Ladung C_0 der Luft (wir wollen diese Menge, um im Einklang mit der Exner'schen Formel zu bleiben, $C_0 = \frac{A}{4\pi}$ nennen), und einer negativen, vom Potentialgefälle und dem Dampfdrucke p_0 abhängigen Ladung $-kp_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$. Das heisst, es wäre

$$\varepsilon_0 = \frac{A}{4\pi} - kp_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

oder

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi kp_0}.$$

Würden wir dagegen auf dem Standpunkte von Elster und Geitel stehen, dann würden wir wohl die Versuche, nach welchen gewisse negativ geladene Conductoren unter dem Einflusse ultravioletter Strahlen ihre Ladung verlieren, so deuten, dass wir annehmen, es finde unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung ein Ausgleich statt zwischen den negativ geladenen Conductoren und den positiv geladenen Luftmolekülen, so dass von der Luftladung ein, der ultravioletten Strahlung und der Dichte der Ladung des Conductors proportionaler Antheil ausgeglichen würde.

Wir hätten wieder

$$\varepsilon_0 = \frac{A}{4\pi} - KJ \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

oder

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi KJ}.$$

Letzteres wäre aber die Formel, durch welche Elster und Geitel ihre Beobachtungen darstellen konnten.

Zu beantworten wäre dann nur noch die Frage: Wie erlangt die Luft wieder ihre normale Ladung? Steht man auf dem Standpunkt der Exner'schen Theorie, erledigt sich diese Frage wohl leicht, die von der Erde im Wasserdampfe weggeführte negative Elektrizität würde im Niederschlag wieder herabkommen.

Nimmt man dagegen eine theilweise Entladung der positiv geladenen Luft unter dem Einfluss ultravioletter Strahlen an, dann können wir vorläufig auf die Frage: Wie ladet sich die Luft neu? Wieso kommt es, dass neuerliche Scheidung der Elektrizität (die negative zur Erde, die positive zur Luft) eintritt?, keine Antwort geben.

IV. Störungen des normalen Potentialgefälles.

Die mit I bezeichnete Gleichung gilt für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche ganz allgemein. Wir können sie somit auch auf Störungen anwenden und den influenzirenden Einfluss einer Wolke oder Staubschichte durch den Ausdruck

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2 \left(\frac{dW}{dr}\right)_a$$

leicht berechnen.

Da, wie wir sahen, das ungestörte Potentialgefälle durch den Ausdruck

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon_0$$

dargestellt ist, so erhalten wir ganz allgemein für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche, unter dem Einfluss störender Massen

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon_0 + \frac{W_a - W_0}{a} + 2 \left(\frac{dW}{dr}\right)_a.$$

Unsere Aufgabe ist somit allein die, wiederum für die störenden Massen das Potential W und W_0 zu berechnen. Wir wollen dies nur ganz allgemein für das Volumselement einer Wolke, welches die elektrische Dichte ρ haben möge, ausführen.

M sei jener Punkt der Atmosphäre, in welchem sich das Volumenelement dv befindet, A sei der Punkt der Erdoberfläche, für welchen wir den influenzirenden Einfluss berechnen wollen, h sei die Höhe des Punktes M über der Erdoberfläche, z sei seine Zenithdistanz.

Dann ist im Punkte A das Potential $W_a = \frac{\rho dv}{u}$.

In einem Punkte B in der Distanz r vom Erdmittelpunkte allgemein:

$$W = \frac{\rho dv}{\sqrt{r^2 + (a+h)^2 - 2r(a+h) \cos \vartheta}},$$

somit

$$\frac{dW}{dr} \text{ für } r = a$$

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = -\frac{\rho dv}{u^3} \{a - (a+h) \cos \vartheta\}$$

und, da $(a+h) \cos \vartheta - a = u \cos z$,

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = \frac{\cos z}{u^2} \rho dv$$

also

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2 \left(\frac{dW}{dr}\right)_a = \left(\frac{1}{au} - \frac{1}{a^2} + \frac{2 \cos z}{u^2}\right) \rho dv.$$

Da im Allgemeinen u gegen a sehr klein ist, so kann das zweite Glied unberücksichtigt bleiben und wir erhalten somit

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon_0 + \left(\frac{2 \cos z}{u} + \frac{1}{a}\right) \frac{\rho dv}{u}.$$

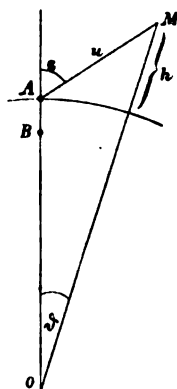


Fig. 2.

Solange der betreffende Punkt nahe dem Zenith ist, kann das Glied $\frac{1}{a}$ unbedingt vernachlässigt werden, wenn der Punkt nahe dem Horizont liegt, dann wird $\frac{2 \cos z}{u}$ von derselben Grössenordnung sein, wie $\frac{1}{a}$.

Wollen wir den Einfluss einer Wolke haben, brauchen wir bloss über ihre ganze Ausdehnung zu integrieren, erhalten also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon_0 + \int \left(2 \frac{\cos z}{u} + \frac{1}{a}\right) \frac{\rho dv}{u}. \quad V)$$

Diese Gleichung kann unter Umständen gestatten, den Werth der Ladung einer Wolke zu ermitteln.

V. Zusammenfassung.

Die mathematische Behandlung eines Problems bietet den grossen Vortheil, dass sie die Consequenzen irgend einer Annahme mit absoluter Sicherheit festzustellen gestattet. Aus diesem Grunde war es wohl auch erwünscht, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche in seiner Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Massen mathematisch zu behandeln, um so eine sichere Entscheidung darüber zu ermöglichen, was bei dem Problem, welches die luftelektrischen Erscheinungen darbieten, als unbedingt sicher anzunehmen sei, was dagegen nur möglich ist, und was endlich unbedingt verworfen werden muss, weil es zu Consequenzen führt, die nicht mit den Erfahrungen in Einklang zu bringen sind.

Unzweifelhaft fest steht, wie wir sahen, die Thatsache, dass unsere Erdoberfläche eine negative Ladung besitzt. Aus dem Mittelwerthe des Potentialgefälles $\left(\frac{dV}{dh}\right)_m$ können wir sie berechnen nach der Formel

$$E = -\left(\frac{dV}{dh}\right)_m \cdot a^2 \quad (a \text{ Erdradius}).$$

(Wir dürfen das mittlere Potentialgefälle zu etwa 130 Volt-Meter annehmen, also E auf $-21 \cdot 10^{14}$ st. Einh. schätzen.)

Diese Ladung der Erdoberfläche ist als eine gewiss ziemlich unveränderliche Grösse anzusehen; doch ist es möglich, dass sie eine kleine jährliche Schwankung zeigt. Jedenfalls dürfen wir die Schwankungen des Potentialgefälles in ihren wesentlichsten Punkten nicht Änderungen in der Erdoberflächenladung zuschreiben.

Die Schwankungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche sind vielmehr, auch das ist sicher, auf den influenzirenden Einfluss ausserhalb der Erdoberfläche befindlicher Massen zurückzuführen. Wenn wir von diesen äusseren Massen das Potential im Erdmittelpunkt (W_0) und am Beobachtungspunkt (W_a), sowie das Gefälle im letzteren $\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=a}$ kennen, dann ist, wo immer die äusseren Massen ihren Sitz haben mögen, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche gegeben durch den Ausdruck

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a. \quad \text{I)}$$

Bei ungestörtem Potentialgefälle (Potentialniveaux parallel der Erdoberfläche) ist in einer beliebigen Höhe das Potentialgefälle

$$\frac{dV}{dh} = \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 - 4\pi\eta, \quad \text{II)}$$

wenn η die Elektrizitätsmenge darstellt, welche in der zwischen beiden Niveaux liegenden Luftsäule vom Querschnitt eins enthalten ist.

Aus dieser Formel I folgt, dass die äusseren Massen nicht im Kosmos ihren Sitz haben können, sonst müssten sie sich vor allem in der täglichen Periode äussern, was aber nicht der Fall ist, nachdem letztere überhaupt nur einen sehr kleinen Gang aufweist.

Die elektrischen Massen, durch deren Influenzwirkung die Änderungen des Potentialgefälles zustande kommen, sind somit sicher in der Atmosphäre enthalten. Wenn dies aber der Fall ist, dann lässt sich der Influenzeinfluss sehr einfach darstellen, dann ist unter allen Umständen (bei normalem Wetter):

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2 \left(\frac{dW}{dr} \right)_a = - \frac{e}{a^2} + 4\pi\epsilon_0,$$

worin e die gesammte, in der Atmosphäre vorhandene Elektrizität, ϵ_0 aber nur jener Theil ist, welcher in der über der Flächeneinheit (am Beobachtungsort) aufruhenden Luftsäule enthalten ist.

Es ist dann, wenn man $E+e$, also die Gesamtelektrizität des Erdballs E_0 nennt, ganz allgemein das Potentialgefälle an der Erdoberfläche durch die viel einfachere Gleichung dargestellt

$$\left(\frac{dV}{dh} \right)_0 = - \frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon_0 \quad \text{III)}$$

und das Potentialgefälle in einer beliebigen Höhe

$$\frac{dV}{dh} = - \frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon, \quad \text{IV)}$$

wenn ϵ die Elektrizitätsmenge in der entsprechenden Luftsäule über dem Niveau, in welchem sich der Beobachtungsort befindet, bedeutet.

Die Änderungen des Potentialgefälles werden somit allein hervorgebracht durch die influenzirenden Elektrizitätsmengen, welche in der über dem Beobachtungsort befindlichen Luftsäule vom Querschnitt eins enthalten sind.

Hiernach vermögen sowohl die Theorie von F. Exner, welche den Sitz dieser Elektrizität auf dem Wasserdampf sucht, als auch die Theorie von Elster und Geitel, nach welcher ein Theil der negativen Erdoberflächenladung in die Atmosphäre zerstreut wird, den Thatsachen gerecht zu werden.

Es darf aber nicht a priori angenommen werden, dass ausser der auf dem Wasserdampf eventuell vorhandenen Elektrizität (nach Exner), oder ausser der vom Erdboden unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlen entwichenen Elektrizität (nach Elster und Geitel), keine anderen Elektrizitätsmengen in der Atmosphäre enthalten seien.

Nach Exner würde, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, an der Erdoberfläche ein Potentialgefälle 1410 Volt/Meter herrschen

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon'_0 = 1410.$$

ϵ'_0 wäre die Elektrizitätsmenge in der Luftsäule über dem Beobachtungsort, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre.

Da nun nach Ballonbeobachtungen in einer Höhe von nur 3000 *m* ein Potentialgefälle von nur etwa 15 Volt/Meter herrscht, so hätte man

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon' = 15.$$

Es ist also $\epsilon'_0 - \epsilon$ ein ziemlich beträchtlicher positiver Werth, d. h. wenn auch aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, hätten wir noch eine beträchtliche positive Elektrizitätsmenge in der Atmosphäre anzunehmen, vermuthlich auf der Luft selbst.

Es ist somit wahrscheinlich, dass eine der negativen Erdoberflächenladung entsprechende positive Luftladung vorhanden ist, derart, dass die Gesamt-Elektrizität E_0 gleich Null wäre.

Auch nach der Theorie von Elster und Geitel müssten wir, um den Beobachtungen im Ballon gerecht zu werden, neben der von der Erdoberfläche entweichenden negativen Elektrizität eine positive Ladung der Luft annehmen, würden also wohl die Thatsache der lichtelektrischen Zerstreuung so deuten, dass die positiv geladene Luft unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlung befähigt werde, sich gegen gewisse negativ geladene Conductoren zu entladen und dadurch diesen ihre Elektrizität zu entziehen. Sollte diese Auffassung durch das Experiment als richtig bewiesen werden, dann könnte wohl nur mehr die Theorie von Elster und Geitel zur Erklärung der luftelektrischen Erscheinungen herangezogen werden und die schöne Übereinstimmung der Exner'schen Formel mit den Beobachtungen, wäre allein durch den — man möchte fast sagen — zufälligen Zusammenhang zwischen ultravioletter Strahlung und Wasserdampfgehalt der Atmosphäre zu erklären.

Vorläufig steht wohl nur fest, dass wir es mit einer positiven, überall, wie es scheint, constanten Ladung der Atmosphäre zu thun haben, welche entweder superponirt ist von einer nega-

tiven Ladung, die auf dem Wasserdampf ihren Sitz hätte (proportional der Dichte der Erdoberflächenladung und dem Dampfgehalte der Luft); oder superponirt, beziehungsweise ausgeglichen wird, durch die unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlung von der Erdoberfläche entweichenden negativen Elektrizität (proportional gleichfalls der Dichte der Erdoberflächenladung und der Intensität der ultravioletten Strahlung).

Beide Annahmen ergeben die gleiche Formel

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi k p_0}, \text{ beziehungsweise } \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi k J},$$

deren jede auch den Thatsachen der Beobachtung entspricht.

Hier vermag nur eine Erweiterung unseres Erfahrungswissens zu entscheiden; aber eine, den Umfang einer Annahme genau abgrenzende Formel kann hiebei sehr wesentliche Dienste thun.

Es liegt in der Natur der Sache, dass eine theoretische Erörterung sachlich wenig Neues bietet; ihre Hauptaufgabe ist die klare und präzise Zusammenfassung unseres bisherigen Erfahrungswissens und dessen, was mit Nothwendigkeit aus ihm folgt.

Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung

von

Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Bei Gelegenheit meiner theoretischen Untersuchungen der Elasticitätsverhältnisse äolotroper Substanzen¹ ergab sich behufs Entscheidung der wichtigen Frage, wann in krystallinen Substanzen die Deformationshauptaxen mit den Hauptdruckaxen übereinstimmen, die Nothwendigkeit, für zwei Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, deren allgemeine Gleichungen gegeben sind, jene Beziehungen zwischen den Coëfficienten dieser Gleichung aufzustellen, die in dem Falle nothwendig und hinreichend sind, wenn die Hauptaxen der einen Fläche mit jenen der anderen gleichgerichtet sind. Da nun, soweit dies mir bekannt ist, dieses Problem in den Handbüchern der analytischen Geometrie nicht behandelt ist, so erlaube ich mir, das von mir gefundene Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen, deren auf irgend ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Mittelpunktsgleichungen

$$\begin{aligned} a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2 + 2b_{xy} yz + 2b_{yz} zx + 2b_{zx} xy &= d \\ a'_x x^2 + a'_y y^2 + a'_z z^2 + 2b'_{xy} yz + 2b'_{yz} zx + 2b'_{zx} xy &= d' \end{aligned} \quad (1)$$

sind, hier bekannt zu machen.

Dieses Kriterion findet seinen Ausdruck in den drei Gleichungen

¹ »Über die allgemeinsten Beziehungen endlicher Deformationen zu den zugehörigen Spannungen in anisotropen und isotropen Substanzen«. Diese Sitzungsber., 1894 (Octoberheft).

$$\left. \begin{aligned} u &= \left| \begin{array}{cc} a_y - a_z & b_x \\ a'_y - a'_z & b'_x \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} b_y & b_z \\ b'_y & b'_z \end{array} \right| = 0 \\ v &= \left| \begin{array}{cc} a_z - a_x & b_y \\ a'_z - a'_x & b'_y \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} b_z & b_x \\ b'_z & b'_x \end{array} \right| = 0 \\ w &= \left| \begin{array}{cc} a_x - a_y & b_z \\ a'_x - a'_y & b'_z \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} b_x & b_y \\ b'_x & b'_y \end{array} \right| = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Um zunächst nachzuweisen, dass diese drei Gleichungen für die Coaxialität der beiden Flächen (1) nothwendig sind, hat man nur etwa auszugehen von den auf die Hauptaxen ξ, η, ζ dieser Flächen bezogenen Gleichungen derselben, welche auf die Form

$$\left. \begin{aligned} a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 &= d \\ a'\xi^2 + b'\eta^2 + c'\zeta^2 &= d' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gebracht werden können, wo, wenn $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$, $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die Richtungscosinus der der Annahme zufolge beiden Flächen gemeinsamen Axenrichtungen ξ, η, ζ bezeichnen,

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a\alpha_x^2 + b\beta_x^2 + c\gamma_x^2, & b_x &= a\alpha_y\alpha_z + b\beta_y\beta_z + c\gamma_y\gamma_z \\ a_y &= a\alpha_y^2 + b\beta_y^2 + c\gamma_y^2, & b_y &= a\alpha_z\alpha_x + b\beta_z\beta_x + c\gamma_z\gamma_x \\ a_z &= a\alpha_z^2 + b\beta_z^2 + c\gamma_z^2, & b_z &= a\alpha_x\alpha_y + b\beta_x\beta_y + c\gamma_x\gamma_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} a'_x &= a'\alpha_x^2 + b'\beta_x^2 + c'\gamma_x^2, & b'_x &= a'\alpha_y\alpha_z + b'\beta_y\beta_z + c'\gamma_y\gamma_z \\ a'_y &= a'\alpha_y^2 + b'\beta_y^2 + c'\gamma_y^2, & b'_y &= a'\alpha_z\alpha_x + b'\beta_z\beta_x + c'\gamma_z\gamma_x \\ a'_z &= a'\alpha_z^2 + b'\beta_z^2 + c'\gamma_z^2, & b'_z &= a'\alpha_x\alpha_y + b'\beta_x\beta_y + c'\gamma_x\gamma_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ist.

Aus diesen Werthen (4) und (5) ergibt sich nach einer einfachen Reduction, dass, wenn durch s die Summe

$$s = a'(b-c) + b'(c-a) + c'(a-b)$$

bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} (a_y - a_z) \cdot b'_x - b_x (a'_y - a'_z) &= s \cdot \alpha_x \beta_x \gamma_x = b_y b'_z - b_z b'_y \\ (a_z - a_x) \cdot b'_y - b_y (a'_z - a'_x) &= s \cdot \alpha_y \beta_y \gamma_y = b_z b'_x - b_x b'_z \\ (a_x - a_y) \cdot b'_z - b_z (a'_x - a'_y) &= s \cdot \alpha_z \beta_z \gamma_z = b_x b'_y - b_y b'_x \end{aligned}$$

ist, wodurch die Nothwendigkeit der Gleichungen (2) nachgewiesen ist.

Um auch nachzuweisen, dass die Voraussetzung der Bedingungsgleichungen (2) für die Coaxialität der Flächen (1) hinreichend ist, benütze man die Gleichungen (4), welche ausdrücken, dass $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$, $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die Richtungs-cosinus der Axenrichtungen $\xi \eta \zeta$ der ersten der beiden Flächen (1) sind, wofern die erste der Gleichungen (3) die auf diese Axen $\xi \eta \zeta$ bezogene Gleichung dieser Fläche ist.

Aus diesen Gleichungen (4) folgt zunächst

$$\left. \begin{aligned} A_x &= a_y a_z - b_x^2 = bc \cdot \alpha_x^2 + ca \cdot \beta_x^2 + ab \cdot \gamma_x^2 \\ A_y &= a_z a_x - b_y^2 = bc \cdot \alpha_y^2 + ca \cdot \beta_y^2 + ab \cdot \gamma_y^2 \\ A_z &= a_x a_y - b_z^2 = bc \cdot \alpha_z^2 + ca \cdot \beta_z^2 + ab \cdot \gamma_z^2 \\ B_x &= b_y b_z - a_x b_x = bc \cdot \alpha_y \alpha_z + ca \cdot \beta_y \beta_z + ab \cdot \gamma_y \gamma_z \\ B_y &= b_z b_x - a_y b_y = bc \cdot \alpha_z \alpha_x + ca \cdot \beta_z \beta_x + ab \cdot \gamma_z \gamma_x \\ B_z &= b_x b_y - a_z b_z = bc \cdot \alpha_x \alpha_y + ca \cdot \beta_x \beta_y + ab \cdot \gamma_x \gamma_y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Bildet man mit Zuhilfenahme der Gleichungen (2) die Summen $a_x u + b_z v + b_y w$, $b_z u + a_y v + b_x w$, $b_y u + b_x v + a_z w$, so gelangt man, da $A_x = a_y a_z - b_x^2$, $A_y = a_z a_x - b_y^2$, ... ist, zu den mit (2) ähnlich lautenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} U &= \left| \begin{array}{cc} A_y - A_z, B_x \\ a'_y - a'_z, b'_x \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} B_y B_z \\ b'_y b'_z \end{array} \right| = 0 \\ V &= \left| \begin{array}{cc} A_z - A_x, B_y \\ a'_z - a'_x, b'_y \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} B_z B_x \\ b'_z b'_x \end{array} \right| = 0 \\ W &= \left| \begin{array}{cc} A_x - A_y, B_z \\ a'_x - a'_y, b'_z \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} B_x B_y \\ b'_x b'_y \end{array} \right| = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Werden nun durch u_a , u_b , u_c , v_a ... kürzshalber die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} u_a &= -\alpha_y \alpha_z (a'_y - a'_z) + (\alpha_y^2 - \alpha_z^2) b'_x + \alpha_x \alpha_y b'_y - \alpha_z \alpha_x b'_z \\ u_b &= -\beta_y \beta_z (a'_y - a'_z) + (\beta_y^2 - \beta_z^2) b'_x + \beta_x \beta_y b'_y - \beta_z \beta_x b'_z \\ u_c &= -\gamma_y \gamma_z (a'_y - a'_z) + (\gamma_y^2 - \gamma_z^2) b'_x + \gamma_x \gamma_y b'_y - \gamma_z \gamma_x b'_z \\ v_a &= -\alpha_z \alpha_x (a'_z - a'_x) + (\alpha_z^2 - \alpha_x^2) b'_y + \alpha_y \alpha_z b'_z - \alpha_x \alpha_y b'_x \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

bezeichnet, welche ähnlich gebildet sind, wie die Ausdrücke (2) und (7), so ersieht man aus denselben und aus den Werthen (4) und (6), dass

$$\begin{aligned}u &= au_a + bu_b + cu_c, & v &= av_a + bv_b + cv_c, \\w &= aw_a + bw_b + cw_c; \\U &= bcu_a + cau_b + abu_c, & V &= bcv_a + cav_b + abv_c, \\W &= bcw_a + caw_b + abw_c.\end{aligned}$$

ist. Demgemäss ist den Gleichungen (8), (7) und (2) zufolge

$$\left. \begin{aligned}u_a + u_b + u_c &= 0 \\a \cdot u_a + b \cdot u_b + c \cdot u_c &= 0 \\bc \cdot u_a + ca \cdot u_b + ab \cdot u_c &= 0\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und dieselben Gleichungen (9) bestehen auch, wenn u_r durch v_r oder durch w_r ersetzt wird.

Sind nun abc von einander verschieden, so folgt aus diesen Gleichungen, dass nothwendigerweise alle u_r , v_r und w_r verschwinden müssen, also z. B. $u_a = 0$, $v_a = 0$ und $w_a = 0$, daher nach (8)

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_x a'_x + \alpha_y b'_z + \alpha_z b'_y}{\alpha_x} &= \frac{\alpha_x b'_z + \alpha_y a'_y + \alpha_z \cdot b'_x}{\alpha_y} = \\&= \frac{\alpha_x b'_y + \alpha_y \cdot b'_x + \alpha_z \cdot a'_z}{\alpha_z}\end{aligned} \quad (10)$$

ist, welche bekannte Beziehung sofort erkennen lässt, dass die Axe ξ , deren Richtungscosinus $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ sind, auch eine Axe der zweiten Fläche (1) ist — und in gleicher Weise folgt aus $u_b = v_b = w_b = 0$, beziehungsweise aus $u_c = v_c = w_c = 0$, dass auch η , beziehungsweise ζ eine Hauptaxe derselben Fläche ist.

Sind dagegen zwei von den Grössen abc einander gleich, etwa $b = c$, also die erste der Flächen (1) eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe ξ ist, so folgt aus den Gleichungen (9) unmittelbar, dass entweder $a = b = c$, also die letztere Fläche eine Kugelfläche ist, in welchem Falle jedenfalls eine Co-

axialität der beiden Flächen (1) besteht, oder dass $u_a = 0$ und in gleicher Weise $v_a = 0$, $w_a = 0$ ist, demnach die Doppelgleichung (10) statthat, aus welcher Doppelgleichung zu folgern ist, dass diese Rotationsaxe ξ mit einer Axe der zweiten Fläche (1) gleichgerichtet ist und daher die beiden anderen Axen dieser letzteren Fläche in die Richtung zweier Äquatorialdurchmesser der ersteren Rotationsfläche fallen, so dass auch in diesem Falle die beiden Flächen (1) coaxial sind.

XXIV. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1894.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag begonnene, im Universitätslaboratorium in Göttingen zu Ende geführte Arbeit des seither verstorbenen Dr. Heinrich Mach, betitelt: »Untersuchungen über Abietinsäure« (II. Mittheilung).

Herr Ingenieur H. Guzmann, Professor an der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beschreibung und zugehörige Skizzen eines neuen Grundprincipes der Construction von Schiffsrädern und Schiffsschrauben«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht den fünften Theil seiner Pflanzenphysiologischen Mittheilungen aus Buitenzorg unter dem Titel: »Studien über die Anisophyllie tropischer Gewächse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung von Dr. Josef Lartschneider, em. Assistent der II. anatomischen Lehrkanzel an der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Die Steissbeinmuskeln des Menschen und ihre Beziehungen zum M. Levator ani und zur Beckenfascie (eine vergleichend anatomische Studie)«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn Paul Cohn: »Über einige Derivate des Phenyloxazens«.

XXV. SITZUNG VOM 29. NOVEMBER 1894.

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvators, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übermittelte Druckwerk: »Die Liparischen Inseln. VIII. Allgemeiner Theil« vor.

Ferner legt der Secretär den 44. Jahrgang des Almanach der kaiserl. Akademie für das Jahr 1894 und das erschienene Heft VIII (October 1894), Abtheilung II. a. des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner geologischen Forschungen in der südlichen europäischen Türkei aus den Erträgnissen der Boué-Stiftung bewilligte Reisesubvention; desgleichen dankt Herr Prof. Dr. Ed. Richter in Graz für eine ihm zum Zwecke des Studiums der Terrainformen in der Hochregion des scandinavischen Gebirges von der Akademie gewährte Reisesubvention.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Alexander Bauer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz von Dr. G. v. Georgievics: »Über das Wesen des Färbeprocesses.«

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Beiträge zur Kenntniss der Laubmoosflora des Hochgebirgstheiles der Sierra Nevada in Spanien«, von Prof. Dr. F. v. Höhnelt an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

2. »Die Wirkungsweise der Condensatoren im Wechselstromkreise«, von Dr. Gustav Benischke in Innsbruck.
3. Einige Bemerkungen zu J. Finger's Abhandlung: »Das Potential der inneren Kräfte etc. (I.)«, von Prof. Dr. Waldemar Voigt in Göttingen.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht folgende zwei im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten:

1. »Studien über Quercetin und seine Derivate« (X. Abhandlung), von Dr. J. Herzig.
2. »Über die Einwirkung von Alkalien auf bromirte Phloroglucinderivate«, von J. Herzig und J. Pollak.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Ernst Roithner: »Zur Kenntniss des Äthylenoxydes«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

- Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. VIII. Allgemeiner Theil. Prag, 1894; Folio.
- Le Musée Bohême, Système silurien du centre de la Bohême par Joachim Barrande. I^{ère} Partie: Recherches Paléontologiques. Continuation éditée par le Musée Bohême. Vol. VIII. Tome I^{er}. *Bryozoaires, Hydrozoaires* et partie des *Anthozoaires* par Ph. Počta. (Text et 21 Planches.) (De la part du Musée Bohême conformément au désir exprimé par Joachim Barrande dans son testament.) Prague, 1894; 4°.
- Haeckel, E., Systematische Phylogenie der Protisten und Pflanzen. I. Theil des Entwurfs einer systematischen Phylogenie. Berlin, 1894; 8°.

Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Finger's Abhandlung „Das Potential der inneren Kräfte etc.“

von

W. Voigt.

Die von Herrn J. O. Thompson im Jahre 1891 veröffentlichten Beobachtungen¹ über die elastischen Dehnungen von Drähten haben mehrfache Aufmerksamkeit dadurch erregt, dass der Verfasser schon bei sehr kleinen Dehnungen — sie betrugen im Maximum noch nicht 67 *mm* bei einer Gesamtlänge der Drähte von 22700 *mm* — bedeutende Abweichungen von der Proportionalität zwischen der Grösse der Dehnung und derjenigen des streckenden Gewichtes erhielt. Da ich bei zahlreichen elastischen Messungen, die sich auf Biegung und Torsion von Prismen — auch von Metallen — bezogen, der Frage der Proportionalität grosse Aufmerksamkeit zugewandt, aber Abweichungen von irgend welchem Belang nicht erhalten hatte, so bot sich mir naturgemäss die Frage nach der Ursache der Abweichungen zwischen den von Herrn Thompson und den von mir erhaltenen Beobachtungsergebnissen. Die Behandlung dieser Aufgabe habe ich in zwei im Juli 1893² und Januar 1894³ verfassten Arbeiten geliefert und den Inhalt dieser Abhandlungen später zusammengefasst an einer anderen Stelle⁴ publicirt.

¹ Wied. Ann. Bd. 44, S. 555, 1891.

² Götting. Nachr. 1893, Nr. 13.

³ Götting. Nachr. 1894, Nr. 1.

⁴ Wied. Ann. Bd. 52, S. 536, 1894.

Gegen den Inhalt der ersten dieser Arbeiten hat Herr Jos. Finger,¹ der etwa gleichzeitig mit mir dieselbe Frage in Angriff genommen hat, schwere Bedenken erhoben, und ich sehe mich genöthigt, auf dieselben kurz einzugehen. Ein Theil der gemachten Einwände ist allerdings durch meine oben genannte zweite Abhandlung, die Herr Finger nicht kennen konnte, da sie fast genau zu derselben Zeit publicirt ist, wie die seinige, im Voraus erledigt worden; andere beruhen auf leicht erkennbarem Missverstehen meiner Worte; immerhin bleibt bestehen, dass Herr Finger für die Componenten der elastischen Drucke wesentlich complicirtere Ausdrücke erhält, als ich, und die seinigen als richtig, die meinigen als falsch bezeichnet.

Eine einfache Überlegung zeigt nun aber, dass die Aufgabe, die sich Herr Finger gestellt hat, überhaupt eine andere ist, als die, um deren Lösung ich mich bemüht habe.

Die ältere Elasticitätstheorie setzt Deformationen von solcher Kleinheit voraus, dass die Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten — welche reine Zahlen sind — neben Eins vernachlässigt werden können. Es versteht sich also von selbst, dass bei Beobachtungen, deren Genauigkeit grösser ist, als der Werth der Deformationsgrössen, die Resultate der Theorie, vor allem die Proportionalität zwischen den wirkenden Kräften und den erzielten Deformationsgrössen, durch die Beobachtung nicht bestätigt werden können. Diese Abweichungen will ich daher die nothwendigen nennen.

Was mich an den Thompson'schen Resultaten besonders interessirte, weil es scheinbar im Widerspruch mit den Erwartungen und mit den Resultaten meiner zahlreichen und mühsamen Beobachtungen stand, war indessen etwas anderes: die Abweichungen von der Proportionalität zwischen Deformationen und Kräften unter Umständen, wo die Deformationsgrössen neben Eins vernachlässigt werden durften. Auf solche Verhältnisse bezogen sich nämlich alle meine Beobachtungen, die — schon unter dem Zwang der Zerbrechlichkeit der Krystallstäbchen — Deformationen unterhalb $1/1000$ und eine Genauigkeit von etwa demselben Betrag benutzten. Diese

¹ Wiener Ber. Bd. 103, Abth. II a, S. 163, 1894.

Abweichungen könnte man als unerwartete bezeichnen, und auf ihre Untersuchung beziehen sich ersichtlicher Weise ganz allein meine Abhandlungen. So sage ich in der Einleitung: »Nachdem durch neuere Beobachtungen gezeigt ist, dass man unter Umständen, wo man früher die Giltigkeit der alten Formeln für selbstverständlich hielt, bereits erhebliche Abweichungen von der Proportionalität.... findet, scheint es angemessen, die Erweiterungen zu untersuchen, welche die ältere Theorie erfahren muss, um mit jenen Resultaten in Einklang zu kommen.« Die (erst hier) gesperrt gedruckten Worte charakterisiren vielleicht zu kurz, aber doch ziemlich deutlich das gestellte Problem, womit übereinstimmt, dass bei der Entwicklung desselben Resultate benutzt werden, in denen die Deformationsgrössen selbst neben Eins vernachlässigt sind.

Hiermit steht aber keineswegs im Widerspruch, dass ich in dem elastischen Potential die Glieder dritten Grades neben denen zweiten Grades eingeführt habe; denn die ersteren sind mit Constanten multiplicirt, welche von den Factoren der letzteren unabhängig sind und jedenfalls bei den Thompson'schen Beobachtungen eine solche Grösse gehabt haben, dass jene Glieder eine merkliche Wirkung äussern konnten.

Um dies hervortreten zu lassen, will ich aus den auf Messing bezüglichen Beobachtungsreihen, die übrigens den andern völlig gleichwerthig sind, einige Resultate zusammenstellen. Die erste Columne enthielt die angewandten Belastungen, die zweite die Mittelwerthe der beobachteten Dehnungen, die dritte die Differenzen der aufeinander folgenden Werthe der letzteren, d. h. also, die bei den verschiedenen Anfangsbelastungen bei 0·2 *kg* Übergewicht eintretenden Dehnungen.

0·2 <i>kg</i>	7·111 <i>mm</i>	7·111 <i>mm</i>
0·4	14·269	7·158
0·6	21·489	7·220
0·8	28·772	7·283
1·0	36·124	7·352 u. s. f.

Beachtet man, dass die Gesamtlänge des benutzten Drahtes 22700 *mm* war, so erkennt man, dass bei den vor-

stehenden Beobachtungen die Abweichungen von der Proportionalität um das Vielfache grösser waren, als die Beträge der Dilatationen, woraus die Berechtigung der von mir gewählten Fragestellung offenbar folgt.

Nachdem somit die specielle, aber in sich völlig abgeschlossene Aufgabe charakterisirt ist, die ich mir gestellt hatte, ist der Unterschied gegenüber der von Herrn Finger in Angriff genommenen leicht auszusprechen; am kürzesten in der Form, dass Herr Finger die Gesetze nicht nur jener unerwarteten, sondern auch der oben als nothwendig bezeichneten Abweichungen zum Ziel seiner Entwicklung gewählt hat. In der That geht er von der Annahme von Deformationen aus, die neben der Einheit nicht zu vernachlässigen sind.

Dass diese umfassendere Aufgabe zu complicirteren Resultaten führen muss, als die von mir behandelte speciellere, ist klar; jedenfalls müssen die von Herrn Finger abgeleiteten Werthe der Druckkräfte in die meinigen übergehen, wenn man die Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten neben Eins vernachlässigt. Dies findet wirklich statt, und damit ist die Vereinbarkeit unserer beiderseitigen Resultate jedenfalls erwiesen.

Göttingen im November 1894.

Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aeolotropen und isotropen Substanzen¹

von

Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Bei einer jeden homogenen Deformation irgend eines Punktsystems ist, wenn man von dessen translatorischer Bewegung absieht,

$$\left. \begin{aligned} x_t &= a_{11}x_0 + a_{21}y_0 + a_{31}z_0 \\ y_t &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{32}z_0 \\ z_t &= a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wofern durch $(x_0 y_0 z_0)$ die anfänglichen und durch $(x_t y_t z_t)$ die zur beliebigen Zeit t bestehenden, auf ein an der translatorischen Bewegung des Punktsystems theilnehmendes Axensystem bezogenen Coordinaten irgend eines Punktes dieses Punktsystems bezeichnet sind und wofern die Coëfficienten

¹ Da sich in dieser Abhandlung öfter die Nothwendigkeit ergibt, auf zwei frühere Abhandlungen desselben Verfassers, nämlich

Finger, Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbarer Flächen zweiter Ordnung (diese Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a, Mai 1892, S. 1105—1142) und

Finger, Das Potential der inneren Kräfte u. s. w., I. und II. Theil (diese Sitzungsber., Bd. CIII, Abth. II. a, Februar 1894, S. 163—200 und April 1894, S. 231—250),

hinzuweisen, so soll kürzshalber für die erste dieser Abhandlungen stets das Citat W. S. 1892, für die letztere W. S. 1894 zur Anwendung kommen.

$a_{11}a_{21}\dots$ irgend welche Functionen der Zeit sind, die jedoch von $x_0y_0z_0$ nicht abhängen.

Bekanntlich kann nun eine jede Deformation eines beliebigen unendlich kleinen Körperelementes, dessen anfängliches Volum durch dv bezeichnet sei, als eine homogene angesehen werden, wofern die anfänglichen — auf ein an der Bewegung des Körpers nicht theilnehmendes orthogonales Axensystem sich beziehenden — Coordinaten (xyz) irgend eines Punktes m dieses Körperelementes durch diese Deformation, durch welche m zur Zeit t nach M gelangen möge, stets nur solche Werthe $X = x + \xi$, $Y = y + \eta$, $Z = z + \zeta$ erlangen, für welche die Componenten ξ, η, ζ der stattgefundenen Verschiebung mM dauernd stetige Functionen der anfänglichen Lage (xyz) und der Zeit t sind — und zwar ist dann, wie bekannt, in (1) $(x_0y_0z_0)$ durch (dx, dy, dz) , ferner $(x_t y_t z_t)$ durch (dX, dY, dZ) zu ersetzen¹ und die Coëfficienten $a_{11}a_{21}\dots$ haben dann die Werthe:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 + \lambda_x, & a_{21} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu_z, & a_{31} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} = \mu_y \\ a_{12} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu_z, & a_{22} &= 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 + \lambda_y, & a_{32} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} = \nu_x \\ a_{13} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu_y, & a_{23} &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mu_x, & a_{33} &= 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 1 + \lambda_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo durch $\lambda_x \mu_x \nu_x \dots$ kürzshalber die entsprechenden Verschiebungsderivationen, d. i. die partiellen Differentialquotienten der Componenten $\xi \eta \zeta$ der Verschiebung bezeichnet sind.

In der allgemeinen Elasticitätstheorie sind von ganz hervorragender Bedeutung sechs Functionen $(a_x a_y a_z b_x b_y b_z)$, beziehungsweise $(a_x a_y a_z b_x b_y b_z)$ der eben betrachteten neun Coëfficienten $a_{11} \dots a_{33}$ der Grundgleichungen (1), nämlich:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 + 2a_x \\ a_y &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 + 2a_y \\ a_z &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 + 2a_z \\ b_x &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ b_y &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} \\ b_z &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹ Siehe Finger, W. S. 1894, S. 165 und 166.

George Green¹ war der erste, der diese sechs Functionen $a_x \dots b_z$ in Betracht gezogen und nicht nur gezeigt hat, dass die Deformation eines Körperelementes (abgesehen von dessen Drehung) in jedem Falle durch diese sechs Grössen (die Green durch $a^2 b^2 c^2 \alpha' \beta' \gamma'$ bezeichnet) vollständig bestimmt ist, sondern der auch klar erkannt hat, dass das Potential dU der inneren Kräfte (das »elastische Potential«) bei einer jeden Deformation irgend eines Körperelementes dv durch

$$dU = f \cdot dv \quad (4)$$

ausgedrückt ist, wobei die Potentialfunction² f (von Green durch φ bezeichnet), mag die Deformation und das Körperelement welcher Art auch immer sein, stets nur eine Function dieser sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ ist.

In Kürze sei auch auf die ferneren Untersuchungen über denselben Gegenstand, welche von Saint Vénant³ — dessen Behauptung, dass durch $a_x = \frac{1}{2} (a_x - 1)$, $a_y = \frac{1}{2} (a_y - 1)$, $a_z = \frac{1}{2} (a_z - 1)$ die linearen Dilatationen in den zu den Coordinatenachsen parallelen Richtungen und durch $b_x b_y b_z$ die entsprechenden Masse der Schiebungen (fr. glissements, engl.

¹ George Green, On the propagation of light in crystallized media (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1839). — Green, On the laws of reflexion and refraction of light (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1838). — Siehe auch Mathematical Papers of George Green, edited by N. M. Ferrers (London 1871), p. 249, 296, 297.

² Es muss ausdrücklich bemerkt werden, dass hier und auch späterhin stets als »Potential« dU jene Function bezeichnet ist, deren dem Zeitelemente dt entsprechendes Differential $df \cdot dv$ die von den inneren Kräften in diesem Zeitelemente dt geleistete mechanische Arbeit ausdrückt. Wird dagegen, wie dies häufig geschieht, das Potential $U = \int f \cdot dv$ mit »potenzieller Energie« identificirt, so ist in den folgenden Gleichungen, besonders in (15), (17) u. s. w. statt f überall zu setzen ($-f$).

³ Saint Vénant, Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leur points ne sont pas très-petites. Comptes rendus, vol. XXIV (1847), p. 260—263.

slides) bestimmt sind, nur eine beschränkte Giltigkeit hat,¹ nämlich nur für den besonderen Fall, dass die zweiten und die höheren Potenzen der Verschiebungsderivationen $\lambda_x \mu_z \dots$ vernachlässigt werden — ferner von Lord Kelvin (W. Thomson),² Boussinesq³ herrühren, hingewiesen.

Die geometrische Bedeutung dieser sechs Grössen $a_x \dots b_z$ erhellt aus folgender Betrachtung:

Es seien durch $A_{11} A_{12} \dots A_{33}$ die zu $a_{11} a_{12} \dots a_{33}$ adjungirten Unterdeterminanten der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \lambda_x & \mu_z & \nu_y \\ \nu_z & 1 + \lambda_y & \mu_x \\ \mu_y & \nu_x & 1 + \lambda_z \end{vmatrix} \quad (5)$$

bezeichnet. Wie aus (1) unmittelbar zu ersehen ist, liegen bekanntlich jene Punkte, welche anfänglich auf einer Kugel- fläche gelegen sind, deren Mittelpunkt m und deren Radius 1 ist, zur Zeit t in jenem Ellipsoid — dem sogenannten Deformationsellipsoid —, dessen Mittelpunkt M und dessen Gleichung ist

$$(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z)^2 + (A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z)^2 + (A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z)^2 = D^2, \quad (6)$$

wofern diese Gleichung bezogen wird auf die durch den Punkt M parallel zu den früheren Coordinatenaxen gelegten Axen.

Die Halbaxen a, b, c dieses Ellipsoids, welche die Richtungen ξ', η', ζ' der sogenannten Deformationshauptaxen

¹ Siehe Todhunter and Pearson, A History of the Theory of Elasticity (Cambridge 1886—1893), vol. I, p. 865—867.

² W. Thomson, Equations of Equilibrium of an elastic solid deduced from the Principle of Energy. Appendix to Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of incompressible liquid (Philos. Transactions, 1863, vol. 153, p. 610). — Sir Will. Thomson, Mathematical and Physical Papers (vol. III, p. 386—394). — Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, II. Edit., part. II, p. 462.

³ Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, tome XX, Paris 1872, p. 592).

haben, genügen, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Hauptdilatationen bedeuten, den Gleichungen

$$a = 1 + \lambda_1, \quad b = 1 + \lambda_2, \quad c = 1 + \lambda_3. \quad (7)$$

Das dem Deformationsellipsoid (6) adjungirte¹ Ellipsoid, dessen Halbaxen mit den Axen ξ', η', ζ' gleichgerichtet sind und die Längen $\frac{1}{1+\lambda_1}, \frac{1}{1+\lambda_2}, \frac{1}{1+\lambda_3}$ besitzen, ist jenes, dessen auf dieselben Axen bezogene Gleichung lautet:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 = 1. \quad (8)$$

Das dieser Fläche (8) congruente und derselben conjungirte² Ellipsoid ist in Bezug auf dieselben Axen durch die Gleichung bestimmt:

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^2 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^2 + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^2 = 1. \quad (9)$$

Es ist dies — den Gleichungen (1) zufolge — jenes Ellipsoid, welches anfänglich alle jene Punkte in sich enthält, die zur Zeit t in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt M und deren Halbmesser 1 ist. Beachtet man die Werthe (3) der sechs Grössen $a_x \dots b_z$, so ersieht man, dass die Gleichung des letzten Ellipsoids (9), dessen Axenrichtungen durch ξ, η, ζ bezeichnet seien, auch die Form annehmen kann:

$$a_x \cdot x^2 + a_y \cdot y^2 + a_z \cdot z^2 + 2b_x \cdot yz + 2b_y \cdot zx + 2b_z \cdot xy = 1, \quad (9')$$

woraus sofort die geometrische Bedeutung der Grössen $a_x \dots b_z$ ersichtlich ist.

Die cubische Dilatation v des betrachteten Körperelementes, dessen Volum zur Zeit t durch dV bezeichnet sei, ist³

¹ Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1107 und 1112.

² Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1116.

³ Siehe Finger, W. S. 1894, S. 167 und 184.

$$\nu = \frac{dV-dv}{dv} = D - 1 = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) - 1 = abc - 1 \quad (10)$$

und die aus den Coëfficienten der Gleichung (9') gebildete Determinante ¹

$$A = \begin{vmatrix} a_x & b_z & b_y \\ b_z & a_y & b_x \\ b_y & b_x & a_z \end{vmatrix} = D^2 = a^2 b^2 c^2 = (1+\lambda_1)^2 (1+\lambda_2)^2 (1+\lambda_3)^2 = (1+\nu)^2. \quad (11)$$

Die den einzelnen Gliedern $a_x \dots b_z$ dieser Determinante entsprechenden, denselben adjungirten Unterdeterminanten $A_x \dots B_z$ entsprechen zufolge (3) den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A_x &= a_y a_z - b_x^2 = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 \\ A_y &= a_z a_x - b_y^2 = A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 \\ A_z &= a_x a_y - b_z^2 = A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 \\ B_x &= b_y b_z - b_x a_x = A_{21} A_{31} + A_{22} A_{32} + A_{23} A_{33} \\ B_y &= b_z b_x - b_y a_y = A_{31} A_{11} + A_{32} A_{12} + A_{33} A_{13} \\ B_z &= b_x b_y - b_z a_z = A_{11} A_{21} + A_{12} A_{22} + A_{13} A_{23} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

und zwar sind dies die Coëfficienten der Gleichung des dem Deformationsellipsoid (6) congruenten und demselben conjugirten Ellipsoids:

$$A_x \cdot x^2 + A_y \cdot y^2 + A_z \cdot z^2 + 2 B_x \cdot yz + 2 B_y \cdot zx + 2 B_z \cdot xy = D^2, \quad (13)$$

dessen Halbaxen abc in die Richtungen der Axen $\xi\eta\zeta$ fallen.

Die in Betracht gezogene, durch die Gleichungen (1) bestimmte Deformation kann man bekanntlich zerlegen in eine reine Deformation, bei welcher nur eine einfache Dilatation (beziehungsweise Contraction) im Betrage $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ nach den Richtungen der drei Axen $\xi\eta\zeta$ stattfindet und durch welche die Kugel fläche vom Radius 1 die Form des Ellipsoids (13) annimmt, und in eine Rotation um irgend eine Axe C , deren Richtungscosinus durch $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$ bezeichnet seien, durch

¹ Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1106 und 1112.

welche Rotation das Ellipsoid (13) nach einer Drehung ϑ in die schliessliche Lage des Deformationsellipsoids (6), das Ellipsoid (9) oder (9') in die Lage (8), kurz das Axensystem $\xi\eta\zeta$ in die Lage des Axensystems $\xi'\eta'\zeta'$ gelangt.

Noch anschaulicher wird die geometrische Bedeutung der sechs in Betracht kommenden Grössen $a_x \dots b_z$ durch die Betrachtung jenes Tetraëders, dessen anfänglich vom Punkte m ausgehenden Kanten mm_1, mm_2, mm_3 mit den Axen xyz gleichgerichtet und der Längeneinheit gleich sind. Die Eckpunkte m, m_1, m_2, m_3 dieses Tetraëders gelangen durch die ins Auge gefasste Deformation zur Zeit t in solche Lagen MM_1, M_2, M_3 , für welche die relativen Coordinaten der Punkte M_1 , beziehungsweise M_2 , beziehungsweise M_3 in Bezug auf ein durch M parallel zu xyz gelegtes Axensystem den Gleichungen (1) zufolge die Werthe $(a_{11} a_{12} a_{13})$, beziehungsweise $(a_{21} a_{22} a_{23})$, beziehungsweise $(a_{31} a_{32} a_{33})$ besitzen, so dass für die nunmehrigen Kanten $\overline{MM_1} = R_1, \overline{MM_2} = R_2, \overline{MM_3} = R_3$ und ihre Neigungswinkel $(R_2 R_3), (R_3 R_1), (R_1 R_2)$ sich aus (3) folgende Werthe ergeben:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= R_1^2, & a_y &= R_2^2, & a_z &= R_3^2 \\ b_x &= R_2 R_3 \cos(R_2 R_3), & b_y &= R_3 R_1 \cos(R_3 R_1), \\ b_z &= R_1 R_2 \cos(R_1 R_2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Es sind somit durch die Längen und gegenseitigen Lagen der Kanten des durch die betrachtete Deformation aus dem ursprünglichen Tetraëder $mm_1 m_2 m_3$ entstandenen Tetraëders $MM_1 M_2 M_3$, dessen Volum nach (5) $\frac{1}{6} D$ ist, die sechs Grössen $a_x \dots b_z$ bestimmt und umgekehrt.

Um nun die der betrachteten Deformation entsprechenden Componenten $X_x Y_y \dots Z_z$ der Spannung zu ermitteln, hat man auszugehen von den allgemein giltigen Gleichungen:¹

¹ Diese neun Gleichungen wurden zuerst von Carl Neumann aufgestellt. Siehe C. Neumann, Zur Theorie der Elasticität (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, 1860, S. 281—318). Diese Gleichungen wurden auch vom Verfasser in einer einfachen, von Neumann's Deduction völlig verschiedenen Weise abgeleitet. Siehe Finger, W. S. 1894, S. 174.

u. s. w. Führt man diese Werthe in (15) ein, so findet man:

$$\left. \begin{aligned}
 D.X_x &= a_{11}^2 \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_{21}^2 \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_{31}^2 \frac{\partial f}{\partial a_z} + 2a_{21}a_{31} \frac{\partial f}{\partial b_x} + 2a_{31}a_{11} \frac{\partial f}{\partial b_y} + 2a_{11}a_{21} \frac{\partial f}{\partial b_z} \\
 D.Y_y &= a_{12}^2 \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_{22}^2 \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_{32}^2 \frac{\partial f}{\partial a_z} + 2a_{22}a_{32} \frac{\partial f}{\partial b_x} + 2a_{32}a_{12} \frac{\partial f}{\partial b_y} + 2a_{12}a_{22} \frac{\partial f}{\partial b_z} \\
 D.Z_z &= a_{13}^2 \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_{23}^2 \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_{33}^2 \frac{\partial f}{\partial a_z} + 2a_{23}a_{33} \frac{\partial f}{\partial b_x} + 2a_{33}a_{13} \frac{\partial f}{\partial b_y} + 2a_{13}a_{23} \frac{\partial f}{\partial b_z} \\
 D.Y_z &= a_{12}a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_{22}a_{23} \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_{32}a_{33} \frac{\partial f}{\partial a_z} + (a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}) \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{32}a_{13} + a_{33}a_{12}) \frac{\partial f}{\partial b_y} + \\
 &\quad + (a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22}) \frac{\partial f}{\partial b_z} = D.Z_y \\
 D.Z_x &= a_{13}a_{21} \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_{23}a_{31} \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_{33}a_{31} \frac{\partial f}{\partial a_z} + (a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33}) \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{33}a_{11} + a_{31}a_{13}) \frac{\partial f}{\partial b_y} + \\
 &\quad + (a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \frac{\partial f}{\partial b_z} = D.X_z \\
 D.X_y &= a_{11}a_{12} \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_{21}a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_{31}a_{32} \frac{\partial f}{\partial a_z} + (a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}) \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{31}a_{12} + a_{32}a_{11}) \frac{\partial f}{\partial b_y} + \\
 &\quad + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) \frac{\partial f}{\partial b_z} = D.Y_x
 \end{aligned} \right\} (17)^1$$

¹ Diese Formeln wurden schon von Boussinesq gefunden. Siehe Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mémoires présentés à l'Acad. des Sciences, t. XX, Paris 1872, p. 594).

Es mögen nunmehr zunächst auf Grund dieser Gleichungen (17) die im Punkte M herrschenden Hauptdrucke (Hauptspannungen) $S_1 S_2 S_3$ der Betrachtung unterzogen werden. Bekanntlich sind die Grössen derselben stets durch die drei Wurzeln der bezüglich S cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_x - S & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - S & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - S \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Demgemäss ist

$$\left. \begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= X_x + Y_y + Z_z \\ S_2 S_3 + S_3 S_1 + S_1 S_2 &= Y_y Z_z + Z_z X_x + X_x Y_y - Y_z^2 - Z_x^2 - X_y^2 \\ S_1 S_2 S_3 &= \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Führt man in diese drei Gleichungen die Werthe (17) ein und bezeichnet man kürzshalber durch $\alpha_x \alpha_y \dots \beta_z$ die partiellen Derivationen der Potentialfunction f , nämlich

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial f}{\partial a_x} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_x}, \quad \alpha_y = \frac{\partial f}{\partial a_y} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_y}, \quad \alpha_z = \frac{\partial f}{\partial a_z} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_z} \\ \beta_x &= \frac{\partial f}{\partial b_x}, \quad \beta_y = \frac{\partial f}{\partial b_y}, \quad \beta_z = \frac{\partial f}{\partial b_z} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

und bezeichnet man schliesslich durch $A_x A_y A_z B_x B_y B_z$ die den gleichbezeichneten Gliedern $\alpha_x \alpha_y \alpha_z \beta_x \beta_y \beta_z$ adjungirten Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_z & \beta_y \\ \beta_z & \alpha_y & \beta_x \\ \beta_y & \beta_x & \alpha_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_x}, & \frac{\partial f}{\partial b_z}, & \frac{\partial f}{\partial b_y} \\ \frac{\partial f}{\partial b_z}, & \frac{\partial f}{\partial a_y}, & \frac{\partial f}{\partial b_x} \\ \frac{\partial f}{\partial b_y}, & \frac{\partial f}{\partial b_x}, & \frac{\partial f}{\partial a_z} \end{vmatrix} \quad (20)$$

so findet man mit Hilfe der Relationen (18), (17) und (3)

$$\left. \begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= \frac{1}{D} \cdot [a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z + \\ &\quad + 2b_x \beta_x + 2b_y \beta_y + 2b_z \beta_z] \\ S_2 S_3 + S_3 S_1 + S_1 S_2 &= \frac{1}{D^2} \cdot [A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z + \\ &\quad + 2B_x B_x + 2B_y B_y + 2B_z B_z] \\ S_1 S_2 S_3 &= \frac{1}{D} \cdot A = \frac{1}{D^3} \cdot AA \end{aligned} \right\} (21)$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sich in einfacher Weise aus der letzten Gleichung (18), wenn man diese mit D^3 multiplicirt und berücksichtigt, dass den Gleichungen (15) gemäss die Glieder $D \cdot X_x$, $D \cdot X_y \dots$ sich bei der Bildung des Productes aus der Determinante (5) und der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f}{\partial a_{12}} & \frac{\partial f}{\partial a_{13}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f}{\partial a_{22}} & \frac{\partial f}{\partial a_{23}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{31}} & \frac{\partial f}{\partial a_{32}} & \frac{\partial f}{\partial a_{33}} \end{vmatrix}$$

nach dem Multiplicationstheorem ergeben und dass ebenso den Gleichungen (16) zufolge die Glieder dieser letzten Determinante bei der Multiplication der Determinanten (5) und (20) erhalten werden.

Da nun sämmtliche Grössen der rechten Theile der Gleichung (21) nach (11), (12), (19), (20), sofern die Potentialfunction f als eine bekannte Function der sechs Grössen $a_x \dots b_z$ vorausgesetzt wird, bestimmbare Functionen dieser sechs Grössen sind, so lässt sich aus (21) folgern, dass auch die Grössen der Hauptspannungen (Hauptdrucke) $S_1 S_2 S_3$, gleich wie die Potentialfunction f , stets nur Functionen der sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ sind.

Die Richtungen dieser Hauptspannungen, die wohl ausserdem auch von den Richtungscosinus $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$ der Rotationsaxe C und von dem Rotationswinkel ϑ abhängen, sind bekanntlich identisch mit den Axenrichtungen der Fläche

$$X_x x^2 + Y_y \cdot y^2 + Z_z \cdot z^2 + 2 Y_z \cdot yz + 2 Z_x \cdot zx + 2 X_y \cdot xy = k, \quad (22)$$

in welcher Gleichung k eine beliebige Constante bedeutet und mittelst welcher Fläche man in bekannter Weise für eine jede Lage des Flächenelementes, für welches die Spannung ermittelt werden soll, die Grösse und Richtung der letzteren ermitteln kann.

Substituiert man in (22) die Werthe der Spannungscomponenten aus (17), so nimmt die Gleichung der Fläche (22) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} & (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a_x} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a_y} + \\ & \quad + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a_z} + \\ & + 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + \\ & + 2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_y} + \\ & + 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_z} = D \cdot k \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Um zu einer einfacheren Darstellung dieser wichtigen Fläche zweiter Ordnung, welche die Spannungen in allen Raumrichtungen in übersichtlicher Weise geometrisch anschaulich zu machen gestattet, zu gelangen, denke man sich diese Fläche (23) derart transformirt, dass durch diese Transformation die Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes dieser Fläche die Werthe

$$\left. \begin{aligned} X &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ Y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ Z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

annehmen, so dass dadurch aus der Fläche (23) jene neue Fläche zweiter Ordnung entsteht, deren auf die Axen xyz bezogene Gleichung bei Anwendung der durch (19) bestimmten Bezeichnungsweise lautet:

$$\alpha_x \cdot X^2 + \alpha_y \cdot Y^2 + \alpha_z \cdot Z^2 + 2\beta_x \cdot YZ + 2\beta_y \cdot ZX + 2\beta_z \cdot XY = D \cdot k. \quad (25)$$

Vergleicht man die Transformationsgleichungen (24) mit den die thatsächliche Deformation des betrachteten Körper-

elementes charakterisierenden Gleichungen (1), so ersieht man, dass zwischen der Transformation (24) und der thatsächlichen Deformation lediglich derselbe Unterschied stattfindet, der auch den conjungirten congruenten Flächen (8) und (9) zu Grunde liegt, die sich blos dadurch unterscheiden, dass die Axenrichtungen $\xi'\eta'\zeta'$ durch die Axenrichtungen $\xi\eta\zeta$ — und umgekehrt — ersetzt sind. Es beruht demnach diese der Deformation (1) conjungirte (blos durch die Permutation der Indices der Coëfficienten sich unterscheidende) Transformation (24) darin, dass eine Ausdehnung mit der linearen Dilatation $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ nach den Richtungen der drei Axen $\xi'\eta'\zeta'$ stattfindet und zugleich eine Rotation um die Axe $(\varphi_x\varphi_y\varphi_z)$, durch welche nach einer Drehung $(-\vartheta)$ die Axen $\xi'\eta'\zeta'$ in die Lage $\xi\eta\zeta$ gelangen. Es muss sonach umgekehrt aus der Fläche (25) die Fläche (23) dann entstehen, wenn die erste eine Drehung um die Axe $(\varphi_x\varphi_y\varphi_z)$ vollzieht, durch welche nach der Drehung ϑ die Axen $\xi\eta\zeta$ in die Lage $\xi'\eta'\zeta'$ gelangen, und wenn hierauf eine Ausdehnung dieser Fläche in den Richtungen $\xi'\eta'\zeta'$ erfolgt, deren lineare Dilatation, beziehungsweise $(1+\lambda_1)^{-1}-1$, $(1+\lambda_2)^{-1}-1$, $(1+\lambda_3)^{-1}-1$ ist.

Sind nun die Flächen (9') und (25) coaxial, also die Axen $\xi\eta\zeta$ der Fläche (9'), beziehungsweise (9) gleichgerichtet mit den Axen der Fläche (25), so müssen die Axen dieser letzteren Fläche nach der Drehung ϑ die Richtungen $\xi'\eta'\zeta'$ haben, und da sich durch die letztbetrachtete Ausdehnung in den zu den Hauptaxen parallelen Richtungen zwar die Gestalt, aber nicht die Axenrichtungen einer Fläche zweiter Ordnung ändern können, so müssen $\xi'\eta'\zeta'$ auch die Richtungen der Axen der Fläche (23) sein, es muss also auch diese Fläche (23) mit dem Deformationsellipsoid (6) und mit dem Ellipsoid (8) coaxial sein — und ebenso lässt sich umgekehrt aus der Coaxialität der Flächen (23) und (6) die Coaxialität der Flächen (25) und (9') folgern. Nun sind diese beiden letztgenannten Flächen dann, und zwar nur dann coaxial, wenn folgende drei Bedingungsgleichungen bestehen:¹

¹ Siehe J. Finger, Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. Diese Sitzungsber., 1894, Bd. CIII, S. 1061 bis 1065.

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} a_y - a_z & b_x \\ a_y - a_z & \beta_x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ \beta_y & \beta_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_z - a_x & b_y \\ a_z - a_x & \beta_y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ \beta_z & \beta_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x - a_y & b_z \\ a_x - a_y & \beta_z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Diese drei bedeutsamen Gleichungen drücken demnach auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass die Axen $\xi'\eta'\zeta'$ des Deformationsellipsoids (6), kurz die Deformationshauptaxen identisch sind mit den Axen der Fläche (23), d. i. mit den Hauptdruckaxen.

Wofern die drei Bedingungsgleichungen (26) bei irgend einer Deformation irgend eines Körperelementes nicht erfüllt sind, sind die kinematischen Hauptaxen verschieden von den dynamischen.

Bei der Anwendung der Grundgleichungen (17) für die Bestimmung der Spannungen darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass $(X_x Y_x Z_x)$, beziehungsweise $(X_y Y_y Z_y)$, beziehungsweise $(X_z Y_z Z_z)$ die Componenten der Spannung für jenes Flächenelement sind, welches im deformirten Körperelement, d. i. zur Zeit t zu der unveränderlichen (yz) -Ebene, beziehungsweise (zx) -Ebene, beziehungsweise (xy) -Ebene parallel ist, und nur unter dieser Voraussetzung ist $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$.

Will man, wie dies in besonderen Fällen Kirchhoff¹ und Andere gethan haben, die Componenten $(x_x y_x z_x)$, beziehungsweise $(x_y y_y z_y)$, beziehungsweise $(x_z y_z z_z)$ der Spannung in jenem Flächenelemente bestimmen, welches vor der hier betrachteten Deformation zur (yz) -Ebene, beziehungsweise (zx) -Ebene, beziehungsweise (xy) -Ebene parallel war, welches demgemäss zur Zeit t die Lage der Seitenebene $(MM_2 M_3)$, beziehungsweise $(MM_3 M_1)$, beziehungsweise $(MM_1 M_2)$ des

¹ Siehe Kirchhoff, Über die Bedingungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. Diese Sitzungsber., Bd. IX (1852), S. 762—773.

früher betrachteten Tetraëders hat, so hat man zu beachten, dass die Richtungscosinus $(a_1 b_1 c_1)$, beziehungsweise $(a_2 b_2 c_2)$, beziehungsweise $(a_3 b_3 c_3)$ der nach dem Inneren des Tetraëders gerichteten Normalen N_1 , beziehungsweise N_2 , beziehungsweise N_3 durch die Gleichungen: ¹

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{A_{11}} = \frac{b_1}{A_{12}} = \frac{c_1}{A_{13}} &= \frac{1}{+\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2}} = \frac{1}{+\sqrt{A_x}} \\ \frac{a_2}{A_{21}} = \frac{b_2}{A_{22}} = \frac{c_2}{A_{23}} &= \frac{1}{+\sqrt{A_y}} \\ \frac{a_3}{A_{31}} = \frac{b_3}{A_{32}} = \frac{c_3}{A_{33}} &= \frac{1}{+\sqrt{A_z}}\end{aligned}$$

bestimmt sind und dass demgemäss einer bekannten allgemein gültigen Relation zufolge

$$\begin{aligned}x_x &= X_x a_1 + X_y b_1 + X_z c_1 = \frac{X_x \cdot A_{11} + X_y \cdot A_{12} + X_z \cdot A_{13}}{\sqrt{A_x}} \\ y_x &= Y_x a_1 + Y_y b_1 + Y_z c_1 = \frac{Y_x \cdot A_{11} + Y_y \cdot A_{12} + Y_z \cdot A_{13}}{\sqrt{A_x}} \\ z_x &= Z_x a_1 + Z_y b_1 + Z_z c_1 = \frac{Z_x \cdot A_{11} + Z_y \cdot A_{12} + Z_z \cdot A_{13}}{\sqrt{A_x}} \\ x_y &= X_x a_2 + X_y b_2 + X_z c_2 = \frac{X_x \cdot A_{21} + X_y \cdot A_{22} + X_z \cdot A_{23}}{\sqrt{A_y}}\end{aligned}$$

u. s. w. ist.

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der Componenten $X_x X_y \dots$ aus (15) oder jene aus (17) ein und berücksichtigt die Gleichungen (16), so findet man folgende allgemein gültige, besonders einfache Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned}\frac{x_x}{\frac{\partial f}{\partial a_{11}}} = \frac{y_x}{\frac{\partial f}{\partial a_{12}}} = \frac{z_x}{\frac{\partial f}{\partial a_{13}}} &= \frac{1}{\sqrt{A_x}} = \frac{1}{\sqrt{a_y a_z - b_x^2}} = \frac{1}{R_2 R_3 \sin(R_2 R_3)} \\ \frac{x_y}{\frac{\partial f}{\partial a_{21}}} = \frac{y_y}{\frac{\partial f}{\partial a_{22}}} = \frac{z_y}{\frac{\partial f}{\partial a_{23}}} &= \frac{1}{\sqrt{A_y}} = \frac{1}{\sqrt{a_z a_x - b_y^2}} = \frac{1}{R_3 R_1 \sin(R_3 R_1)} \\ \frac{x_z}{\frac{\partial f}{\partial a_{31}}} = \frac{y_z}{\frac{\partial f}{\partial a_{32}}} = \frac{z_z}{\frac{\partial f}{\partial a_{33}}} &= \frac{1}{\sqrt{A_z}} = \frac{1}{\sqrt{a_x a_y - b_z^2}} = \frac{1}{R_1 R_2 \sin(R_1 R_2)}\end{aligned}\right\} (27)$$

¹ Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1109.

Diese Gleichungen, aus welchen sich $x_x x_y \dots z_z$ in einfacher Weise bestimmen lassen, lehren, dass die Differenzen $y_z - z_y$, $z_x - x_z$, $x_y - y_x$ im Allgemeinen von Null verschieden sind.¹

• In der bisherigen Untersuchung wurde das betrachtete Körperelement dv als Theil eines beliebigen Körpers betrachtet, also im Allgemeinen als anisotrop (aeolotrop) angenommen.

Ist nun dieses Körperelement, wie dies von nun an stets vorausgesetzt werden soll, isotrop, so muss die lediglich von den sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ abhängige Potentialfunction f in Folge der Isotropie von der Lage der Axen des Ellipsoids (9) vollkommen unabhängig sein. Es können daher für die Potentialfunction f von den sechs genannten Grössen, welche in ihrer Gesammtheit sowohl die Längen, als auch die Lagen der drei Hauptaxen dieses Ellipsoids eindeutig zu bestimmen gestatten und welche auch umgekehrt aus diesen Lagen und Längen in bekannter Weise vollkommen bestimmbar sind, nur jene Functionen dieser sechs Grössen massgebend sein, durch welche die Grössen der Halbaxen dieses Ellipsoids bestimmt sind.²

Diese Halbaxen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ sind aber bekanntlich genau bestimmt durch die drei Functionen

$$\begin{aligned} \sigma &= a^2 + b^2 + c^2 - 3 = a_x + a_y + a_z - 3 \\ s &= b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 - 3 = a_y a_z + a_z a_x + a_x a_y - \\ &\quad - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 - 3 = A_x + A_y + A_z - 3 \\ A &= a^2 b^2 c^2 = a_x a_y a_z - a_x b_x^2 - a_y b_y^2 - a_z b_z^2 + \\ &\quad + 2 b_x b_y b_z = D^2 = (1 + \nu)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Es ist sonach, wenn das betrachtete Körperelement isotrop ist, f blos eine Function dieser drei Grössen

¹ Vergl. H. Poincaré, Über die Elasticitätstheorie (Comptes rendus, 112 1891], S. 914 und 915).

² W. Thomson und P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy, 1883, vol. I, part II, Appendix C (k), p. 466.

σ , s und $A = D^2$, beziehungsweise eine Function von σ , s und der cubischen Dilatation v .¹

Für die partiellen Differentialquotienten (19) ergeben sich daher bei Beachtung der Gleichungen (28) nunmehr folgende Werthe:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial f}{\partial a_x} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_x} = 2 \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s} (3 + \sigma - a_x) + \frac{\partial f}{\partial A} (a_y a_z - b_x^2) \right] \\ \alpha_y &= \frac{\partial f}{\partial a_y} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_y} = 2 \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s} (3 + \sigma - a_y) + \frac{\partial f}{\partial A} (a_z a_x - b_y^2) \right] \\ \alpha_z &= \frac{\partial f}{\partial a_z} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_z} = 2 \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s} (3 + \sigma - a_z) + \frac{\partial f}{\partial A} (a_x a_y - b_z^2) \right] \\ \beta_x &= \frac{\partial f}{\partial b_x} = 2 \cdot \left[-\frac{\partial f}{\partial s} \cdot b_x + \frac{\partial f}{\partial A} (b_y b_z - b_x a_x) \right] \\ \beta_y &= \frac{\partial f}{\partial b_y} = 2 \cdot \left[-\frac{\partial f}{\partial s} \cdot b_y + \frac{\partial f}{\partial A} (b_z b_x - b_y a_y) \right] \\ \beta_z &= \frac{\partial f}{\partial b_z} = 2 \cdot \left[-\frac{\partial f}{\partial s} \cdot b_z + \frac{\partial f}{\partial A} (b_x b_y - b_z a_z) \right] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Demgemäss ist

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} a_y - a_z & b_x \\ \alpha_y - \alpha_z & \alpha_x \end{array} \right| &= 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial A} [b_y (b_x b_y - b_z a_z) - b_z (b_z b_x - b_y a_y)] = \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial A} \cdot \left| \begin{array}{cc} b_y & b_z \\ B_y & B_z \end{array} \right| \end{aligned}$$

und denselben Werth findet man für $\left| \begin{array}{cc} b_y & b_z \\ \beta_y & \beta_z \end{array} \right|$. Es werden daher die erste und, wie sich in gleicher Weise zeigen lässt, auch die zweite und dritte der Bedingungsgleichungen (26) erfüllt, wodurch nachgewiesen ist, dass bei isotropen Substanzen stets die Deformationshauptaxen in ihrer schliesslichen Lage mit den Hauptdruckaxen zusammenfallen.

¹ Es empfiehlt sich, f nicht, wie dies Thomson thut, als Function der Quadrate $a^2 b^2 c^2$ der reciproken Halbaxen der Fläche (9), sondern als Function der Grössen σ , s und v zu betrachten, da es nur dadurch dem Verfasser gelang, auch die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungscomponenten zu erhalten.

Um einen möglichst einfachen Ausdruck für die Spannungscomponenten (17) in isotropen Substanzen zu erhalten, sollen auch die Coëfficienten der auf die Form

$$a'_x \cdot x^2 + a'_y \cdot y^2 + a'_z \cdot z^2 + 2b'_x \cdot yz + 2b'_y \cdot zx + 2b'_z \cdot xy = 1 \quad (30)$$

gebrachten Gleichung des dem Deformationsellipsoid (6) adjungirten Ellipsoids (8) in Rechnung gezogen werden, nämlich

$$\left. \begin{aligned} a'_x &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2, & b'_x &= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a'_y &= a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2, & b'_y &= a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} \\ a'_z &= a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2, & b'_z &= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

und ebenso die diesen Grössen adjungirten Coëfficienten $A'_x \dots B'_z$ des Deformationsellipsoids (6), dessen Gleichung (6) die Form annimmt:

$$A'_x \cdot x^2 + A'_y \cdot y^2 + A'_z \cdot z^2 + 2B'_x \cdot yz + 2B'_y \cdot zx + 2B'_z \cdot xy = D^2, \quad (32)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} A'_x &= a'_y a'_z - b'^2_x = A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 \\ A'_y &= a'_z a'_x - b'^2_y = A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2 \\ A'_z &= a'_x a'_y - b'^2_z = A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2 \\ B'_x &= b'_y b'_z - b'_x a'_x = A_{12}A_{13} + A_{22}A_{23} + A_{32}A_{33} \\ B'_y &= b'_z b'_x - b'_y a'_y = A_{13}A_{11} + A_{23}A_{21} + A_{33}A_{31} \\ B'_z &= b'_x b'_y - b'_z a'_z = A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} + A_{31}A_{32} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Aus diesen Werthen der Coëfficienten (31) und (33) und aus den Gleichungen (3), (12) und (28) lassen sich zunächst folgende für unsere Zwecke wichtige identische Relationen folgern:

$$\begin{aligned}
 & a_{11}^2 a_x + a_{21}^2 a_y + a_{31}^2 a_z + 2a_{21} a_{31} b_x + 2a_{31} a_{11} b_y + 2a_{11} a_2 b_z = (\sigma + 3) a'_x + A'_x - (s + 3) \\
 & a_{12}^2 a_x + a_{22}^2 a_y + a_{32}^2 a_z + 2a_{22} a_{32} b_x + 2a_{32} a_{12} b_y + 2a_{12} a_2 b_z = (\sigma + 3) a'_y + A'_y - (s + 3) \\
 & a_{13}^2 a_x + a_{23}^2 a_y + a_{33}^2 a_z + 2a_{23} a_{33} b_x + 2a_{33} a_{13} b_y + 2a_{13} a_2 b_z = (\sigma + 3) a'_z + A'_z - (s + 3) \\
 & a_{12} a_{13} a_x + a_{22} a_{23} a_y + a_{32} a_{33} a_z + (a_{22} a_{33} + a_{32} a_{23}) b_x + (a_{32} a_{13} + a_{12} a_{33}) b_y + (a_{12} a_{23} + a_{22} a_{13}) b_z = (\sigma + 3) b'_x + B'_x \\
 & a_{13} a_{11} a_x + a_{23} a_{21} a_y + a_{33} a_{31} a_z + (a_{23} a_{31} + a_{33} a_{21}) b_x + (a_{33} a_{11} + a_{13} a_{31}) b_y + (a_{13} a_{21} + a_{23} a_{11}) b_z = (\sigma + 3) b'_y + B'_y \\
 & a_{11} a_{12} a_x + a_{21} a_{22} a_y + a_{31} a_{32} a_z + (a_{21} a_{32} + a_{31} a_{22}) b_x + (a_{31} a_{12} + a_{11} a_{32}) b_y + (a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}) b_z = (\sigma + 3) b'_z + B'_z \\
 & a_{11}^2 A_x + a_{21}^2 A_y + a_{31}^2 A_z + 2a_{21} a_{31} B_x + 2a_{31} a_{11} B_y + 2a_{11} a_2 B_z = A \\
 & a_{12}^2 A_x + a_{22}^2 A_y + a_{32}^2 A_z + 2a_{22} a_{32} B_x + 2a_{32} a_{12} B_y + 2a_{12} a_2 B_z = A \\
 & a_{13}^2 A_x + a_{23}^2 A_y + a_{33}^2 A_z + 2a_{23} a_{33} B_x + 2a_{33} a_{13} B_y + 2a_{13} a_2 B_z = A \\
 & a_{12} a_{13} A_x + a_{22} a_{23} A_y + a_{32} a_{33} A_z + (a_{22} a_{33} + a_{32} a_{23}) B_x + (a_{32} a_{13} + a_{12} a_{33}) B_y + (a_{12} a_{23} + a_{22} a_{13}) B_z = 0 \\
 & a_{13} a_{11} A_x + a_{23} a_{21} A_y + a_{33} a_{31} A_z + (a_{23} a_{31} + a_{33} a_{21}) B_x + (a_{33} a_{11} + a_{13} a_{31}) B_y + (a_{13} a_{21} + a_{23} a_{11}) B_z = 0 \\
 & a_{11} a_{12} A_x + a_{21} a_{22} A_y + a_{31} a_{32} A_z + (a_{21} a_{32} + a_{31} a_{22}) B_x + (a_{31} a_{12} + a_{11} a_{32}) B_y + (a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}) B_z = 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

Die Einsetzung der Werthe aus (29) in (17) führt bei Berücksichtigung von (34), (31) und (12) zu den gesuchten Grössen der Spannungscomponenten, nämlich zu den einfachen, allgemein gültigen Gleichungen für isotrope Substanzen

$$\left. \begin{aligned} D \cdot X_x &= 2 \cdot \left[a'_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_x) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + A \frac{\partial f}{\partial A} \right] \\ D \cdot Y_y &= 2 \cdot \left[a'_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_y) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + A \frac{\partial f}{\partial A} \right] \\ D \cdot Z_z &= 2 \cdot \left[a'_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_z) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + A \frac{\partial f}{\partial A} \right] \\ D \cdot Y_z &= 2 \cdot \left[b'_x \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_x \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \right] = D \cdot Z_y \\ D \cdot Z_x &= 2 \cdot \left[b'_y \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_y \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \right] = D \cdot X_z \\ D \cdot X_y &= 2 \cdot \left[b'_z \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_z \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \right] = D \cdot Y_x \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Da $A = D^2$ und $D = 1 + \nu$ ist, so kann auch $A \frac{\partial f}{\partial A} = \frac{1}{2} D \cdot \frac{\partial f}{\partial D} = \frac{1}{2} D \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu}$ gesetzt werden; es können demnach die drei ersten Gleichungen (35) auch lauten:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \cdot \frac{a'_x}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot \frac{s+3-A'_x}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \\ Y_y &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \cdot \frac{a'_y}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot \frac{s+3-A'_y}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \\ Z_z &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \cdot \frac{a'_z}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot \frac{s+3-A'_z}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

In einfacherer Weise lassen sich die allgemeinen und meines Wissens hier zum erstenmale aufgestellten Gleichungen (35) und (36) unmittelbar aus den Gleichungen (15) ableiten, wofür berücksichtigt wird, dass bei isotropen Substanzen die Potentialfunction f bloß eine Function von s , σ und D ist und dass wegen der Congruenz der Ellipsoide (30) und (9') und in Folge der durch (28) bestimmten Bedeutung von s und σ auch

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= a'_x + a'_y + a'_z - 3 \\ s &= a'_y a'_z + a'_z a'_x + a'_x a'_y - b'^2_x - b'^2_y - b'^2_z - 3 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ist.

Wie nämlich aus diesen Gleichungen und aus (31) und (5) zu ersehen ist, ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_{11}} = 2a_{11}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial a_{21}} = 2a_{21}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial a_{31}} = 2a_{31}$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_{11}} = A_{11}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_{21}} = A_{21}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_{31}} = A_{31}$$

ferner

$$\frac{\partial s}{\partial a_{11}} = (a'_y + a'_z) \cdot \frac{\partial a'_x}{\partial a_{11}} - 2b'_z \cdot \frac{\partial b'_z}{\partial a_{11}} - 2b'_y \cdot \frac{\partial b'_y}{\partial a_{11}}$$

$$= [\sigma + 3 - a'_x] \cdot 2a_{11} - 2b'_z \cdot a_{12} - 2b'_y \cdot a_{13}$$

$$= 2 \cdot [a_{11}(\sigma + 3) - (a_{11}a'_x + a_{12}b'_z + a_{13}b'_y)]$$

und analog

$$\frac{\partial s}{\partial a_{21}} = 2[a_{21}(\sigma + 3) - (a_{21}a'_x + a_{22}b'_z + a_{23}b'_y)]$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_{31}} = 2[a_{31}(\sigma + 3) - (a_{31}a'_x + a_{32}b'_z + a_{33}b'_y)]$$

Setzt man diese Werthe ein in die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{11}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_{21}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{21}} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial a_{21}} + \frac{\partial f}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{21}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_{31}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{31}} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial a_{31}} + \frac{\partial f}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{31}}$$

und führt die so erhaltenen Werthe in die ersten drei Gleichungen (15) ein, so erhält man sofort bei Berücksichtigung von (31), (37) und (33) wiederum die früheren Werthe (35) von X_x , X_y , X_z und analog die übrigen Spannungscomponenten.

Ist also die Potentialfunction f als Function der in Folge der Gleichungen $a = 1 + \lambda_1$, $b = 1 + \lambda_2$, $c = 1 + \lambda_3$ bloss von den Hauptdilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ abhängigen Grössen (28), nämlich der Grössen $\sigma = a^2 + b^2 + c^2 - 3$, $s = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 3$, $A = D^2 = a^2b^2c^2$ gegeben, so sind nach (35) und (36) sämmtliche den drei willkürlichen Coordinatenebenen zugehörigen Spannungscomponenten durch die Coëfficienten der Gleichung des Ellipsoids (30) und durch die aus diesen Coëfficienten mittelst (33) leicht zu berechnenden Grössen $A'_x \dots B'_z$ vollkommen bestimmt.

Diese Spannungen hängen daher ausser von der durch die Hauptdilatationen vollkommen bestimmten Gestalt dieses Ellipsoids auch von der relativen Lage der Hauptachsen derselben, d. i. der schliesslichen Lage der Deformationshauptachsen $\xi'\eta'\zeta'$ in Bezug zu den Coordinatenachsen ab.

Übrigens empfiehlt es sich, das Deformationsellipsoid (32) selbst, dessen Halbachsen a, b, c mit den letzteren Axen $\xi'\eta'\zeta'$ gleichgerichtet sind, zur Bestimmung dieser Coëfficienten und daher auch der Spannungen zu verwenden. Bringt man nämlich die Gleichung (32) des Deformationsellipsoids (in seiner schliesslichen Lage) auf die gebräuchliche Form

$$\alpha'_x \cdot x^2 + \alpha'_y \cdot y^2 + \alpha'_z \cdot z^2 + 2\beta'_x \cdot yz + 2\beta'_y \cdot zx + 2\beta'_z \cdot xy = 1, \quad (38)$$

so ist, wie die Vergleichung mit (32) lehrt, zunächst

$$\begin{aligned} A'_x &= D^2 \cdot \alpha'_x, & A'_y &= D^2 \cdot \alpha'_y, & A'_z &= D^2 \cdot \alpha'_z \\ B'_x &= D^2 \cdot \beta'_x, & B'_y &= D^2 \cdot \beta'_y, & B'_z &= D^2 \cdot \beta'_z, \end{aligned}$$

sonach den Gleichungen (33) zufolge

$$\begin{aligned} a'_x &= D^2 \cdot [\alpha'_y \alpha'_z - \beta'^2_{xy}], & a'_y &= D^2 \cdot [\alpha'_z \alpha'_x - \beta'^2_{yz}], & a'_z &= D^2 \cdot [\alpha'_x \alpha'_y - \beta'^2_{zx}] \\ b'_x &= D^2 \cdot [\beta'_y \beta'_z - \beta'_x \alpha'_x], & b'_y &= D^2 \cdot [\beta'_x \beta'_z - \beta'_y \alpha'_y], & b'_z &= D^2 \cdot [\beta'_x \beta'_y - \beta'_z \alpha'_z], \end{aligned}$$

so dass dadurch sämmtliche Coëfficienten in (35) durch die Coëfficienten der Gleichung (38) des Deformationsellipsoids bestimmt sind.

Um die Grössen der Hauptspannungen S_1, S_2, S_3 zu ermitteln, hat man nur die bisher willkürlich gewählten Coordinatenachsen mit den Hauptdruckachsen, also auch mit den Axen $\xi'\eta'\zeta'$ des Ellipsoids (30) oder (38) zu identificiren, also $a'_x = a^2 = (1 + \lambda_1)^2$, $a'_y = b^2 = (1 + \lambda_2)^2$, $a'_z = c^2 = (1 + \lambda_3)^2$, $b'_x = b'_y = b'_z = 0$ zu setzen, wodurch nach (33) $A'_x = b^2 c^2$, $A'_y = c^2 a^2$, $A'_z = a^2 b^2$, $B'_x = B'_y = B'_z = 0$ wird. Demgemäss ergibt sich aus (36)

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial f}{\partial v} + 2 \frac{(1 + \lambda_1)^2}{1 + v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot (1 + \lambda_1)^2 \frac{(1 + \lambda_2)^2 + (1 + \lambda_3)^2}{1 + v} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \\ S_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + 2 \frac{(1 + \lambda_2)^2}{1 + v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot (1 + \lambda_2)^2 \frac{(1 + \lambda_3)^2 + (1 + \lambda_1)^2}{1 + v} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \\ S_3 &= \frac{\partial f}{\partial v} + 2 \frac{(1 + \lambda_3)^2}{1 + v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot (1 + \lambda_3)^2 \frac{(1 + \lambda_1)^2 + (1 + \lambda_2)^2}{1 + v} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

wo nach (10) $1 + v = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)$ ist.

Aus diesen Gleichungen ist zu ersehen, dass bei isotropen Körpern nicht nur die Potentialfunction f , sondern auch die Hauptdrucke lediglich von den Hauptdilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, beziehungsweise von den drei Grössen s, σ und ν abhängen.

Die Gleichung der die einzelnen Spannungen für die verschiedenen Raumrichtungen darstellenden Fläche (22), deren Axen $\xi'\eta'\zeta'$ mit den Axen der Ellipsoide (38), (32), (30) gleichgerichtet sind, nimmt für isotrope Substanzen, wie die Substitution von (35) in (22) lehrt, und wofern kürzshalber durch u' und U' die Summen

$$\begin{aligned} u' &= a'_x \cdot x^2 + a'_y \cdot y^2 + a'_z \cdot z^2 + 2b'_x \cdot yz + 2b'_y \cdot zx + 2b'_z \cdot xy \\ U' &= A'_x \cdot x^2 + A'_y \cdot y^2 + A'_z \cdot z^2 + 2B'_x \cdot yz + 2B'_y \cdot zx + 2B'_z \cdot xy \end{aligned}$$

bezeichnet werden, folgende Gestalt an:

$$\left[D \cdot \frac{\partial f}{\partial D} + 2(s+3) \frac{\partial f}{\partial s} \right] (x^2 + y^2 + z^2) + 2u' \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} - 2U' \cdot \frac{\partial f}{\partial s} = k \cdot D.$$

Durch A_1 sei die vor der betrachteten Deformation stattfindende Normalspannung bezeichnet, die wegen der im ursprünglichen Zustande vorausgesetzten Isotropie nach allen Raumrichtungen dieselbe sein muss und die ebenso wie $X_x Y_y Z_z$ positiv oder negativ in Rechnung gebracht sei, je nachdem dieselbe eine Druckspannung oder eine Zugspannung ist. Da nun im primitiven Zustande $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \nu = 0$ zu setzen ist, so ist zufolge (39), wenn durch $\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$ die für diesen Zustand bestehenden Werthe der betreffenden Differentialquotienten bezeichnet werden,

$$A_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_0 + 4\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0, \quad (40)$$

so dass die durch die Deformation allein hervorgerufene Spannung die Componenten $(X_x - A_1), (Y_y - A_1), (Z_z - A_1), Y_z, Z_x, X_y$ hat.

Beschränkt man sich bei der Potentialfunction f auf Glieder, die bezüglich der Verschiebungsderivationen $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \dots$,

also auch zufolge (28), (5), (3) und (2) bezüglich σ , s und ν von nicht höherer Ordnung sind als der dritten, so kann f stets in folgender Form dargestellt werden:

$$f = A_0 + a_1 \nu + a_2 \nu^2 + a_3 \nu^3 + b_1 \sigma + b_2 \sigma^2 + c_1 s, \quad (41)$$

indem alle anderen Glieder bis zur dritten Ordnung durch ν , ν^2 , ν^3 , σ , σ^2 und s ausgedrückt werden können, da, wie die früheren Werthe von ν , s , σ sofort lehren, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als der dritten,

$$s^2 = 8\nu^2 + 8\nu^3 + 2\sigma^2, \quad \nu \cdot \sigma = \nu^2 + \frac{1}{4} \sigma^2$$

$$\nu \cdot s = 3\nu^2 + \nu^3 + \frac{1}{4} \sigma^2, \quad \sigma \cdot s = 2\nu^2 + 2\nu^3 + \frac{3}{2} \sigma^2$$

$$\frac{\sigma^3}{8} = \frac{s^3}{64} = \frac{\nu \sigma^2}{4} = \frac{\nu s^2}{16} = \frac{\nu^2 \sigma}{2} = \frac{\nu^2 s}{4} = \frac{\sigma^2 s}{16} = \frac{\sigma s^2}{32} = \frac{\nu \sigma s}{8} = \nu^3$$

ist.

Führt man nun statt der sechs Coëfficienten $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 c_1$ der Gleichung (41), welche lediglich von der Art und dem Zustande der der Untersuchung zu Grunde gelegten isotropen Substanz abhängen, andere sechs Elasticitätsconstanten $A_1 C_1 B_2 A'_1 A_{21}$ und B_{21} ein, die mit den früheren durch die Gleichungen

$$a_1 = A_1 - 2B_2 + B_{21} - A_{21}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} (C_1 - A_1 + 2B_2 - B_{21} - A_{21})$$

$$a_3 = A'_1 - B_{21}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} (2B_2 + B_{21} - A_{21})$$

$$b_2 = \frac{1}{4} B_{21}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} (A_{21} - B_{21})$$

zusammenhängen, so ergeben sich auf Grund der früheren Werthe von $D = 1 + \nu$, σ , s u. s. w. und der Gleichungen (35) und (36) nach einer einfachen Rechnung und wofern man bei der Berechnung von f von Gliedern, die von höherer Ordnung

als der dritten und bei der Berechnung der Spannungscomponenten von Gliedern, die von höherer Ordnung als der zweiten sind, absieht und kürzshalber $a_{23} + a_{32} = \mu_x + \nu_x = \varepsilon_x$, $a_{31} + a_{13} = \mu_y + \nu_y = \varepsilon_y$, $a_{12} + a_{21} = \mu_z + \nu_z = \varepsilon_z$ setzt, folgende Gleichungen:¹

$$\begin{aligned}
 f = & A_0 + A_1(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) + \frac{C_1 - A_1}{2} \cdot (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 \\
 & + A_1(\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) \\
 & + 2B_2[\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2)] \\
 & + A'_1(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^3 \\
 & + (A_1 - 2B_2)[-(\lambda_y + \lambda_z)(\lambda_z + \lambda_x)(\lambda_x + \lambda_y) + \mu_x \mu_y \mu_z + \\
 & + \nu_x \nu_y \nu_z + \mu_x \nu_x(\lambda_y + \lambda_z) + \mu_y \nu_y(\lambda_z + \lambda_x) + \mu_z \nu_z(\lambda_x + \lambda_y)] \\
 & + C_1(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)(\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) \\
 & + A_{21}(\lambda_x \varepsilon_x^2 + \lambda_y \varepsilon_y^2 + \lambda_z \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - 4\lambda_x \lambda_y \lambda_z) \\
 & + B_{21}[(\lambda_y + \lambda_z)\varepsilon_x^2 + (\lambda_z + \lambda_x)\varepsilon_y^2 + (\lambda_x + \lambda_y)\varepsilon_z^2 \\
 & + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - 4(\lambda_y + \lambda_z)(\lambda_z + \lambda_x)(\lambda_x + \lambda_y)]
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 X_x = & A_1 + 4B_2\lambda_x + (C_1 - A_1)(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \\
 & + (3A'_1 - 4B_{21})(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 + 2B_2[(\lambda_y + \lambda_z)^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2] \\
 & + (C_1 - A_1)(\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) \\
 & - A_{21}(4\lambda_y \lambda_z - \varepsilon_x^2) + B_{21}(4\lambda_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_y^2) \\
 Y_z = & 2B_2 \cdot \varepsilon_x + 2B_2[\mu_z \nu_y - (\lambda_z + \lambda_x) \cdot \mu_x - \nu_x(\lambda_x + \lambda_y)] \\
 & - A_{21}(\varepsilon_y \varepsilon_z - 2\lambda_x \varepsilon_x) + B_{21}[\varepsilon_y \varepsilon_z + 2(\lambda_y + \lambda_z)\varepsilon_x]
 \end{aligned} \tag{43}$$

Die übrigen Spannungscomponenten ergeben sich durch cyclische Permutation.

Besonders einfach gestalten sich die allgemeinen Gleichungen (35), wenn die Deformation der isotropen Substanz eine andauernd reine ist, d. i. von keiner Rotation des betrachteten Körperelementes begleitet ist. Da bei einer solchen Deformation bekanntlich die Grunddeterminante (5) andauernd eine symmetrische, also $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$, d. h.

¹ Dieselben Gleichungen wurden vom Verfasser auch auf einem ganz anderen Wege abgeleitet. Siehe Finger, diese Sitzungsber., 1894, S. 189 und 192.

$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ ist, so besteht eine Function F von xyz — das Deformationspotential — das so beschaffen ist, dass $\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}$. Es ist dann die Bewegung des Körperelementes eine sogenannte Potentialbewegung, welcher ein Geschwindigkeitspotential zukommt. In diesem Falle sind die Flächen (8) und (9) identisch. Die den letzteren Flächen subjungirte Fläche, deren mit den Hauptdruckaxen gleichgerichtete Halbaxen den Quadratwurzeln der Halbaxen der Flächen (8) und (9) gleich sind, also die Längen $\sqrt{\frac{1}{1+\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{1}{1+\lambda_2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{\frac{1}{1+\lambda_3}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ haben, hat in diesem Falle die Gleichung¹

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \pm 1,$$

und es ist sonach, wenn durch δ, ε die Summen $a+b+c-3$ $bc+ca+ab-3$ bezeichnet werden

$$\left. \begin{aligned} \delta &= a+b+c-3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3 \\ \varepsilon &= bc+ca+ab-3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} - 3 = \\ &= a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13} - a_{12}a_{21} - 3 \\ \nu &= abc-1 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{32} - \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{33}a_{12}a_{21} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

wo $a_{23} = a_{32}, a_{31} = a_{13}, a_{12} = a_{21}$ zu setzen ist.

Da nun den Gleichungen (28) und den letzteren Gleichungen gemäss

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \delta^2 + 6\delta - 2\varepsilon \\ s &= \varepsilon^2 + 6\varepsilon - 2\delta - 6\nu - 2\delta\nu \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

ist, so kann die Potentialfunction f statt als eine Function $f(s, \sigma, \nu)$ der Variablen s, σ und ν auch als Function $\varphi(\delta, \varepsilon, \nu)$ der drei Variablen δ, ε und der cubischen Dilatation ν , deren Werthe bei reinen Deformationen nach (44) aus den Verschiebungsderivationen (2) unmittelbar bestimmbar sind, angesehen werden.

¹ Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1118 und 1119.

Nebenbei sei bemerkt, dass bei reinen Deformationen (aber nur bei diesen) die Potentialfunction auch als Function der drei Grössen

$$\delta = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$$

$$\eta = \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z$$

$$\zeta = \lambda_x \lambda_y \lambda_z + \mu_x \mu_y \mu_z + \nu_x \nu_y \nu_z - \lambda_x \mu_x \nu_x - \lambda_y \mu_y \nu_y - \lambda_z \mu_z \nu_z$$

wo $\mu_x = \nu_x$, $\mu_y = \nu_y$ und $\mu_z = \nu_z$ ist, betrachtet werden kann,¹ indem nach (44) $\varepsilon = 2\delta + \eta$, $\nu = \delta + \eta + \zeta$, ferner (jedoch nur) in diesem Falle auch $\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\eta = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2$, $\zeta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ist; oder es kann f etwa auch als Function von ν , η und ζ angenommen werden — es ist jedoch behufs Vereinfachung der Formeln für die Spannungscomponenten empfehlenswerther, die Potentialfunction im vorliegenden Falle als eine Function von δ , ε und ν anzusehen. Es ist nämlich, wenn man die Potentialfunction f nunmehr durch φ bezeichnet, zufolge (44) und da auch $A_{21} = A_{12}$ u. s. w. ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (a_{22} + a_{33}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} A_{11} = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (3 + \delta) - a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{21}} &= -a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{31}} &= -a_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \end{aligned}$$

sonach den Gleichungen (15), (5) und (3) zufolge

$$\left. \begin{aligned} D.X_x &= a_{11} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (3 + \delta) \right] - a_x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + D \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \\ D.X_y &= a_{12} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (3 + \delta) \right] - b_z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \\ D.X_z &= a_{13} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (3 + \delta) \right] - b_y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

¹ Siehe George Green, Mathematical Papers (London 1871, Appendix, p. 332. W. Voigt, Über eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität. Wiedemann's Annalen 1894, Bd. 52, S. 538.

und analog lauten auch die anderen Gleichungen. Man kann übrigens diese Gleichungen in einfacherer Form darstellen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 a_{11}(3+\delta)-a_x &= a_{11}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2 = \\
 &= (a_{33}a_{11}-a_{31}a_{13})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=A_{22}+A_{33}=\varepsilon+3-A_{11} \\
 a_{12}(3+\delta)-b_z &= a_{12}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{11}a_{21}-a_{12}a_{22}-a_{13}a_{23} = \\
 &= -(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})=-A_{12} \\
 a_{13}(3+\delta)-b_y &= a_{13}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{31}a_{11}-a_{32}a_{12}-a_{33}a_{13} = \\
 &= -(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=-A_{13}
 \end{aligned}$$

so dass nach (46) und den diesen analogen Gleichungen sich für alle Potentialbewegungen isotroper Substanzen folgende allgemein gültige Werthe der Spannungscomponenten ergeben:

$$\left. \begin{aligned}
 X_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{3+\varepsilon}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{a_{11}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \frac{A_{11}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \\
 Y_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{3+\varepsilon}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{a_{22}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \frac{A_{22}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \\
 Z_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{3+\varepsilon}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{a_{33}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \frac{A_{33}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \\
 Y_z &= \frac{a_{23}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \frac{A_{23}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = Z_y \\
 Z_x &= \frac{a_{31}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \frac{A_{31}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = X_z \\
 X_y &= \frac{a_{12}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \frac{A_{12}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = Y_x
 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Dieselben Gleichungen lassen sich übrigens leicht auch aus (35) und (36) ableiten, wofern man die aus der Gleichung $f(\tau, s, \nu) = \varphi(\delta, \varepsilon, \nu)$ und den Gleichungen (45) zu folgernden Relationen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} &= \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \delta} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \delta} = \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot (2\delta+6) + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot (-2-2\nu) \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot (-2) + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot (2\varepsilon+6) \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \nu} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot (-6-2\delta) + \frac{\partial f}{\partial s}
 \end{aligned}$$

in Anwendung bringt.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE,
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXVI. SITZUNG VOM 6. DECEMBER 1894.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 30. November l. J. erfolgte Ableben ihres wirklichen Mitgliedes Sr. Excellenz des Herrn geheimen Rathes Dr. Cajetan Freiherrn von Felder in Wien erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmidt übersendet zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Bildung von Propyltartronsäuren aus den Di-butyryldicyaniden«, von Prof. Karl Brunner.
2. »Über das Verhalten der Kalksalze einiger aromatischer Äthersäuren bei der trockenen Destillation«, von stud. phil. Eduard Hübner.

Herr Gejza v. Bukowski in Wien übersendet eine vorläufige Notiz über den zweiten abschliessenden Theil seiner Arbeit: »Die levantinische Molluskenfauna der Insel Rhodus«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Über den Phenyl-äther des Glycolaldehyds«, von Dr. C. Pomeranz.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Foreau de Courmelles, V. De la vaginite et de son traitement. Paris, 1888; 8°. — Le magnétisme devant la loi. Paris, 1890; 8°. — Précis d'électricité médicale. Technique opératoire des applications médicales. Paris, 1892; 8°. — Revue illustrée de politechnique médicale et chirurgicale. Paris, No. 7, 1892; No. 3, 4, 6, 9, 1893; 8°.

XXVII. SITZUNG VOM 13. DECEMBER 1894.

Der Secretär legt den 61. Band (Jahrgang 1894) der Denkschriften, ferner die aus denselben veranstaltete Collectiv-Ausgabe der Berichte der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres (III. Reise) vor.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übermittelt die Pflichtexemplare des III. Heftes zum III. Bande (in der Reihe Heft XI) seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: »Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens«. *Paleoniscidae*. I. (Mit Taf. 113—122.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung von Dr. Julius Pohl, Privatdocent an der k. k. deutschen Universität in Prag: »Über Variationsweite der *Oenothera Lamarckiana*«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. P. Czermak in Graz: »Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird«.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Institute der k. k. Universität in Graz:

1. »Über die Affinität einiger Basen in alkoholischer Lösung«, von Prof. Zd. H. Skraup.
2. »Über das Cinchotenin«, von Dr. Florian Ratz.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über das Verhalten des äthylglycolsauren Kal-
kes bei der trockenen Destillation«, von Dr. Wil-
helm Heinrich Gintl.
2. »Über ein Cyanid und eine Carbonsäure des Iso-
chinolins«, von stud. phil. Berthold Jeiteles.

Der Secretär legt eine von Herrn Victor Lutschaunig, Professor der Schiffbaukunde an der k. k. Akademie für Handel und Nautik in Triest, eingesendete Abhandlung vor, betitelt: »Der Mittelpunkt des hydrostatischen Auftriebes«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Ritter v. Hauer über-
reicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Director Th. Fuchs
in Wien: »Über die Natur und Entstehung der Stylo-
lithen«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann in Wien
überreicht eine vorläufige Mittheilung über eine von ihm
und Herrn G. H. Bryan ausgeführte Arbeit: »Über eine
mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes
zweier sich berührender Körper«.

Herr Dr. Carl Graf Attems in Wien überreicht eine
Abhandlung unter dem Titel: »Die Myriopoden Steier-
marks«.

Schliesslich spricht Herr Vicepräsident Prof. E. Suess
über den Mond und seine geologische Beschaffenheit.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht
zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Lutschaunig, V., Die Definitionen und Fundamentalsätze der
Theorie des Gleichgewichtes schwimmender Körper. Eine
kritische Besprechung der Stabilitätstheorie der Schiffe.
(Mit 11 Tafeln.) Triest, 1894; 8°.

Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird

von

Dr. P. Czermak,

Privatdocent in Graz.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

Zweck der Untersuchung.

Bei physikalischen Arbeiten kommt nicht selten das Bedürfniss vor, die Vertheilung der Temperatur in dünnen Drähten zu kennen, die an den Enden durch Verbindung mit gut leitenden dicken Zuleitungen auf constanter Temperatur erhalten und der Erwärmung durch einen elektrischen Strom ausgesetzt sind. Hängt ja doch der Widerstand eines so ausgespannten Drahtes von dieser Temperaturvertheilung ab. Von Glühversuchen mit dünnen Platindrähten her ist man gewohnt anzunehmen, dass nur die unmittelbar an den Enden gelegenen Theile des Drahtes schwächer oder gar nicht erheblich erwärmt werden, während man aus dem gleichmässig hellen Leuchten des übrigen Drahtes auf constante Temperaturerhöhung desselben schliesst. Genauere Versuche mit schwach erwärmten Drähten lassen aber erkennen, dass sich der abkühlende Einfluss der Zuleitungen viel weiter erstreckt, so dass man überrascht ist, wie lange man den Draht nehmen muss, um überhaupt noch in der Mitte desselben eine Strecke constanter Temperatur vorzufinden.

Zweck dieser Untersuchung ist es nun den genauen Verlauf der Temperaturen insbesondere bei sehr dünnen Drähten experimentell festzustellen, da bisher meist nur relativ dicke Stangen untersucht wurden. Die dünnen Drähte bieten dabei

den Vortheil, dass sie ungemein rasch den stationären Zustand annehmen.

Die an dünnen Drähten verschiedenen Materiales erhaltenen Daten sollen dann mit der Theorie verglichen und berechnet werden.

Methode.

Dieselbe stimmt im Wesentlichen mit der von J. Klemenčič¹ überein, welche derselbe an Drähten, die durch elektrische Oscillationen oder durch constante Ströme erwärmt wurden, mit Erfolg angewendet hat. Ein sehr dünnes Thermoelement wird sehr nahe und senkrecht zu dem zu untersuchenden Drahte angebracht und durch die strahlende Wärme des letzteren mit erwärmt, ohne dass dasselbe durch directe Ableitung eine Störung des Temperaturverlaufes verursachen kann. Der durch das Thermoelement erzeugte Scalenausschlag gilt als Mass der Temperaturerhöhung des stromdurchflossenen Drahtes.

Der Apparat.

Die zu untersuchenden Drähte, welche alle durch dasselbe Zieheisen bis auf 0.2 *mm* Durchmesser ausgezogen waren, wurden zuerst an durchbohrte viereckige Kupferplättchen gelöthet und mit diesen in die 1 *cm* dicken Kupferstangen *K*, *K*, (siehe Tafel) eingespannt. Die Kupferstangen selbst waren in massive Messinglager geklemmt, welche gestatteten die Lage des Drahtes etwas zu corrigiren. An diese Lager waren die Zuleitungen für den constanten Strom angelöthet, welcher den Draht zu erwärmen hatte und der von einem Accumulator *A* und einem Widerstande *W* auf der gewünschten Stärke erhalten wurde.

Das Thermoelement war zwischen den 3 *mm* dicken Kupferdrahtenden *a b* ausgespannt und dessen Löthstelle so nahe als möglich an den Draht herangeführt, ohne aber denselben zu berühren. Es war auf einen mit Blei ausgegossenen Holzklotz *C* montirt, welcher mit zwei metallenen Gleitstücken 1, 2 auf einer abgedrehten Messingstange *M* und einer Schraube 3

¹ Diese Sitzungsber. Bd. 101, 1892; Bd. 102, 1893; Bd. 103, 1894.

auf einer Spiegelglasplatte *G* parallel zu dem Drahte geführt werden konnte.

Der Abstand des Thermoelementes vom Drahte konnte durch Heben und Senken an der Schraube 3 regulirt werden und ausserdem war das Element noch in der Richtung *a b* verschiebbar, so dass man die Löthstelle stets genau unter den Draht stellen konnte.

Der ganze Klotz wurde durch eine lange Schraube *S* von Aussen weiterschoben. Der Kopf der Schraube war in 100 Theile getheilt und ging neben einer Theilung *T* für die ganzen Umgänge. Das conisch abgerundete andere Ende der Schraube drückte gegen ein Spiegelglasstück *s*, welches auf den Klotz gekittet war.

So konnte der Klotz nach einer Richtung geschoben werden und für den Rückweg wurde er einfach durch eine Schnur nachgezogen. Die beiden Enden der dicken Kupferdrähte, an welche das Thermoelement gelöthet war, standen mit einem Galvanometer von Carpentier in Verbindung, und zwar ging die eine Zuleitung durch die Messingstange *M* über die Gleitstellen 1 und 2 zu dem Punkte *b* und vom Punkte *a* tauchte der dicke Draht in eine Quecksilberrinne *R*, die zum Galvanometer zurückführte.

Über den ganzen Apparat war natürlich ein Pappdeckelkasten gestürzt, der ganz mit Watte ausgekleidet war, um alle störenden Einflüsse der Strahlung und der Luftströmungen abzuhalten. Obwohl der von mir selbst angefertigte Apparat wohl nicht auf die grösste Präcision Anspruch machen konnte, zeigten trotzdem die erhaltenen Resultate eine grosse Regelmässigkeit und Übereinstimmung mit der Rechnung, die sich mit einem präciser construirten Apparate noch weiter steigern liesse.

Der schwierigste Punkt bei dieser Beobachtungsweise ist wohl die Bedingung, dass die Löthstelle des Thermoelementes immer parallel und in constantem Abstände vom Drahte geführt wird. Eigens dazu angestellte Versuche zeigten aber, dass die Empfindlichkeit für kleinere Änderungen des Abstandes nicht sehr gross ist, so dass es genügte, die Einhaltung dieser Bedingungen an dem vorliegenden Apparate nur nach dem Augenmaasse vorzunehmen.

Die grösste Drahtlänge, welche eingespannt werden konnte, betrug gegen 18 *cm* und erwies sich dies schon für das Kupfer kaum mehr hinreichend, für Silber war dieselbe entschieden zu gering.

Die Versuche wurden nun in folgender Weise gemacht. Nachdem der Draht eingespannt und justirt war, wurde der Strom so regulirt, dass das Galvanometer, wenn sich das Thermoelement an der Mitte des Drahtes befand, einen Ausschlag von ungefähr 120—150 Scalentheilen gab. Dies entsprach einer Erwärmung des Drahtes von rund 0·1—0·2 Graden und waren die dazu erforderlichen Stromstärken je nach dem untersuchten Materiale zwischen 0·1 und 0·01 Ampère gelegen.

Man sieht also, dass man auf diese Art im Stande ist, den Temperaturverlauf bei einem minimalen Unterschiede gegen die Umgebungstemperatur zu ermitteln. Wäre der Apparat etwas anders construirt, so wäre es nicht schwierig, die Verhältnisse der äusseren und inneren Wärmeleitungsconstanten der verschiedenen Materialien untereinander für bestimmte Temperaturen, ja sogar deren absolute Grössen zu bestimmen. Eine solche Empfindlichkeit wird wohl mit keiner anderen bisherigen Methode erreichbar sein.

Bezüglich der Erwärmung ist noch anzuführen, dass es leider nicht anging, den Strom zu schliessen und dann dem Drahte entlang das Temperaturgefälle abzusuchen. In der Galvanometerleitung war stets ein so grosser constanter Thermostrom, dass die Leitung geschlossen bleiben und die Ablenkung durch einen Magnet compensirt werden musste. Da die Schwingungsdauer der Galvanometernadel gegen 15 Secunden betrug, so wurde einfach der Erwärmungsstrom an jeder neuen Stelle durch 10 Secunden lang geschlossen und der Ausschlag beobachtet. Controlversuche ergaben, dass in dieser Zeit der stationäre Zustand im Drahte nahezu erreicht war, so dass der Verlauf der Temperaturcurve längs des Drahtes nicht wesentlich beeinflusst sein konnte.

Um die verschiedenen Drähte untereinander leichter vergleichen zu können, wurden die Ausschläge stets so reducirt, dass in der Mitte der Werth 100 angenommen wurde. Nun

wurde das Thermoelement dem ganzen Draht entlang verschoben, und zwar stets von einem bis zum anderen Ende und wieder retour; aus den gleichweit von der Mitte abstehenden Werthen und den beim Hin- und Hergange erhaltenen wurde dann das Mittel genommen.

Theorie und Berechnung der Versuche.

Beim Eintragen der Beobachtungen in ein Coordinatenpapier zeigte sich eine solche Regelmässigkeit in denselben, dass es der Mühe werth schien, dieselben auch mit der Theorie zu prüfen, obwohl die ganze Untersuchung mehr in qualitativer als in quantitativer Hinsicht unternommen wurde.

Die allgemeine Theorie des vorliegenden Problemes ist von J. Linde¹ durchgeführt worden und zwar für einen constanten Strom. In der Arbeit selbst sind zwei Fälle unterschieden: »1. die Stromstärke i ist constant, 2. i ist variabel mit der Zeit, und zwar soll i eine einfache Function der Zeit darstellen, also $i = i_0 \sin 2\pi ut$.«²

Da für den vorliegenden Fall nur der stationäre Zustand in Betracht kommt, wodurch sich die Rechnung wesentlich vereinfacht und die Arbeit von J. Linde weniger bekannt sein dürfte, so will ich die hier nöthigen Gleichungen direct ableiten.

Die Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einem dünnen Stabe mit Berücksichtigung der Ausstrahlung an die Umgebung ist bekanntlich:

$$cpq \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \left(kq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hp u \right) dx dt.$$

Darin bedeuten k das innere Wärmeleitungsvermögen, h den Coëfficienten der äusseren Wärmeleitung, q den Querschnitt, p den Umfang, ρ die Dichte und c die specifische Wärme des Drahtes.

¹ »Über die Temperaturbestimmung eines Drahtes, wenn durch denselben ein galvanischer Strom fliesst« von J. Linde. Exner's Rep. Bd. 27, 1891, S. 401.

² Der zweite Fall ist aber nirgends zu finden und ist überhaupt der Abhandlung eine gewisse Flüchtigkeit nicht abzusprechen, da dieselbe auf sieben Seiten an 60 Druckfehler enthält.

Die Gleichung sagt also, dass die Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung eines Drahtstückes von der Länge dx , während der Zeit dt , nothwendig ist, gleich sein muss der im Innern von dx an der einen Seite mehr eintretenden, als an der andern austretenden Wärmemenge, vermindert um die durch Strahlung nach aussen während dieser Zeit gelangenden Menge.

Durchfliesst nun noch ein constanter Strom von der Stärke i den Draht, so wird in der betrachteten Zeit dt in dem Drahtstücke von der Länge dx auch noch eine Wärmemenge $\frac{i^2 w}{Aq} dx dt$ entwickelt, wenn w den specifischen Widerstand des Drahtes und A das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Ein Theil der eingetretenen Temperaturerhöhung des Drahtes wird daher auch noch von dieser Wärmemenge veranlasst werden, so dass wir für diesen Fall und nach passender Abkürzung die Gleichung erhalten:

$$cpq \frac{\partial u}{\partial t} = kq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hp u + \frac{i^2 w}{Aq}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{cp} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{cpq} u + \frac{i^2 w}{cpq^2 A}. \quad 1)$$

Für den stationären Zustand muss dann gelten:

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{kq} u + \frac{i^2 w}{kq^2 A}; \quad 2)$$

setzt man

$$u = v + \frac{i^2 w}{hpqA},$$

so bekommt die Gleichung 2) die einfachere Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{hp}{kq} v, \quad 3)$$

deren Integral dann ist:

$$v = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x},$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird:

$$\lambda^2 = \frac{hp}{kq}.$$

Zur Bestimmung der Constanten C_1 und C_2 dienen die Grenzbedingungen. Da der hier betrachtete Draht zwischen zwei sehr gut leitenden, dicken Metallbacken ausgespannt ist, so wird er erstens zu beiden Seiten seiner Mitte einen ganz symmetrischen Verlauf der Temperaturen zeigen müssen und an den beiden Enden die Temperatur der Umgebung besitzen. Nehmen wir diese als 0 an und legen den Coordinatenanfangspunkt in den einen Endpunkt des Drahtes, welcher selbst die x -Axe darstellt, so werden die Grenzbedingungen bei einer Länge des Drahtes gleich l sein:

für $x = 0$ muss $u = 0$ sein,

für $x = l$ muss $u = 0$ sein.

Daraus folgen zur Bestimmung der Constanten C_1 und C_2 die beiden Gleichungen

$$0 = C_1 + C_2 + M,$$

$$0 = C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} + M,$$

welche ergeben:

$$C_1 = -M \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}};$$

$$C_2 = M \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}},$$

so dass schliesslich der Ausdruck für die Temperatur die Form erhält:

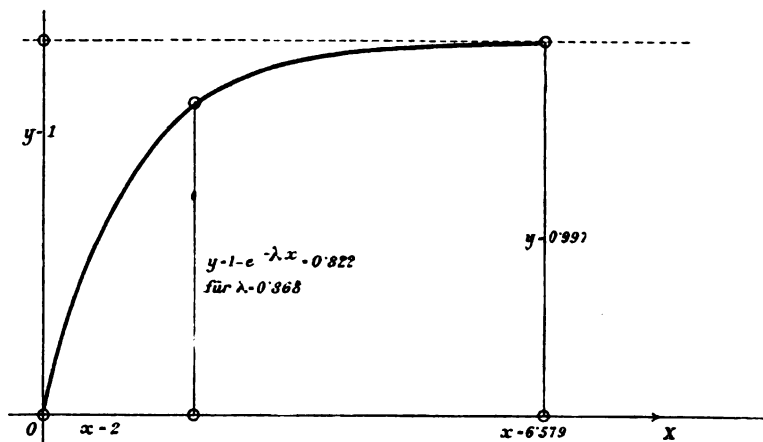
$$u = M \left[1 - \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{\lambda x} + \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{-\lambda x} \right] \quad 4)$$

Man sieht, dass mit wachsendem l der Werth des Coëfficienten von $e^{\lambda x}$ immer kleiner wird und der von $e^{-\lambda x}$ sich immer mehr dem Werthe -1 nähert. Für $l = \infty$ aber folgt unmittelbar der erstere Coëfficient $= 0$ und der zweite $= -1$ als Grenzwert. Es erhält dann die Formel 4) die einfache Gestalt

$$u = M[1 - e^{-\lambda x}] \quad \text{für } l = \infty. \quad 5)$$

Es ist dies die Gleichung einer Curve, welche ziemlich rasch, je nach dem Werthe von λ , ansteigt und sich dann asymptotisch der Geraden $y = M$ nähert, also ungefähr wie die folgende Figur zeigt.

Wenn man daher die Drahtlängen so gross wählt, dass sich bei der Erwärmung durch den Strom in der Mitte ein Intervall findet, wo die Temperatur constant bleibt, so wird die Anwendung dieser Formel bereits gestattet sein oder wenigstens



als grosse Annäherung an den wirklichen Temperaturverlauf gelten können.

Setzen wir daher wieder die ursprünglichen Werthe für die Grössen M und λ ein, so bekommt die hier benützte Formel die Gestalt

$$u = \frac{i^2 w}{h p q A} \left[1 - e^{-\sqrt{\frac{h p}{k q}} x} \right] \quad (6)$$

und die Galvanometeraussschläge, welche diesen Temperaturen proportional sind, werden einer Curve angehören müssen von der Form

$$y = a u = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (7)$$

Ist der Draht nicht lange genug, so dass die allgemeine Formel 4) gilt, so wäre

$$y = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{\lambda x} + \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{-\lambda x}. \quad 8)$$

Die Coëfficienten des zweiten und dritten Gliedes kann man aber auch anders schreiben; es ist

$$\frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} = \frac{e^{\lambda l} - 1}{e^{2\lambda l} - 1} \quad \text{und} \quad \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} = \frac{e^{\lambda l} - e^{2\lambda l}}{e^{2\lambda l} - 1}.$$

Bei nur etwas grösserem l sind dann die Grössen $e^{\lambda l}$ und noch mehr $e^{2\lambda l}$ so gross, dass ihnen gegenüber die Einheit von sehr geringem Einflusse wird. Es wird dann

$$y = 1 - e^{-\lambda l} e^{\lambda x} + (e^{-\lambda l} - 1) e^{-\lambda x},$$

oder

$$y = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda l} (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}). \quad 9)$$

Dies würde eine etwas genauere Formel als Gleichung 7) darstellen. Beim Eintragen der Beobachtungen in ein Coordinatenpapier stellte sich aber eine Schwierigkeit heraus. Die genaue Lage des Anfangs- und Endpunktes der Drähte gegenüber der Theilung, welche die Schraube bestimmte, konnte nicht genau ermittelt werden. Wegen der dicken Ableitungstangen konnte das Thermoelement nie bis ganz an die Enden der Drähte, wo der Werth 0 herrschen sollte, gebracht werden, sondern man musste in einer Entfernung von einem durch Schätzung ermittelten Bruchtheile eines Millimeters beginnen. Die so beobachteten Ordinatenwerthe gehören dann einer Curve an, welche gegen das Coordinatensystem parallel der Abscissenaxe um ein kleines Stück δ verschoben ist. Um nun aus den zahlreichen Beobachtungen sowohl einen Werth für λ als auch δ nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen, musste von der Anwendung der genauen Formel 8) und selbst der Formel 9) Abstand genommen werden. Es wurde Formel 7) verwendet und war selbst bei dieser die Berechnung, da mit zwei genäherten Werthen für λ und δ begonnen und die Rechnung zwei- bis dreimal wiederholt werden musste, eine sehr zeitraubende.

Ist also der Anfangspunkt um das kleine Stück δ verschoben und wird Formel 7) benützt, so haben die Beobachtungen der Gleichung

$$y = 1 - e^{-\lambda(x-\delta)}$$

zu genügen.

Die Bestimmung von δ aber war sehr wichtig, da beim Eintragen der verschiedenen Curven, wenn dieselben nicht alle von demselben Coordinatenanfangspunkte begonnen hätten, dieselben sich durchkreuzt hätten. Da die Steilheit der Curven bei schlechter leitenden Substanzen aber gerade vom Nullpunkte aus immer bedeutender wird, so wäre eine Übersicht, wie sich die Curven nacheinander durch die Änderung des Werthes von λ anordnen, ganz unmöglich gewesen.

Die Versuchsergebnisse.

In den folgenden Tabellen sind die auch in das Coordinatennetz eingetragenen Werthe der Messungen zusammengestellt, und zwar wurden mehr Ordinaten berechnet als beobachtet, damit die Curven sicherer gezogen werden können. Die beobachteten Werthe sind dann als einzelne Marken eingetragen. Als Maasstab wurde für die Ordinaten die Hälfte des Maasstabes der Abscissen genommen.

Constantan.

Länge = 83.8 mm

 $\lambda = 2.3195$

Dicke = 0.2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1 - e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0.3	7.4	7.5	-0.1
2	0.8	16.2		
3	1.2	23.9	23.7	+0.2
4	1.6	31.0		
5	2.0	37.6	36.7	+0.9
6	2.9	49.0		
7	3.7	57.9	57.5	+0.4
8	4.6	65.6		
9	5.4	71.6	71.5	+0.1
10	6.7	78.9		
11	8.0	84.3	84.3	± 0.0
12	9.3	88.4		
13	10.5	91.3	91.3	± 0.0
14	12.2	94.1		
15	13.9	96.6	96.5	+0.1
16	15.6	97.3		
17	17.3	98.2	98.1	+0.1
18	19.0	98.8		
19	20.7	99.2	99.2	± 0.0
20	22.9	99.5		
21	25.0	99.7	99.8	-0.1
22	27.1	99.8		
23	29.2	99.9	100.0	-0.1
24	31.4	99.9 ₃		
25	33.5	99.9 ₆	100.1	-0.2
26	35.6	99.9 ₇		
27	37.7	99.9 ₈	100.1	-0.2
28	39.8	99.9 ₉		
29	41.9	99.9 ₉	100.0	-0.1

Patentnickel.

Länge = 82.2 mm

 $\lambda = 2.1702$

Dicke = 0.2

Nr.	x	$y =$ $= 100 (1 - e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0.7	14.1	13.1	+1.0
2	1.1	21.2		
3	1.6	28.6	29.1	-0.5
4	2.0	35.2		
5	2.4	40.6	41.5	-0.9
6	3.3	51.1		
7	4.1	58.9	59.2	-0.3
8	4.5	62.3		
9	5.8	71.6	71.5	+0.1
10	7.1	78.6		
11	8.4	83.7	83.2	+0.5
12	9.6	87.6		
13	10.9	90.6	90.1	+0.5
14	12.6	93.5		
15	14.3	95.5	95.4	+0.1
16	16.0	96.9		
17	17.7	97.9	97.6	+0.3
18	19.4	98.5		
19	21.1	99.0	98.4	+0.6
20	23.2	99.3		
21	25.4	99.6	99.5	+0.1
22	27.5	99.7		
23	29.6	99.8	99.7	+0.1
24	31.7	99.9		
25	33.9	99.9 ₄	99.9	± 0.0
26	36.0	99.9 ₆		
27	38.1	99.9 ₇	100.3	-0.4
28	39.6	99.9 ₈		
29	41.1	99.9 ₉	100.0	-0.1

Platin.

Länge = 100·4 mm

 $\lambda = 1\cdot9841$

Dicke = 0·2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1 - e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0·5	8·7	8·7	$\pm 0\cdot0$
2	0·9	16·4		
3	1·3	22·9	22·6	+0·3
4	2·2	35·4		
5	3·0	45·0	44·8	+0·2
6	3·9	53·9		
7	4·7	60·7	61·0	-0·3
8	6·0	69·6		
9	7·3	76·3	76·6	-0·3
10	8·5	81·1		
11	9·8	85·7	85·8	-0·1
12	11·5	89·8		
13	13·2	92·7	92·8	-0·1
14	14·9	94·8		
15	16·6	96·3	95·8	+0·5
16	18·3	97·4		
17	20·0	98·1	98·1	$\pm 0\cdot0$
18	21·7	98·7		
19	23·4	99·0	98·9	+0·1
20	25·5	99·4		
21	27·7	99·6	99·9	-0·3
22	29·8	99·7		
23	31·9	99·8	99·9	-0·1
24	36·2	99·9 ₃		
25	40·4	99·9 ₇	99·9	$\pm 0\cdot0$
26	45·3	99·9 ₉		
27	50·2	99·9 ₉	100·0	-0·1

Eisen.

Länge = 118.4 mm

 $\lambda = 1.4000$

Dicke = 0.2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1 - e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0.8	10.0	9.6	+0.4
2	1.6	20.1		
3	2.5	29.0	29.8	-0.8
4	3.2	36.1		
5	4.2	44.1	43.2	+0.9
6	5.4	53.0		
7	6.7	60.9	60.4	+0.5
8	8.0	67.4		
9	9.3	72.6	72.6	± 0.0
10	11.0	78.6		
11	12.7	83.0	83.0	± 0.0
12	14.4	86.7		
13	16.1	89.4	89.4	± 0.0
14	18.2	92.2		
15	20.3	94.2	93.4	+0.8
16	22.2	95.5		
17	24.6	96.8	96.8	± 0.0
18	26.7	97.6		
19	28.8	98.2	98.2	± 0.0
20	31.0	98.7		
21	33.1	99.0	98.9	+0.1
22	35.2	99.3		
23	37.3	99.5	99.4	+0.1
24	39.4	99.6		
25	41.6	99.7	99.7	± 0.0
26	45.8	99.8		
27	50.1	99.9	99.9	± 0.0
28	54.6	99.9		
29	59.2	99.9	100.0	-0.1

Aluminium.

Länge = 131·6 mm

 $\lambda = 0.8654$

Dicke = 0.2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1 - e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0.8	6.4	6.1	+0.3
2	1.5	12.2		
3	2.5	19.2	19.1	+0.1
4	4.0	29.3		
5	5.0	35.2	35.6	-0.4
6	6.0	40.5		
7	7.6	48.1	48.5	-0.4
8	9.0	54.1		
9	11.0	61.3	61.5	-0.2
10	12.0	64.6		
11	14.4	71.2	71.1	+0.1
12	16.0	75.0		
13	17.8	78.5	78.2	+0.3
14	20.0	82.3		
15	22.0	85.1	84.9	+0.2
16	24.0	87.5		
17	26.3	89.7	89.0	+0.7
18	28.0	91.1		
19	30.5	92.9	92.6	+0.3
20	32.0	93.7		
21	34.8	95.1	95.1	± 0.0
22	37.0	95.7		
23	39.0	96.6	96.6	± 0.0
24	41.0	97.1		
25	43.3	97.6	98.3	-0.7
26	45.0	98.0		
27	47.5	98.4	98.8	-0.4
28	52.0	98.9		
29	56.0	99.2	99.6	-0.4
30	61.0	99.5		
31	65.8	99.7	100.0	-0.3

Kupfer.

Länge = 165.5 mm

 $\lambda = 0.6606$

Dicke = 0.2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1 - e^{-\lambda x})$	$x =$ beobachtet	Differenz
1	0.5	3.3	3.4	-0.1
2	0.9	6.0		
3	1.4	8.6	9.0	-0.4
4	2.2	13.5		
5	3.1	18.3	18.6	-0.3
6	4.8	27.2		
7	6.5	34.7	34.0	+0.7
8	8.2	41.8		
9	9.9	47.9	47.7	+0.2
10	11.6	53.5		
11	13.3	58.4	58.1	+0.3
12	15.0	62.9		
13	16.7	66.7	66.0	+0.7
14	18.4	70.3		
15	20.1	73.4	73.2	+0.2
16	21.8	76.3		
17	23.5	78.8	78.7	+0.1
18	25.2	81.1		
19	26.9	83.0	82.9	+0.1
20	28.6	84.9		
21	30.3	86.5	86.8	-0.3
22	32.0	87.9		
23	33.7	89.2	89.3	-0.1
24	35.4	90.4		
25	37.1	91.4	92.0	-0.6
26	38.8	92.3		
27	40.5	93.1	93.3	-0.2
28	42.2	93.8		
29	43.9	94.5	95.3	-0.8
30	47.3	95.6		
31	50.7	96.5	97.1	-0.6
32	54.1	97.2		
33	57.5	97.8	98.6	-0.8
34	60.9	98.2		
35	64.3	98.6	99.6	-1.0
36	67.7	98.9		
37	71.1	99.1	99.7	-0.6
38	74.5	99.3		
39	77.9	99.4	99.8	-0.4
40	80.3	99.5		
41	82.8	99.6	100.0	-0.4

Man sieht nun zunächst deutlich den grossen Einfluss der Abkühlung bei Metallen, welche eine bessere Wärmeleitung besitzen. Die Reihenfolge der Curven ist auch geradezu jene der Wärmeleitungsfähigkeiten.

Könnte man die äussere Wärmeleitung bei allen Drähten als gleich voraussetzen, wie es für so dünne Drähte, die einer ganz gleichartigen Behandlungsweise unterworfen waren, von manchen Beobachtern behauptet wird, so würden die Verhältnisse der λ direct die Verhältnisse der k darstellen.

Die Reihenfolge der λ ist aber auch hier dieselbe wie jene der elektrischen Leitfähigkeiten. Es wurden desshalb auch die specifischen Widerstände der untersuchten Drähte bestimmt.

Da aber von Beginn der Untersuchung auf eine genaue quantitative Übereinstimmung nicht gerechnet wurde und dem entsprechend die Anordnung nicht gewählt war, so ist auch den Zahlen, welche diese Verhältnisse ausdrücken sollen, kein definitiver Werth beizumessen. In qualitativer Hinsicht aber ist das Ergebnis gewiss massgebend. Stellt man also in diesem Sinne die Werthe zusammen, so erhält man folgende Reihenfolge:

	λ	λ^2	μ
		λ^2 von Kupfer	μ von Kupfer
Constantan	2·320	12·32	30·28
Patentnickel	2·170	10·78	18·74
Platin	1·984	9·01	14·67
Eisen	1·400	4·49	5·89
Aluminium	0·865	1·71	1·84
Kupfer	0·661	1·00	1·00

Die Curven gestatten auch leicht eine Schätzung anzugeben für den Antheil, welcher durch Leitung an die Zuleitung verloren geht. Würden die Enden der Drähte gar keine Wärme verlieren, so müsste der Temperaturverlauf durch eine zur Abscissenaxe im Abstände 1. verlaufende Gerade dargestellt sein. Das Verhältniss von 1. zum Mittelwerthe aller Ordinaten wird daher angeben, welcher Antheil auf die Ableitung entfällt.

Dieser Mittelwerth wird sein:

$$y_m = \frac{1}{l} \int_0^l y dx = \frac{1}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{e^{\lambda l} - 1}{e^{2\lambda l} - 1} e^{\lambda x} + \frac{e^{\lambda l} - e^{2\lambda l}}{e^{2\lambda l} - 1} e^{-\lambda x} \right) dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{\lambda l} \frac{e^{\lambda l} - 1}{e^{\lambda l} + 1}.$$

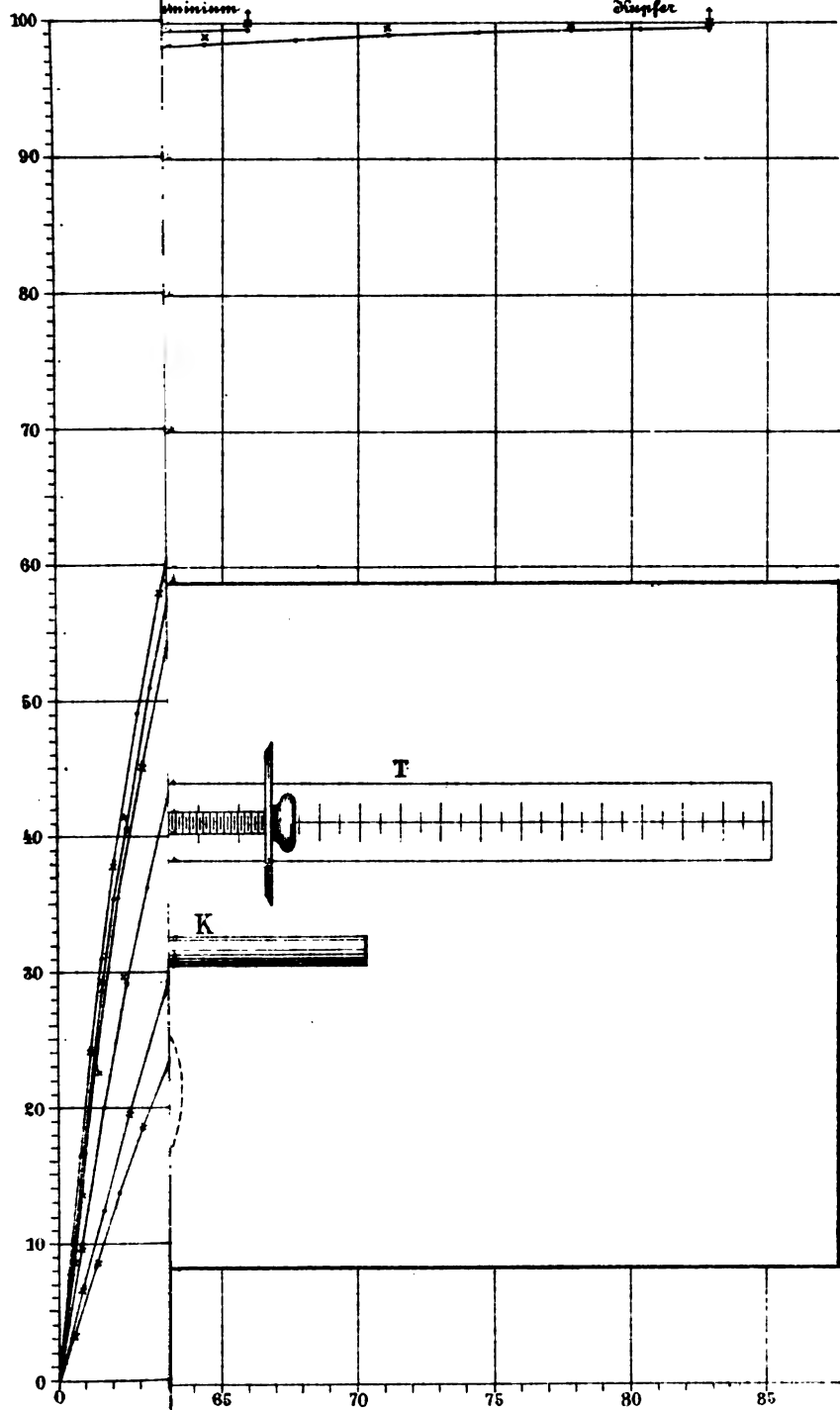
Im Allgemeinen wird man den Coëfficienten von $2/\lambda l$ der Einheit gleichsetzen können, so dass

$$\frac{2}{\lambda l}$$

den abgeleiteten Antheil darstellt. Darauf wäre bei Bestimmung der Temperatur von Widerständen Rücksicht zu nehmen.

P. Czer

duplex



Lith. v. J. Barth VI. Wien.

Über die mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper

von

G. H. Bryan und L. Boltzmann.

(Mit 1 Textfigur.)

§. 1. Die fundamentalste Eigenschaft der Temperatur besteht darin, dass zwei Körper von gleicher Temperatur mit einander in Berührung gebracht, sich im Wärmegleichgewichte befinden. Aus dieser Eigenschaft konnte bisher die gastheoretische Definition der Temperatur nicht abgeleitet werden. Es konnte nur der Beweis geliefert werden,¹ dass in einem Gemische mehrerer Gase die Bedingung des Wärmegleichgewichtes erfordert, dass die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung für jede Gattung von Gasmolekülen dieselbe sei. Aus dieser Thatsache kann dann unter Zuziehung des gastheoretischen Beweises des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie indirect der Schluss gezogen werden, dass in der kinetischen Gastheorie die Temperatur der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls proportional gesetzt werden muss.

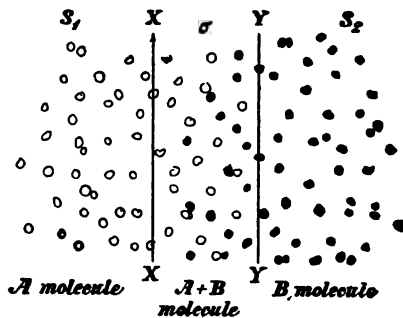
Allein alle unsere experimentellen Kenntnisse von den Eigenschaften der Temperatur sind von der Manipulation mit Körpern abgeleitet, welche sich nicht mischen und es ist nicht möglich, in einem Gemische von Gasen die Temperatur jedes einzelnen der Bestandtheile gesondert durch das Experiment

¹ Diese Sitzungsber. Bd. 63, 1871; Bd. 66, 1872; Bd. 94, 1886; Bd. 95, 1887.

zu definiren. Wir können zwar die Temperatur der ganzen Mischung messen, aber wir haben kein Mittel, irgend eine thermometrische Substanz der Wirkung eines der Bestandtheile allein auszusetzen. Ja selbst der Begriff der Temperatur eines der Bestandtheile für sich wird schwankend.

§. 2. Unter diesen Umständen muss jedes mechanische Bild, welches die Mittheilung der Wärme von einem Körper zum andern ohne gleichzeitige Vermischung der beiden Körper durch Diffusion zu versinnlichen vermag, von hohem Interesse sein. Ein derartiges mechanisches Bild soll im Folgenden beschrieben werden. Die Idee dazu wurde von Herrn Bryan angegeben.

Es seien X und Y (siehe beistehende Figur) zwei unendliche, parallele Ebenen, die sich in geringer Entfernung von



einander befinden und den ganzen von Gas erfüllten Raum in drei Regionen theilen, S_1 , S_2 und σ . Unter S_1 verstehen wir den gesammten Raum links von X , unter S_2 den Raum rechts von Y , unter σ den sehr dünn gedachten Raum zwischen X und Y . Übrigens würden die folgenden Schlüsse nicht an Beweiskraft verlieren, wenn X und Y zwei beliebige, allseitig sich bis zur Grenze des vom Gase erfüllten Raumes erstreckende oder auch in sich geschlossene Flächen wären, welche ohne sich zu treffen überall sehr nahe aneinander verlaufen.

Es seien nun zwei verschiedene Gattungen (A und B) von Gasmolekülen gegeben, von denen die ersteren in der Figur durch weisse, die letzteren durch schwarze Punkte dargestellt sind. Die Ebene Y soll die Moleküle A mit einer Kraft abstossen, welche links von X überall verschwindet, zwischen X

und Y aber eine Function der Entfernung des betreffenden Moleküles von der Ebene Y ist. Diese Function soll für Entfernungen, die sehr klein sind im Vergleiche zur Entfernung der Ebenen X und Y , unendlich gross werden, so dass nach der Region S_2 , die sich rechts von Y befindet, niemals ein Molekül A gelangen kann. Ganz analog soll die Ebene X auf die Moleküle B mit einer Kraft abstossend wirken, welche unendlich nahe an X unendlich gross, rechts von Y aber gleich Null ist, so dass in den Raum S_1 , der sich links von X befindet, niemals Moleküle B gelangen. Es soll im Übrigen weder die Ebene Y auf die Moleküle B , noch die Ebene X auf die Moleküle A eine Kraft ausüben.

Dann haben wir in S_1 ein einfaches Gas, das nur Moleküle A enthält, ebenso in S_2 ein anderes einfaches Gas, das nur Moleküle B enthält, in σ aber ein Gemisch beider Gase. Im letzteren Raume stossen fortwährend Moleküle A mit Molekülen B zusammen, so dass daselbst Wärmeaustausch stattfinden kann, wie zwischen zwei sich berührenden Körpern.

§. 3. Der hier zu betrachtende Fall ist lediglich ein Specialfall davon, dass auf ein beliebiges Gasgemisch beliebige äussere Kräfte wirken. Es handelt sich daher nur darum, die im allgemeinen Falle geltenden Formeln¹ dem speciellen Probleme anzupassen.

Es ist da gut, von generalisirten Coordinaten Gebrauch zu machen. Seien $q_1, q_2 \dots q_m$ die generalisirten Coordinaten eines Moleküls von der Gattung A (sagen wir kurz eines A -Moleküls) $p_1, p_2 \dots p_m$ die dazu gehörigen Momente, T_1 die lebendige Kraft, χ_1 die gesammte potentielle Energie, daher $E_1 = T_1 + \chi_1$ die totale Energie dieses Moleküls.

Ferner seien $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ die Coordinaten eines Moleküls von der Gattung B (B -Moleküls), $P_1, P_2 \dots P_n$ die dazugehörigen Momente, T_2 die lebendige Kraft, χ_2 die potentielle Energie und $E_2 = \chi_2 + T_2$ die gesammte Energie desselben. χ_1 und χ_2 können völlig verschiedene Functionen der betreffenden Coordinaten sein, so dass also auf die B -Moleküle ganz andere Kräfte als auf die A -Moleküle wirken können. Nun wurde in

¹ Diese Sitzungsber., Bd. 72, Oct. 1875; Bd. 78, 1878; Bd. 96, 1887.

den auf S. 1125 citirten Abhandlungen bereits Folgendes bewiesen:

Wenn die Anzahl der *A*-Moleküle, für welche die Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dp_1 \dots dp_m dq_1 \dots dq_m$$

bestimmten Grenzen liegen, gleich

$$Ae^{-h_1 E_1} dp_1 \dots dp_m dq_1 \dots dq_m \quad 1)$$

ist, so wird diese Zustandsvertheilung weder durch die Fortbewegung der *A*-Moleküle, noch durch die Zusammenstösse derselben untereinander verändert; sie ist also stationär, sobald man von den Zusammenstössen mit den *B*-Molekülen absieht. Für die letzteren gilt der analoge Satz. Abgesehen von ihren Zusammenstössen mit den *A*-Molekülen bleibt ihre Zustandsvertheilung sicher stationär, wenn die Zahl der Moleküle, für welche Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dP_1 \dots dP_n dQ_1 \dots dQ_n$$

bestimmten Grenzen liegen, gleich

$$Be^{-h_2 E_2} dP_1 \dots dP_n dQ_1 \dots dQ_n \quad 2)$$

ist. *A*, *B*, *h*₁ und *h*₂ sind Constanten.

§. 4. Wir haben nun noch den Effect der Zusammenstösse der *A*- und *B*-Moleküle im Raume *σ* zu betrachten. Wir betrachten da zuerst den Fall, dass die Zeitdauer eines derartigen Zusammenstosses so ausserordentlich kurz ist, dass die Coordinaten eines jeden der zusammenstossenden Moleküle im Momente des Endes des Zusammenstosses nahezu dieselben Werthe, wie im Momente des Beginnes, haben.

Wenn wir daher bloss diejenigen Zusammenstösse hervorheben, für welche die Coordinaten gegebene Werthe haben, so sind *χ*₁ und *χ*₂ constant und die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Momente ist für die beiden zusammenstossenden Moleküle

$$A_1 e^{-h_1 T_1} dp_1 \dots dp_m,$$

respective

$$B_1 e^{-h_2 T_2} dP_1 \dots dP_n,$$

wobei A_1 und B_1 für die betrachteten Zusammenstöße constant sind. Wenn wir nun setzen

$$f = A_1 e^{-h_1 T_1}, \quad F = B_1 e^{-h_2 T_2},$$

und mit f' und F' die Werthe derselben Functionen im Momente des Endes des betreffenden Zusammenstoßes bezeichnen, so tritt¹ Wärmegleichgewicht zwischen den A - und B -Molekülen ein, wenn allgemein die Gleichung besteht

$$fF = f'F', \quad 3)$$

welche sich wegen der Constanz von A_1 und B_1 reducirt auf

$$e^{-(h_1 T_1 + h_2 T_2)} = e^{-(h_1 T'_1 + h_2 T'_2)},$$

woraus folgt

$$h_1 T_1 + h_2 T_2 = h_1 T'_1 + h_2 T'_2.$$

Wegen der Erhaltung der Energie hat man

$$T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit h_2 und subtrahirt sie von der vorigen, so folgt

$$(h_1 - h_2) T_1 = (h_1 - h_2) T'_1,$$

was für alle Zusammenstöße nur erfüllt sein kann, wenn

$$h_1 = h_2 \quad 4)$$

ist. Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung ist für die A -Moleküle $3/2 h_1$, für die B -Moleküle $3/2 h_2$; beide Werthe müssen daher gleich sein

§. 5. Herr Bryan schlug in seinem, in der »British association« zu Oxford 1894 vorgelegten Referate vor, diejenige Zustandsvertheilung unter gleich- oder verschiedenartigen Molekülen, welche für jede Molekülgattung durch die

¹ Vergl. Boltzmann, diese Sitzungsberichte, Bd. 66, 1872, letzter Abschnitt.

Formel 1), respective 2) bestimmt ist, die Boltzmann-Maxwell'sche zu nennen, wenn die Constante h für alle Gattungen von Molekülen denselben Werth hat, ferner das Gesetz, wonach diese Zustandsvertheilung in jedem speciellen Falle stationär ist, das Boltzmann-Maxwell'sche Gesetz zu nennen. Wenn wir uns dieser Bezeichnung bedienen, so können wir das Resultat unserer Untersuchung dahin aussprechen, dass das Boltzmann-Maxwell'sche Gesetz für eine Mischung verschiedener Gase auch dann gilt, wenn auf die verschiedenen Gase ganz verschiedene äussere Kräfte wirken, sobald sich nur in einem beliebig kleinen Raume je zwei zu mischen vermögen.

Wenn wir h_1 und h_2 als verschieden voraussetzen, so könnten wir vielleicht, sei es mit Hilfe des Boltzmann'schen Minimumtheorems, sei es in anderer Weise, die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher in irgend einem Volumelemente des den beiden Gasen gemeinsamen Bezirks, Energie von dem einen zum anderen übergeht und durch Integration dieses Betrages über den gesammten gemeinsamen Bezirk könnten wir die Geschwindigkeit der gesammten Energieübertragung berechnen, welche wir als die Flächenleitfähigkeit der beiden Gase an ihrer gemeinsamen Berührungsfläche bezeichnen könnten.

§. 6. Die Dichten der beiden Gasarten A und B sind den Factoren

$$Ae^{-h_1\chi_1} \quad \text{und} \quad Be^{-h_2\chi_2} \quad 5)$$

der Formeln 1) und 2) proportional. In χ_1 und χ_2 sind die Potentiale der von den Ebenen X und Y ausgeübten Kräfte einbegriffen. Diese werden unendlich, sobald man eine Fläche unendlicher Abstossung passirt und bleiben jenseits derselben unendlich. In dieser Weise wird durch unsere Formel ausgedrückt, dass der Raum S_1 frei von B -Molekülen, der Raum S_2 frei von A -Molekülen ist und nur der Raum σ , wo χ_1 und χ_2 endlich ist, von Molekülen beider Gattung erfüllt ist.

Anstatt der Annahmen des §. 2 könnten wir auch voraussetzen, dass die A -Moleküle positiv und die B -Moleküle negativ elektrisch sind. Wenn die Ladung eines A -Moleküles q , die eines B -Moleküles q' ist und die beiden Ebenen X und Y au

der constanten Potentialdifferenz V erhalten werden, so verhält sich die Dichte des Gases von der Gattung A , respective B in den Räumen S_1 und S_2 wie $1 : e^{-hq'V}$, respective $e^{-hq'V} : 1$, und wenn man V so gross voraussetzt, dass die beiden Exponentiellen gegen die Einheit fast verschwinden, so werden wieder die beiden Räume S_1 und S_2 , deren Potential gleich dem der Begrenzungsflächen X , respective Y vorausgesetzt wird, fast nur je eine Gasart enthalten. Diese letztere Annahme hat ihr Analogon in den bekannten, durch Contact heterogener Körper erzeugten elektrischen Doppelschichten.

§. 7. Wenn an Stelle der bisher vorausgesetzten Zusammenstösse von unendlich kurzer Zeitdauer, solche von endlicher, wenn auch noch immer gegen die Zwischenzeit zweier Zusammenstösse, die dasselbe Molekül nacheinander erfährt, kurzer Zeitdauer vorausgesetzt werden, welche durch beliebige anziehende oder abstossende Kräfte bewirkt werden, so kann dasselbe Resultat mittelst der Methode bewiesen werden, welche in den Berichten der British Association unter dem Titel: »On the application, of the determinantal-relation to the kinetic theory of polyatomic gases« auseinandergesetzt ist.

Diese Gleichung zwischen den Producten der Differentiale der Coordinaten und Momente eines beliebigen conservativen Systems, welche sich einestheils auf den Beginn, anderentheils auf das Ende einer beliebigen Bewegung während einer beliebigen Zeit $t'-t$ bezieht, hat die Form

$$\frac{\partial(p'_1 \dots p'_m, q'_1 \dots q'_m)}{\partial(p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_m)} = 1. \quad 6)$$

1. Wenn wir diese Gleichung auf ein beliebiges einzelnes Molekül anwenden, das sich in einem beliebigen Felde äusserer Kräfte bewegt, ohne mit anderen zusammenzustossen, so sehen wir Folgendes: Für jedes derartige Molekül ist sowohl die gesammte Energie, als auch das Product der Differentiale $dp_1 \dots dp_m dq_1 \dots dq_m$ constant.

Wenn wir daher eine sehr grosse Zahl gleichbeschaffener Moleküle haben, und wenn

$$f_1(E_1) dp_1 \dots dq_m$$

die Zahl derjenigen bezeichnet, für welche zu einer beliebigen Zeit die Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dp_1 \dots dq_m$$

gegebenen Grenzen liegen, so kann die Zustandsvertheilung durch die Bewegung der Atome in den Molekülen und die fortschreitende Bewegung der letzteren nicht verändert werden. Dabei ist $f_1(E_1)$ eine beliebige Function von E_1 allein. Auf die Zusammenstösse der Moleküle untereinander oder mit anderen Molekülen ist jedoch noch keine Rücksicht genommen. Setzen wir hier

$$f_1(E_1) = Ae^{-h_1 E_1},$$

so sehen wir sofort, dass, so lange wir auf die Zusammenstösse keine Rücksicht nehmen, die durch die Formel 1) gegebene Zustandsvertheilung unter den A -Molekülen nicht verändert. Dasselbe folgt bezüglich der durch die Formel 2) gegebenen Zustandsvertheilung für die B -Moleküle.

2. Wir verstehen nun unter unserem conservativen System ein Paar zusammenstossender Moleküle, welche beide der Gattung A oder B , oder wovon eines der einen, das andere der anderen Gattung angehören können. Es wird vorausgesetzt, dass die während eines Zusammenstosses wirkenden Kräfte endliche sind und dass die Anzahl der zusammenstossenden Paare eine so grosse ist, dass man überhaupt von Mittelwerthen sprechen kann. Dann muss das Differentialproduct die Coordinaten und Momente beider Moleküle umfassen und auch unter E ist die Gesamtenergie beider Moleküle zu verstehen. Sobald daher die Anzahl der im Zusammenstosse begriffenen Molekülpaare durch den Ausdruck

$$f(E) dp_1 \dots dp_m dq_1 \dots dq_m dP_1 \dots dP_n dQ_1 \dots dQ_n$$

gegeben ist, wird diese Vertheilung ebenfalls ungeändert bleiben, so lange kein Molekül mit einem nicht dem stossenden Paare angehörigen Moleküle zusammentrifft. Aber in einem Gase wird jedes Molekül der Reihe nach mit verschiedenen Molekülen zusammenstossen, so dass nicht immer dieselben Paare als zusammengehörig betrachtet werden können. Da nun die

Grösse f eine Function der Energie allein sein soll, so muss es die wohlbekannte Form e^{-hE} haben. Denn bevor zwei Moleküle zusammenstossen, muss die Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines jeden derselben vollkommen unabhängig von dem des anderen sein. Es muss also $f(E) = f_1 \times f_2$ sein, wobei f_1 nur vom Zustande des einen, f_2 von dem des anderen der stossenden Moleküle abhängen kann.

Wir können nun schreiben:

$$E = T_1 + T_2 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_{12};$$

dabei sind T_1 und T_2 die lebendigen Kräfte, χ_1 und χ_2 die potentiellen Energien der Moleküle, wegen der von der Anwesenheit des anderen Moleküls unabhängigen Kräfte, endlich ist χ_{12} die potentielle Energie vermöge der Wechselwirkung beider Moleküle.

Nun müssen dieselben Gleichungen auch vor dem Zusammenstosse gelten, wo bei passender Constantenbestimmung $\chi_{12} = 0$ und $E = E_1 + E_2$ ist, wenn E_1 und E_2 die Einzelenergien der Moleküle sind. Daher folgt

$$f_1 f_2 = f(E_1 + E_2),$$

was nur erfüllt sein kann, wenn

$$f_1 = e^{-hE_1}, \quad f_2 = e^{-hE_2}, \quad f = e^{-hE}$$

ist. Daher gelten vor und nach dem Zusammenstosse die Formeln 1) und 2). Während eines Zusammenstosses aber können die beiden zusammenstossenden Moleküle nicht separat betrachtet werden und es ist die Wahrscheinlichkeit irgend einer Constellation beider Moleküle proportional e^{-hE} . Schreiben wir wie früher

$$f = e^{-h(T_1 + \chi_1 + T_2 + \chi_2 + \chi_{12})} = e^{-hT_1} e^{-hT_2} e^{-h(\chi_1 + \chi_2 + \chi_{12})},$$

so sehen wir, dass für eine gegebene Position aller Theile der beiden stossenden Moleküle die kinetische Energie eines jeden derselben noch immer proportional e^{-hT_1} , respective e^{-hT_2} ist. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit gewisser Werthe der Coordinaten des einen Moleküls nicht unabhängig von der Position des anderen vermöge des Factors $e^{-h\chi_{12}}$. Wenn jedoch der

Zusammenstoss vorüber, verschwindet χ_{12} und die Wahrscheinlichkeit gewisser Werthe der Coordinaten wird wieder für beide Moleküle unabhängig und von der Form 1), respective 2).

Da bisher unter χ_1 und χ_2 ganz beliebige Functionen verstanden wurden, so sind unsere Schlüsse ohneweiters anwendbar auf die specielle in §. 2 vorausgesetzte Form der Kräfte. Wo χ_1 oder χ_2 unendlich ist, ist die Anzahl der Moleküle der betreffenden Gattung gleich Null.

Die gleiche Schlussweise ist anwendbar auf die Zusammenstösse zwischen *A*-Molekülen unter sich oder *B*-Molekülen unter sich oder auch zwischen mehr als zwei Molekülen. Doch ist natürlich bei unseren Schlüssen immer vorausgesetzt, dass die betreffenden Zusammenstösse so häufig sind, dass überhaupt von einem Vertheilungsgesetz gesprochen werden kann. Natürlich können momentane Zusammenstösse immer als Grenzfälle von Zusammenstössen aufgefasst werden, die eine endliche, aber sehr kurze Dauer haben.

Die obige kurze Auseinandersetzung dürfte genügen, um die Anwendbarkeit der Functionaldeterminantengleichung sowohl auf die Zusammenstösse, als auch auf die Bewegung der Moleküle zwischen zwei Zusammenstössen zu zeigen.

Dieser Gegenstand wurde hier hauptsächlich deshalb so ausführlich behandelt, um zu zeigen, dass es bei Anwendung dieser Methode nicht nöthig ist, von vornherein anzunehmen, dass die die Vertheilung bestimmende Function f die Form e^{-hE} hat, sondern dass es genügt vorauszusetzen, dass f irgend eine Function von E ist. Es kann dann bewiesen werden, dass die Form $f = e^{-hE}$ sowohl nothwendig als auch genügend ist, was den einfachsten, leichtesten und besten Beweis des Boltzmann-Maxwell'schen Gesetzes liefert.

Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene astronomische Inschrift

von

Dr. Norbert Herz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1894.)

In den von Dr. Fr. Freiherrn Hiller v. Gaertringen publicirten *Inscriptiones Graecae insularum maris Aegaei I*,¹ findet sich unter Nr. 913 eine für den Astronomen hochinteressante Inschrift, deren Entstehungszeit v. Hiller auf 100 v. Chr. Geb. fixirt. Die Tafel enthält in 2 Columnen *D* und *H* Zahlen für die Planeten Mercur, Mars, Jupiter, Saturn, und zwar nach dem Texte der Columnen *A, B, C, E, F, G*:²

κατὰ μῆκος ζωδιακοὶ
κατὰ πλάτος τροπικοὶ
κατὰ βᾶθος περιδρομαὶ
κατὰ σχῆμα διέξοδοι.

Eine Discussion der Zahlen auf Grund meiner »Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, I. Theil,« ergab dem Verfasser die Möglichkeit, die Zahlen als Orte der Apsiden auszulegen.³ Der Verfasser hatte die Güte, mir von dieser Inschrift brieflich Mittheilung zu machen, und erlaube ich mir im Folgenden meine ihm bereits brieflich mitgetheilte Meinung hierüber mit seiner Zustimmung zu veröffentlichen.

¹ Corpus inscriptionum graecarum; consilio et auctoritate academiae litterarum borussicae editum.

² Bezüglich der Details muss ich auf die erwähnte Publication verweisen, deren Bezeichnungen ich im Folgenden auch zu Grunde lege.

³ I. c. S. 149.

Der grösseren Deutlichkeit wegen theile ich zunächst die Zahlen, wie sie aus dem Originale folgen,¹ mit.

	<i>D</i>	<i>H</i>
8 Στήβοντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	—	98
Πυρόεντος κατὰ μῆκος ζωιδιακοὶ	3074.2	174920
10 Πυρόεντος κατὰ πλάτος τροπικοὶ	309436	134360
Πυρόεντος κατὰ βάθος περιδρομαὶ	3.	401680
Πυρόεντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	3.	136480
Φαέθοντος κατὰ μῆκος ζωιδιακοὶ	—	21570
Φαέθοντος κατὰ πλάτος τροπικοὶ	. . . 16	21560
15 Φαέθοντος κατὰ βάθος περιδρομαὶ	24260	242200
Φαέθοντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	26690	26. . . 0
Φαίνοντος κατὰ μῆκος ζωιδιακοὶ	910000	—
Φαίνοντος κατὰ πλάτος τροπικοὶ	919216	9810
Φαίνοντος κατὰ βάθος περιδρομαὶ	1007176	.1760
20 Φαίνοντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	1008148	881460

Hiezu theilte mir Herr Dr. v. Hiller die folgenden als wahrscheinlich erkannten Correcturen mit:²

Zeile 9 und 10, Colonne <i>D</i> :	$\overset{A}{M}$ statt $\overset{A}{M}$	daher 174.2 und 19436
» 15	» <i>H</i> : X » Σ	» 242600 statt 242200
» 19 und 20	» <i>D</i> : $\overset{B}{M}$ » $\overset{P}{M}$ »	» 27176 und 28148
» 20	» <i>H</i> : $\overset{KH}{M} \overset{II}{A} \overset{I}{\Gamma} \overset{I}{\Gamma}$ statt $\overset{II}{M} \overset{I}{A} \overset{I}{\Gamma} \overset{I}{\Xi}$	daher 281480

¹ Herr v. Hiller hatte die Güte für die vorliegende Publication den Lichtdruck anfertigen zu lassen, der den Schriftcharakter und theilweise auch den Grad der Zuverlässigkeit der Lesungen zu ermessen gestattet. In letzterer Richtung ist zu bemerken, dass dieser Lichtdruck nach den mir zugegangenen Mittheilungen des Herrn v. Hiller nach einem Abklatsch hergestellt ist, den der schon aus E. Löwy's Veröffentlichungen bekannte Diakonos Adelphiu in Lindos auf Rhodos Herrn P. Wolters nach Athen gebracht hat, der ihn an Herrn v. Hiller sandte. Es soll eine Tafel aus grauem Marmor sein, 0·78 lang, 0·30 hoch, 0·29 tief, gefunden in dem Orte Κίσκιντος, etwa 2 km westlich von Lartos. Der Lichtdruck ist nach einer Photographie der Rückseite des Abklatsches hergestellt, da die Vorderseite stellenweise durch die Bürste verdorben war.

² Die Gründe werden aus dem Folgenden klar.

Hiezu schlug ich noch die folgenden Correcturen vor, falls diese Lesarten sich als zulässig erweisen sollten:

Zeile 11 und 12, Colonne *D*: $\overset{\Delta}{M}$ statt $\overset{\Delta}{\bar{M}}$; und Zeile 12, Colonne *H*: $\overset{M}{M}$ statt $\overset{H}{M}$.

v. Hiller ergänzt zunächst die fehlenden Zeilen für Venus und Mercur, so dass im Ganzen 20 Zeilen entstehen, von denen die ersten vier auf Venus, die nächsten vier auf Mercur u. s. w., je vier für die übrigen Planeten entfallen (die ersten 7 Zeilen fehlen daher in der Tafel).

Vergleicht man die Zahlen der Colonne *H*, u. zw. der Zeilen 10, 14, 18,

134360, 21560, 9810

mit den mittleren siderischen Bewegungen in einem Julianischen Jahre nach den jetzt bekannten Werthen:

689051'', 109257'', 43996'',

so erhält man die Verhältnisszahlen:

5·13, 5·06, 4·48.

Sollte das Verhältniss für Saturn auch 5 werden, so müsste es allerdings 8810, also *H* statt *Θ* gelesen werden, was aber nicht sehr wahrscheinlich ist.

Nimmt man nun die Zahlen der 11., 15. und 20. Zeile

401680, 242600, 231480,

und vergleicht sie mit den siderischen Bewegungen von Venus und Erde:

2103641, 1295977,

so ergeben sich die Verhältnisszahlen

5·24, 5·34, 4·60.

Liest man daher in Zeile 9 $\overset{\gamma}{\mu}$ und in Zeile 12 $\overset{\mu}{\mu}$, und beachtet, dass dann die übereinanderstehenden Zahlen zu je zweien nahe gleich sind, so lassen sich hieraus die folgenden Schlüsse ziehen: Die Zahlen der Colonne *H* verhalten sich wie die mittleren Bewegungen, oder geben direkt die mittleren

Bewegungen für eine gewisse Zeit (etwa $\frac{1}{5}$ Jahr), und zwar die Zeilen 9 und 10 für Mars, 11 und 12 für Venus, 13 und 14 für Jupiter, 15 und 16 für die Sonne, 17 und 18 für Saturn, 19 und 20 für die Sonne.

Da aber für die oberen Planeten die Bewegungen des Epicykelmittelpunktes gleich der siderischen Bewegung und die Bewegung im Epicykel (das Spiegelbild der Erdbahn) gleich der Sonnenbewegung ist, so werden für Jupiter und Saturn die ersten zwei Zeilen die Bewegungen des Epicykelmittelpunktes im Deferenten, die letzten beiden die Bewegung des Planeten im Epicykel darstellen. Ebenso wären die Zahlen der 9. und 10. Zeile die Bewegungen des Marsepicykels auf dem Deferenten, während man annehmen müsste, dass die Zahlen der 11. und 12. Zeile nur irrthümlich die Bewegungen der Venus im Epicykel enthalten. Ich habe zwar noch zwei andere Auslegungen versucht, welche ich aber hier nur der Vollständigkeit wegen anführe, da dieselben nur wenig Wahrscheinlichkeit haben. Man kann annehmen, dass die Reihenfolge der Planeten Mercur, Mars, Venus wäre, und die Zeilen 7, 8 sich auf die mittleren Bewegungen des Mercur, die Zeilen 9, 10 auf diejenigen des Mars, die Zeilen 11, 12 auf diejenigen der Venus beziehen, und zwar auf die Bewegungen im Epicykel, während die noch vorangehenden zwei Zeilen (5 und 6) die Bewegung des gemeinsamen Epicykelmittelpunktes der drei Planeten im Deferenten, also wieder die mittlere Bewegung der Sonne enthalten. In diesem Falle würde die Tafel 4 Zeilen weniger, also nur 16 Zeilen enthalten haben, und die drei Planeten Mercur, Mars, Venus würden dem Schema der unteren Planeten folgen: Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten gleich der Sonnenbewegung; Bewegung des Planeten im Epicykel gleich der siderischen Bewegung des Planeten. Die Annahme, dass in dieser Anordnung die Marsbahn innerhalb der Venusbahn liegen sollte, wäre mit Rücksicht auf den Umstand, dass Mars in Opposition kommen kann, Venus jedoch nur bis zu einem gewissen Abstände von der Sonne gelangen kann, sehr unwahrscheinlich. Da weiters in diesem Falle der Text vor den Zahlen nicht stimmen würde, so erscheint diese Auslegung zum mindesten zweifelhaft.

Eine weitere noch mögliche Auslegung wäre die, dass für Mars die Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten verdoppelt worden wäre, wie dies z. B. in der Eudox'schen Theorie der homocentrischen Sphären sich als nöthig herausstellte. Diese Annahme wird aber durch den Umstand widerlegt, dass in der Theorie der Epicykeln eine derartige Beschleunigung der Rotation unnöthig wird, und weiteres dass die Hälfte der angegebenen Zahl (200840) von den für Jupiter und Saturn angegebenen Zahlen beträchtlich abweicht, wenngleich die Zahlen für Jupiter und Saturn selbst ebenfalls nicht identisch sind, was aber, wie noch später erwähnt wird, auf einen Rechenfehler zurückgeführt werden kann.

Dass die Zahlen nicht etwa der Eudox'schen Theorie angehören können, ist leicht zu sehen; für die 4 Sphären muss zunächst die eine, äusserste der täglichen Bewegung folgen, die andere, innerste der siderischen Bewegung des Planeten, die Bewegung der mittleren beiden muss genau gleich sein, da sonst, wie man leicht sieht, periodisch ansteigende Breitenbewegungen in der Art erfolgen müssten, dass der Planet selbst in die Nähe des Poles der Ekliptik gelangen könnte.

Was die Zahlen der Colonne *D* betrifft, so hatte P. Tannery durch Vergleichung der beiden Columnen *D* und *H* die Vermuthung ausgesprochen, dass die Zahlen der Colonne *H* das zehnfache der Colonne *D* wären.¹ Wie die in den »Nachträgen« von v. Hiller gegebenen Lesarten andeuten, ist diese Annahme zulässig, und schloss ich mich derselben an. Für die Zeilen 17 und 18 wäre dann nach Tannery in Colonne *D* einfach ϖ zu lesen; doch könnte besser $\varpi\mu$ und $\varpi\mu\vartheta$, also 940 und 949 gelesen, also die μ als Zahl und nicht als Stellenzeiger aufgefasst werden, wofür ich in noch besserer Übereinstimmung $\varpi\pi$ vorschlage; die Bedeutung des in der 18. Zeile folgenden $\alpha\varsigma$ bleibt dabei allerdings unaufgeklärt. In Zeile 11 und 12 müsste

es weiters μ an Stelle von μ gelesen werden, was aber mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Typen $\Lambda\Lambda\Delta$, deren Unterscheidung auf dem Steine im Laufe der Zeiten vollständig verschwinden kann, sehr leicht möglich ist.

¹ Schriftliche Mittheilung von v. Hiller an mich.

Es dürfte hier der Ort sein, einiges über die Kreistheilung zu erwähnen. Es scheint mir als ein sonderbarer Zufall, dass in der Schlussbemerkung

ὁ κύκλος μο τξ' στιγμῶν θψκ' ἢ μοῖρα στιγμῶν . . .

θψκ' durch τξ' theilbar ist; die hieraus resultirende frühere Hiller'sche Annahme $1^\circ = 27'$ hat jedoch für sich wenig Wahrscheinlichkeit, da eine derartige Kreiseintheilung der griechischen Astronomie völlig fremd ist. v. Hiller fand eine Bestätigung seiner Ansicht in der Übereinstimmung des Ortes der oberen Apside des Saturn mit der unter der Annahme dieser Kreistheilung berechneten Angabe der Tafel. So bestechend dieser Schluss ist, ist er doch kaum haltbar und bin ich der Meinung, dass 1° nicht in 3600'', sondern in 720 Theile getheilt erscheint. Nimmt man nämlich $1^\circ = 720''$ und drückt die mittleren Bewegungen μ'' in solchen Theilen aus, so erhält man sofort die in Colonne *H* angegebenen Zahlen *z*; denn es ist

$$z = \frac{\mu''}{5} = \frac{\mu^\circ \cdot 60 \cdot 60}{5} \mu'' \cdot 720.$$

Die nicht völlige Übereinstimmung kann nicht wundernehmen, da die angenommenen Zahlen für das Julianische Jahr (365·25 Tage) gelten, die Zahlen der Tafel aber wahrscheinlich für das ägyptische Jahr (365 Tage) und andererseits die Bewegungen selbst in jener Zeit als nicht genügend genau bekannt anzusehen sind. Damit wäre denn auch für den Unterschied der Zahlen in den Zeilen 15 und 16 einerseits und 19, 20 andererseits eine Erklärung gegeben. Wenn auch der Unterschied dieser Zahlen viel zu gross ist, um direkt auf diese Art erklärt zu werden, so ist es nicht unmöglich, dass die Zahlen aus Beobachtungen einiger Jahre (eines relativ kurzen Zeitraumes) gewonnen wurden, und dabei für Saturn ein Rechenfehler vorfiel, wodurch alle Zahlen gleichmässig vergrößert erscheinen. Daher kommt dann die Übereinstimmung der von den übrigen beträchtlich abweichenden Verhältnisszahlen 4·48 und 4·60.

Von meinen diesbezüglichen Wahrnehmungen verständigte ich ungesäumt Herrn Baron v. Hiller. Dieser hatte nun seinerseits die Güte, mir weitere Details über die Ansichten Tannery's

mitzutheilen, aus denen ich ersah, dass wir auf demselben Standpunkte stehen. Auch er verwirft die Eintheilung $1^\circ = 27'$, nimmt aber an, dass $\Theta\phi\kappa'$ als 720 Sonnendurchmesser zu lesen sind.¹ Die Zahlen in den Colonnen *D* und *H* legt er als die Anzahl der Umläufe in einer gewissen Periode aus, welche für die Zahlen der Colonne *D* genähert 25000 Jahre (zufällig nahe der Periode der Präcession) für die Colonne *H* das zehnfache dieser Periode bedeutet.

Im Grunde genommen mit meinen Erörterungen identisch drängt sich jedoch hier die Frage auf, warum eine an und für sich so bedeutende Periode noch verzehnfacht wurde. Sind aber die Zahlen der Colonne *H* die jährlichen Bewegungen in gewissen Theilen, so werden ja durch dieselben Zahlen die Umläufe angegeben, welche in einer gewissen Zeit stattfinden, und zwar in so viel Jahren, als ein Theil im Umkreise enthalten ist, d. h. in 360×720 , oder $720 \times 360 = 259200$ Jahren, also zufällig nahe in der zehnfachen Periode der Präcession. Auch die Abweichung der Zahl in der 18. Zeile der Colonne *H* führt Tannery auf einen Fehler in der angenommenen Dauer der Periode zurück, was sich im Wesen mit meiner Annahme für die Zeilen 17 bis 20 deckt.

Liegt in der Verzehnfachung der an und für sich sehr grossen Präcessionsperiode ein nicht zu unterschätzender Einwurf gegen die Tannery'sche Form der Annahme (in merito sind ja, wie ich bereits erwähnt, unsere beiden Suppositionen gleichbedeutend), so ist hingegen noch darauf hinzuweisen, dass in der von mir adoptirten Annahme eine Verwandlung von Graden, Minuten und Secunden, eventuell Grade und 720-teln desselben oder Sonnendurchmessern und 360-teln desselben in Zahlen der kleineren Einheit auftritt, ein Vorgang, der im Alterthum nicht üblich war, da die Darstellung dieser Zahlen im dekadischen Systeme eben durch die Sexagesimaltheilung ersetzt

¹ Das zuerst von Tannery hervorgehobene Fehlen des Zeichens für die Tausende vor Θ erscheint mir nicht massgebend, da auch in den Zeilen 9, 10 und 15, Colonne *D* und in den Zeilen 18 und 19, Colonne *H* dieses Zeichen weglieb, oder im Laufe der Zeiten verschwand. Hingegen spricht die Tannery'sche Bemerkung, dass daselbst die Type Θ sich durch ihre Grösse von den anderen unterscheidet, für seine Annahme.

wurde. Aus diesem Grunde würde ich eine Combination beider Annahmen für nicht unwahrscheinlich halten. Die Zahlen der Colonne *D* könnten wohl Umläufe in einer Epoche von 25920 Jahren bedeuten und die in der Colonne *H* befindlichen Zahlen, die aus jenen durch Multiplication mit 10 erhalten wurden, geben sofort die jährlichen Bewegungen in Theilen, von denen 360×720 auf den Umkreis gehen.

Tannery nimmt an, dass sich diese 4 Zahlen auf den siderischen Umlauf (in Länge), den draconitischen Umlauf (in Bezug auf die Knoten) den anomalistischen Umlauf (im Epicykel) und eine zweite Anomalie (abhängig von der Stellung der Sonne) bezieht. Dagegen ist eine sehr wichtige Bemerkung zu machen: Eine siderische Bewegung der Knoten war im Alterthum nur für den Mond bekannt; auch verträgt sich eine supponirte Bewegung der Knotenlinie etwa so, wie sie beim Monde angenommen wurde, nicht mit der Art und Weise, wie die Breitenbewegungen von Ptolomäus, von den Arabern und noch in den Alfonsinischen Tafeln angenommen worden waren.¹ Ebenso hypothetisch erscheint die Annahme, dass man es mit siderischen und tropischen Bewegungen zu thun hat; denn dann müsste die Differenz in einem Jahre constant 50'' oder 10^p sein.²

Hingegen hat die Tannery'sche Annahme über die Zahlen der letzten beiden Zeilen eine grosse Wahrscheinlichkeit; könnte man *κατὰ σχῆμα διέξοδοι* (oder aber, was ebenfalls nicht ausgeschlossen zu werden braucht, *κατὰ βάρδος περιδρομαί*), als eine vom Sonnenorte abhängige Anomalie ansehen, so wäre die naheliegendste Annahme die folgende: Die Bewegungen im Epicykel wurden bekanntlich immer vom instantanen Apogeum aus gezählt; addirt man zu dieser Bewegung die Bewegung des Epicykelmittelpunktes, so erhält man die Bewegung von einer festen Richtung im Raume, also gewissermassen eine siderische Bewegung im Epicykel; dann müsste also die

¹ Siehe meine Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen; I. Theil, IV. Capitel und II. Theil, I. Capitel.

² Der Unterschied der Bewegung in einem tropischen und siderischen Jahre wäre nicht constant, aber ebenfalls sehr klein.

Summe der Zahlen der ersten oder zweiten und der dritten Zeile die Zahlen der vierten Zeile ergeben. Diese Beziehung findet sich thatsächlich für den Jupiter in Colonne *D* und *H* und für den Saturn in Colonne *D*, wenn daselbst, wie früher erwähnt, μ nicht als Stellenzeiger aufgefasst wird, wodurch einerseits ein indirecter Nachweis für die Richtigkeit dieser Lesart gegeben ist, andererseits aber auch in Folge der Übereinstimmung dieser Beziehungen in den Colonnen *D* und *H* die Richtigkeit der Annahme, dass man es in beiden Fällen mit mittleren Bewegungen oder mit Umläufen in einer gewissen Periode zu thun hat, dargethan ist.

Zieht man aus den von Ptolemäus im Almagest mitgetheilten Hipparch'schen Werthen für die Verhältnisse der Umlaufzeiten¹ die jährlichen Bewegungen, so erhält man in der hier angenommenen Einheit die folgenden Zahlen:

für Venus	421365 ^r	für Jupiter	21860 ^r
für Mars	137818	für Saturn	8807

Hiezu kommt dann die Bewegung der Erde 259200^r. Die beste Übereinstimmung findet sich bei Jupiter, bei welchem auch die vierte Zahl sehr nahe die siderische Bewegung der Erde gibt, so dass die dritte Zahl mit der von der oberen Apside gezählten Bewegung übereinstimmt.

Einer letzten Mittheilung von Tannery entnehme ich noch folgendes: Tannery nimmt an, dass die 4. Zeile für jeden Planeten als Bewegung in Elongation aufzufassen ist; dann müsste die Summe der 1. und 4. Zeile eine Constante (die Bewegung der Sonne) geben; hiefür spricht allerdings die übliche Bedeutung des $\kappa\alpha\tau\alpha\ \sigma\chi\eta\mu\alpha$; hingegen wären die Lesungen noch in folgender Weise zu corrigiren:

	Mars	Jupiter	Saturn
Erste Zeile	154920	24500	9920
Vierte Zeile	136480	266900	281480

¹ Siehe meine Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen; I. Theil, S. 73.

Hier ist zunächst zu bemerken: die Correctur von A in Δ in der ersten Zeile des Jupiter kann leicht adoptirt werden; die von mir vor Kenntniss der Tafel vorgeschlagene Correctur von $\overset{\text{II}'}{\text{M}}$ in $\overset{\text{M}}{\text{M}}$ bei der vierten Zeile des Mars erscheint nunmehr als zweifelhaft, und würde in diesem Falle die Tannery'sche Erklärung für zulässiger zu halten sein. Hingegen bleibt in dieser die Lesung $\overset{\text{M}}{\text{M}}$, welche keinesfalls durch $\overset{\text{II}'}{\text{M}}$ ersetzt werden kann völlig unaufgeklärt, und wenn man daselbst auch mit Tannery $\overset{\text{IH}}{\text{M}}$, also 182680 lesen wollte, so tritt diese Zahl vollständig aus dem Rahmen der übrigen heraus. Es bleibt daher noch manches für die Auslegung der vorliegenden hochinteressanten Inschrift zu thun.

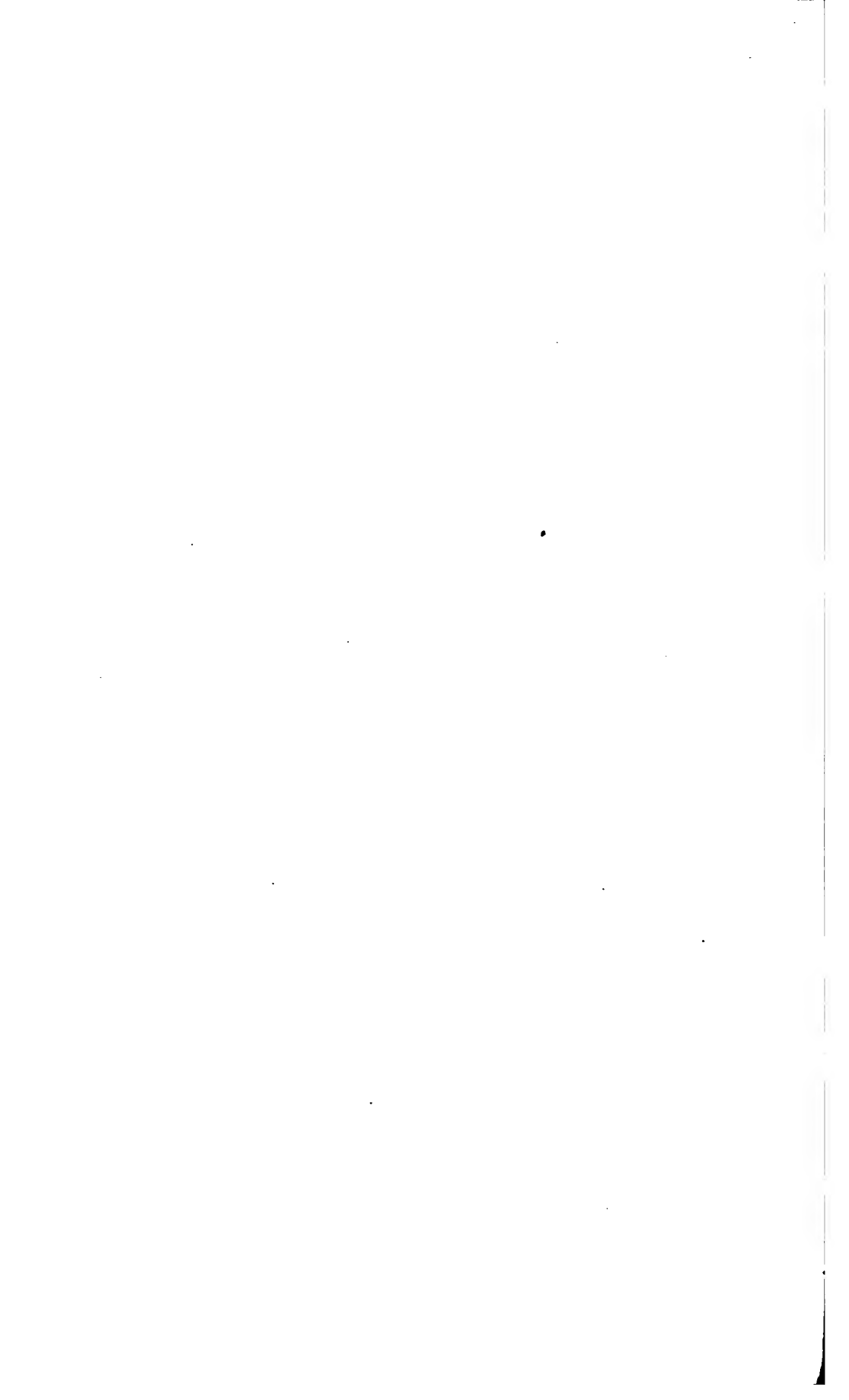
Nachdem v. Hiller aus archäologischen Gründen das Alter des Steines auf etwa 100 vor Christi Geburt setzte, hielt ich anfangs dafür, dass der Stein eine Darlegung Hipparch'scher Astronomie gibt. Da jedoch bekanntlich die von Ptolemäus angegebenen Zahlen direct Hipparch zugeschrieben werden, und diesem daher eine weit genauere Kenntniss der mittleren Bewegungen zugeschrieben werden muss, so dürfte der Stein wohl eher anderen Ursprunges sein, worüber sich allerdings in Ermangelung jeglichen Anhaltspunktes nichts weiter angeben lässt.



a Berlin.)



ALBERT EINSTEIN (1879-1955)



199
177-1
JAN 1895

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. I. UND II. HEFT.

JAHRGANG 1894. — JÄNNER UND FEBRUAR.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK,
ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. und 2. Heftes Jänner und Februar 1894 des CIII. Bandes,
Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
I. Sitzung vom 4. Jänner 1894: Übersicht	2
<i>Mertens F.</i> , Über die Fundamentalgleichung eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	5
II. Sitzung vom 11. Jänner 1894: Übersicht	41
<i>Litznar J.</i> , Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs (V. und letzter vorläufiger Bericht) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	43
<i>Hann J.</i> , Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.]	51
<i>Streintz F.</i> , Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	98
III. Sitzung vom 18. Jänner 1894: Übersicht	105
<i>Obermayer A. v. und Schindler A.</i> , Die trigonometrische Höhenbestimmung des Hohen Sonnblicks in der Goldberggruppe der Hohen Tauern [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	107
<i>Gegenbauer L.</i> , Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	115
IV. Sitzung vom 1. Februar 1894: Übersicht	129
V. Sitzung vom 8. Februar 1894: Übersicht	131
VI. Sitzung vom 15. Februar 1894: Übersicht	133
<i>Zsigmondy K.</i> , Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n ten Grades von x , welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	135
<i>Jäger G.</i> , Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	145

<i>Finger J.</i> , Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	163
--	-----

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 60 kr. = 3 Mk. 20 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Wollzeile 15) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

3
199.1
JAN 8 1895

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. III. BIS V. HEFT.

JAHRGANG 1894. — MÄRZ BIS MAI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK,
ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 5 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 3. bis 5. Heftes März bis Mai 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a.
der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
VII. Sitzung vom 1. März 1894: Übersicht	203
<i>Klemenčić I.</i> , Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	205
VIII. Sitzung vom 8. März 1894: Übersicht	223
IX. Sitzung vom 5. April 1894: Übersicht	227
<i>Finger J.</i> , Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. (II. Theil.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	231
<i>Jäger G.</i> , Über die innere Reibung der Lösungen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	251
<i>Tumlirz O.</i> , Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten. (II. Mit- theilung.) (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pf.]	266
X. Sitzung vom 12. April 1894: Übersicht	277
XI. Sitzung vom 15. April 1894: Übersicht	278
XII. Sitzung vom 4. Mai 1894: Übersicht	281
XIII. Sitzung vom 10. Mai 1894: Übersicht	283
<i>Gegenbauer L.</i> , Einige Bemerkungen zum quadratischen Recipro- citätsgesetze. [Preis: 15 kr. = 30 Pf.]	285
<i>Czuber E.</i> , Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [Preis 25 kr. = 50 Pfg.]	295
<i>Jaumann G.</i> , Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	317
<i>Streintz F.</i> , Über die thermochemischen Vorgänge im Secundär- Elemente. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	327
XIV. Sitzung vom 25. Mai 1894: Übersicht	337

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 20 kr. = 2 Mk. 40 Pfg.

OCT 28 1895

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VI. HEFT.

JAHRGANG 1894. — JUNI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK,
ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 7 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 6. Heftes Juni 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungs-
berichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
XV. Sitzung vom 7. Juni 1894: Übersicht	341
<i>Puschl C.</i> , Folgerungen aus Amagat's Versuchen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	343
<i>Weyr E.</i> , Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Ge- schlechte Eins und seine Anwendung. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 70 kr. = 1 Mk. 40 Pfg.]	365
<i>Suchanek E.</i> , Dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommen- den Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen. [Preis: 1 fl. 30 kr. = 2 Mk. 60 Pfg.]	443
XVI. Sitzung vom 14. Juni 1894: Übersicht	611
XVII. Sitzung vom 21. Juni 1894: Übersicht	612

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 20 kr. = 4 Mk. 40 Pfg.